# GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVII.

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1931.

## SUMARUL

1. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică"
2. Membrii decedaţi.
3. Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice".
4. O proprietate a trei drepte concurente tăiate de o transversală . . . . . *Gh. Zapan.*
5. Note matematice: 1 — 5.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 209.
8. Probleme rezolvate: 1500, 1799, 1808, 3986, 3997, 4001, 4018.
9. Exerciţii: 1.
10. Probleme propuse: 4051 — 4060.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1931

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVI se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **G. A. Nichifor**, Doctor în Matematici, Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 650, 79, 711, 29, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 82, 405, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 80, 84, 93, 99, 804, 08, 10, 29, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 70, 80, 96, 98, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 33, 44, 72, 73, 76, 83, 87, 94, 4000, 10, 13, 21, 23, 24, 25, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

# GAZETA MATEMATICA

# GAZETA MATEMATICA

## FOAE LUNARA

DE

## MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL XXXVII

15 SEPTEMVRIE 1931 — 15 AUGUST 1932

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1931

# LISTA MEMBRILOR
# SOCIETAŢII „GAZETA MATEMATICA“

## DELEGAŢIUNEA PENTRU ANUL XXXVII*)

COLONEL GH. LITEANU, C. D. ORĂŞANU şi AL. D. BUNESCU (Cassier)

## PERSONALUL REDACŢIUNII

I. IONESCU. Membru delegat pentru schimburi de reviste, primirea lor, cereri, recreaţiuni, diverse şi reclamaţiuni privitoare la tipărire.

G. ŢIŢEICA. Raportor.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare, pentru primirea şi repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice*.

GH. A. IOACHIMESCU, GH. ILIESCU, C. H. NICOLAU şi C. LAZU. Membri delegaţi pentru corecturi şi imprimarea revistei.

COLONEL GH. BUICLIU şi CĂPITAN I. LINTEŞ. Membri delegaţi pentru aritmetică elementară.

E. ABASON, D. BARBILIAN şi O. ŢINO. Membri delegaţi pentru geometrie elementară.

M. GHERMĂNESCU, I. S. ANTONIU, COLONEL GH. LITEANU şi O. ŢINO. Membri delegaţi pentru trigonometrie.

ROD. RACLIŞ, O. ŢINO şi TH. ANGHELUŢĂ. Membri delegaţi pentru algebră elementară.

G. A. NICHIFOR şi C. ORĂŞANU. Membri delegaţi pentru geometria descriptivă.

CR. MATEESCU şi E. ABASON. Membri delegaţi pentru mecanica elementară.

COL. GH. BUICLIU, D. BARBILIAN şi AL. PANTAZI. Membri delegaţi pentru geometria analitică.

G. A. NICHIFOR şi C. ORĂŞANU. Membri delegaţi pentru cosmografie.

A. ANGELESCU. Membru delegat pentru probleme şi note de matematici superioare.

TH. ANGHELUŢĂ, GH. BRATU şi P. SERGESCU. Membri delegaţi pentru probleme propuse de matematici superioare.

E. ABASON şi O. ŢINO. Membri delegaţi pentru clasarea problemelor propuse.

I. S. ANTONIU. Membru delegat pentru exerciţii.

ROD. RACLIŞ, E. ABASON şi COLONEL GH. LITEANU. Membri delegaţi pentru chestiuni de examen.

C. H. NICOLAU şi A. BRENER. Membri delegaţi pentru alcătuirea tablei de materii.

E. ABASON, M. SARIAN şi O. ŢINO. Membri delegaţi pentru cercetarea prealabilă a problemelor redijate.

E. ABASON, D. BARBILIAN, A. BRENER, COL. GH. BUICLIU, GH. I. DUMITRESCU, M. GHERMĂNESCU, CĂPITAN I. LINTEŞ, COLONEL GH. LITEANU, T. MAREŞ, CR. MATEESCU, O. ORĂNESCU, AL. PANTAZI, O. ŢINO, I. S. ANTONIU, LT.-COL. GH. POTOPEANU, CĂPITAN GH. NICULESCU, ROD. RACLIŞ şi C. H. NICOLAU. Membri delegaţi pentru cercetarea şi redactarea problemelor rezolvate.

---

*) Societatea este administrată şi reprezentată de o delegaţie alcătuită din doi membri şi un casier. (Art. 13 din statute).

# MEMBRII

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1922, Mart. 1* | ABASON ERNEST. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti (1921). Doctor în Matematici.— Conferenţiar şi Subdirector la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Justinian, 20. Bucureşti 3. |
| 2 | 1907, Iulie 1 | ABRAMESCU N. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj. |
| 3 | 1913, Oct. 7 | ALACI V. Doctor în Matematici.—Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara şi Şcoala Militară de Artilerie. — Str. General Foch, 27. Timişoara. |
| 4 | 1919, Sept. 12 | ANGELESCU A. Doctor în Matematici. — Profesor Universitar. — Str. Frumoasă, 12. Bucureşti 2. |
| 5 | 1922, Noem. 4 | ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici. – Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj. |
| 6 | 1928, Aug. 29 | ANTONIU S. ION. Inginer Diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti. Inginer Diplomat al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Inginer la Societatea de Gaz şi Electricitate din Bucureşti. — Str. Edgar Quinet, 6. Bucureşti. Telefon 302/21. |
| 7 | 1931, Mart. 11 | ARGHIRIADE EM. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. |
| 8 | 1921, Febr. 5 | AMRAMESCU C. Inginer. — Str. Porumbaru, 56. Bucureşti. |
| 9 | 1929, Aug. 28 | BĂDESCU A. LUCA. Inginer. — Inginer la Societatea Comunală a Tramvaielor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Olari, 15. Bucureşti 4. |
| 10 | 1924, Aug. 29 | BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Belgrano. Republica Argentina. |
| 11 | 1911, Febr. 20 | BANCIU I. Licenţiat în Matematici. — Directorul General al Contabilităţii Generale a Statului şi a Finanţelor Publice. — Str. Lucaci, 95. Bucureşti. |
| 12 | 1927, Mai 11 | BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Asistent Universitar. — Str. Carol Davila, 60. Bucureşti. |
| 13 | 1920, Ian. 10 | BORNEANU GEORGE. Inginer. Licenţiat în matematice. — Profesor la Academia de Architectură. Directorul Societăţii „Uzinele Chimice Române". — Str. Basarabia, 45. Bucureşti 2. |
| 14 | 1920, Ian. 10 | BRATU GH. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. — Profesor de Astronomie şi de Calcul diferenţial şi integral la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. Directorul Observatorului Astronomic din Cluj. — Str. Brătianu, 29. Cluj. |
| 15 | 1926, Iunie 28 | BRENER M. AVRAM. Inginer. — Inginer la Cassa Autonomă a Monopolurilor. — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3. |
| 16 | 1910, Iunie 21 | BRUCKNER VICTOR. Inginer Inspector General. — Director Superior C. F. R. — Str. Ing. Pandele Ţăruşanu, 7. Bucureşti 2. |

*) Data admiterii.

| | | |
|---|---|---|
| 17 | 1920, Aug. 15 | Budeanu I. C. Inginer.— Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Secretar General al Ministerului de Industrie şi Comerţ. — Parcul Bonaparte. Str. Washington, 32. Bucureşti 3. |
| 18 | 1910, Apr. 3 | Buicliu Gh. Colonel de Artilerie. — Comandantul Regimentului 32 Obuziere. Preşedintele Comisiunilor militare din Brno, Pardubice, Povazska, Bystrica şi Bratislava, Cehoslovachia. — Zbrojovka; Brno. Cehoslovachia. |
| 19 | 1930, Aug. 31 | Bungescu Ion. Ofiţer de Artilerie; absolvent al Şcoalei de Art. A. A. din Franţa (Metz). — Căpitan în Regt. 1 Art. A. A. Profesor la Şcoalele Militare de Aeronautică.—Str. Elina Matei Voevod, 7. Bucureşti 4. |
| 20 | 1928, Mai 9 | Bujoreanu N. Inginer-Şef. — Inspector principal C. F. R. — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3. |
| 21 | 1924, Ian. 30 | Bunescu D. Al. Inginer S. N. P. S.—Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Telefon 300/79. Bucureşti 6. |
| 22 | 1920, Ian. 10 | Buradescu Traian. Inginer Şef.—Inspector principal technic C. F.R. Conducătorul Inspecţiei a 7-a Exploatare Cluj. — Str. Xenopol, 7. Cluj. |
| 23 | 1910, Oct. 25 | Bușilă D. C. Inginer. — Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Matei Milo, 2 bis. Telefon 301/45. Bucureşti. |
| 24 | 1930, Aug. 31 | Bușilă Adrian. Inginer. — Inginer în Direcţiunea Întreţinerii C. F. R. — Str. Aurel Vlaicu, 51. Bucureşti 3. |
| 25 | 1921, Mai 4 | Bușilă I. Inginer. — Inginer în Ministerul Lucrărilor Publice.— Str. Dr. Lueger, 6 bis. Bucureşti. 2. |
| 26 | 1914, Iulie 12 | Cambureanu V. Inginer. — Subdirector General al Casei Muncii C. F. R. — Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2. |
| 27 | 1926, Iun. 28 | Cambureanu V. D. Inginer. — Inginer la Casa Autonomă a Drumurilor de Stat. — Str. Cobălcescu, 31. Bucureşti |
| 28 | 1922, Noem. 4 | Capriel I. Inginer-Şef. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Administrator-Delegat al Societăţii „România Carboniferă", al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Visarion, 5. Bucureşti 3. |
| 29 | 1920, Mart. 1 | Caraman E. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „V. Alexandri" din Galaţi. — Str. Lascar Catargi, 40. Galaţi. |
| 30 | 1928, Aug. 29 | Cassian Gh. Maior. — Membru în Comisia militară de recepţie la Uzinele Skoda.—Hotel Skoda-Lohotin. Pilzen. Cehoslovacia. |
| 31 | 1920, Ian. 10 | Cazacu N. C. Inginer. — Inspector de Mişcare C. F. R. — Str. Sf. Ilie, 2 bis. Galaţi. |
| 32 | 1914, Dec. 20 | Chiricuţă A. Inginer Inspector General. Regia Autonomă a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă.—Bulevardul Elisabeta, 89. Bucureşti 2. |
| 33 | 1920, Mart. 1 | Chiţulescu I. Ioan. Inginer. — Direcţia Specială a Atelierelor C. F. R. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Pantelimon, 34. Bucureşti 4. |

| | | |
|---|---|---|
| 34 | 1921, Febr. 5 | Cioc M. Inginer. — Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1. |
| 35 | 1930, Aug. 31 | Ciorănescu Nicolae. Doctor în Matematici din Paris. Licenţiat în Fizico-Chimice.—Conferenţiar la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Pomul Verde, 12. Bucureşti 2. |
| 36 | 1895, Sept. 15* (fondator) | Constantinescu Tancred. Inginer Inspector General.—Senator. Fost Ministru.—Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3. |
| 37 | 1910, Apr. 3 | Costinescu Dan. Inginer. — Director General al Fabricii de Hârtie „Letea". — Fabrica Letea. Bacău. |
| 38 | 1922, Noem. 1 | Dumitrescu I. Gh. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Şos. Ştefan cel Mare, 170. Bucureşti 3. |
| 39 | 1922, Mart. 1 | Dumitrescu Arg. D. Inginer. — Şeful Secţiei L 3 C. F. R.— Str. N. Bălcescu, 34. Craiova. |
| 40 | 1918, Ian. 28 | Felix Corneliu. General de Brigadă în rezervă. — Str. G. D. Palade, 72. Bucureşti 3. |
| 41 | 1909, Iulie 1 | Filipescu Em. Gh. Inginer. — Director General al Societăţii Comunale a Tramvaielor Bucureşti. Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Vasile Lascăr, 216. Bucureşti 3. |
| 42 | 1929, Ian. 31 | Focşeneanu I. Mihail. Locotenent de Artilerie. Licenţiat în Matematici.— Profesor la Şcoala Militară a Artileriei.— Şcoala Militară a Artileriei. Timişoara. |
| 43 | 1928, Mai 9 | Fundăţeanu C. Ion. Inginer-Şef. — Subdirectorul General al Energiei din Ministerul Industriei şi Comerţului. — Aleea N. Ionescu 3 (Parcul Delavrancea). Bucureşti 2. |
| 44 | 1921, Mai 4 | Gabrielesco Ramiro. Inginer. — Str. Dionisie, 19. Bucureşti 1. |
| 45 | 1914, Dec. 20 | Gâlcă I. Toma. Inginer-Şef.—Str. Luigi Cazzavilan, 8. Bucureşti 2. |
| 46 | 1906, Mart. 4 | Georgescu I. N. Inginer Inspector General.— Directorul General al Serviciului de Indiguiri şi Desecări.— Str. G. D. Pallade, 35. Bucureşti 3. |
| 47 | 1921, Febr. 5 | Georgescu N. N. Inginer. — B-dul Elisabeta, 24. Bucureşti 1. |
| 48 | 1927, Mai 11 | Georgescu-Roegen N. Licenţiat în Matematici. Diplomat al Institutului de Statistică din Paris. — Profesor de Matematici la Liceul din Constanţa.—Str. Tudor Vladimirescu, 14. Constanţa. |
| 49 | 1922, Aug. 31 | Ghermănescu N. Mihail. Licenţiat în Matematici. — Profesor de Analiză Matematică la Şcoala pregătitoare de Ofiţeri de Geniu. Profesor secundar în Bucureşti.—Str. Popa Nan, 79. Bucureşti 4. |
| 50 | 1929, Aug. 28 | Gheorghiu A. Şerban. Doctor în Ştiinţele Matematice. Statistician. — Subdirector în Ministerul de Finanţe. — Str. Robert des Flers, 3. Bucureşti. |
| 51 | 1913, Aug. 30 | Gheorghiu A. Mircea. Diplomat S. N. P. S.—Inginer-Şef. Regia Autonomă a Porturilor. Serviciul Porţilor de Fer. — Orşova. |
| 52 | 1913, Aug. 30 | Gheorghiu S. I. Inginer-Şef. — Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Secretar General al Ministerului de Lucrări Publice. — Str. Lahovary, 3. Bucureşti 3. |

*) Data fondării revistei „*Gazeta Matematică*". Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

| | | |
|---|---|---|
| 53 | 1921, Mai 4 | GHIMUŞ D. A. Căpitan. — Inginer Radio. E. S. E.—Directorul Şc. Radio-ofiţeri. Profesor la Şcoalele Militare de Geniu şi la Şcoalele Aeronauticei.—Regimentul Transmisiuni. Telefon 313/37. Bucureşti. |
| 54 | 1931, Mart. 11 | GHIŢESCU VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar titular. — Str. Vaselor, 40 B. Bucureşti 4. |
| 55 | 1910, Iunie 2 | GRIGORESCU C. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice. — Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4. |
| 56 | 1920, Ian. 10 | GUTZU VICTOR. Inginer.—Directorul Manufacturei de Tutun.—Iaşi. |
| 57 | 1927, Ian. 28 | HANGANU D. M. Inginer diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti şi al Şcoalei superioare de Electricitate din Paris. — Inginer la Soc. „Edilitatea". Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti — Str. Logofătul Nestor, 2. Bucureşti. |
| 58 | 1924, Ian. 30 | IANCULESCU ROMULUS. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Inspector de Exploatare C. F. R. — Bacău. |
| 59 | 1922, Mai 10 | ILIESCU GH Inginer-Şef. — Directorul Fabricei de Chibrituri-Filaret. — Fabrica de Chibrituri-Filaret. Bucureşti 6. |
| 60 | 1928, Aug. 29 | ILIESCU TRAIAN. Locot.-Colonel de artilerie. — Direcţia XI Tehnică Superioară. — Str. Uranus, 98 Bucureşti 6. |
| 61 | 1895, Sept. 15 (fondator) | IOACHIMESCU GH. ANDREI. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Buzeşti, 76. Bucureşti 2. |
| 62 | 1926, Iunie 28 | IOACHIMESCU A. GH. Inginer. — Directorul Fabricei de Timbre. — Str. Buzeşti, 76, Bucureşti 2. |
| 63 | 1920, Ian. 10 | IOANOVICI AUREL. Inginer.—Antreprenor.—Str. General Berthelot, 55. Bucureşti 2. |
| 64 | 1922, Noem. 1 | IONESCU V. D. Doctor în Matematici. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris.—Profesor agregat de mecanică raţională la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. — Str. Dorobanţilor, 7. Cluj. |
| 65 | 1895, Sept. 15 (fondator) | IONESCU I. Inginer Inspector General. — Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Membru în Consiliul technic superior. Membru în Consiliul superior al avuţiilor şi întreprinderilor publice; în Consiliul permanent al Ministerului Instrucţiunii. Membru corespondent al Academiei Române. — Str. Căluşei, 23. Bucureşti 4. |
| 66 | 1912, Iunie 2 | JIJIE ADAM. Căpitan Comandor în rezerva marinei. Licenţiat în Ştiinţe. Inginer Electrician. — Concesionarul luminatului electric şi al alimentării cu apă din Sulina. — Sulina. |
| 67 | 1924, Ian. 30 | KAUFMANN N. Inginer. — Şef de Secţie. Direcţiunea Economatului C. F. R. — Str. G-ral Manu, 26. Bucureşti 2. |
| 68 | 1931, Aug. 28 | LAZU CONST. Inginer diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti.—Director la Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II", din Bucureşti.—Str. Sf. Elefterie, 19. Bucureşti 6. |

| | | |
|---|---|---|
| 69 | 1919, Sept. 12 | LINTEŞ I. Căpitan. Inginer aeronautic. — Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Membru în Comisiunea română de recepţie la Skoda (Cehoslovacia). — Hotel Skoda-Lochotin. Pilzen. Cehoslovacia. |
| 70 | 1921, Mai 4 | LITEANU I. GH. Colonel de artilerie, Marele Stat Major al Armatei.— Profesor la Şcoalele Militare ale Aeronauticei şi la Cursul de Pregătire militară al Şcoalei Politechnice „Regele Carol II" din Bucureşti.—Str. G-ral Angelescu, 24. Bucureşti 2. Telefon 382/99. |
| 71 | 1913, Aug. 30 | MALCOCI C. Inginer Inspector General.—Directorul General al Exploatării Monopolurilor.—Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6. |
| 72 | 1926, Iunie 28 | MANOILESCU MIHAIL. Inginer. — Fost Ministru. Guvernator al Băncii Naţionale a României. Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Str. Mussolini, 27. Bucureşti 3. |
| 73 | 1921, Febr. 5 | MAREŞ T. Inginer-Şef. — Director regional la Casa Autonomă a drumurilor de stat. — Bulev. Bonaparte, 20 (Alee). Bucureşti. |
| 74 | 1922, Mai 10 | MATEESCU CR. Inginer.— Asistent la Şc. Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Subdirector al Soc. „Electrica" Bucureşti. — Str. Sevastopol, 11 C. Bucureşti 2. |
| 75 | 1927, Mai 11 | MEREUŢĂ V. Inginer. — Inspectoratul I C. F. R. — Gara Filaret. Bucureşti 6. |
| 76 | 1929, Ian. 31 | MIHĂILESCU P. TIBERIU. Licenţiat în Matematici.— Profesor secundar.—Str. Dionisie Eclesiarhul, 15. Bucureşti 2. |
| 77 | 1921, Febr. 5 | MIHALOPOL C. Inginer Inspector General. Regia autonomă a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă.— Str. Profesori, 6 bis. Bucureşti 5. |
| 78 | 1925, Febr. 11 | MIRCEA M. E. Inginer. — Inginer-Şef la Societatea „Concordia".— Buştenari. Jud. Prahova |
| 79 | 1909, Iunie 1 | MIREA N. ŞT. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Superioară de Arhitectură. Conferenţiar la Universitate. — Str. Inundaţiei, 8. Bucureşti 6. |
| 80 | 1929, Aug. 28 | MITESCU CAMIL. Inginer. — Subdirector al Exploatării în Direcţia Generală a Exploatării Monopolurilor. — Piaţa Lahovary, 1. Bucureşti. |
| 81 | 1920, Ian. 10 | MITITELU C. CLAUDIU. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Director de Serviciu în Adm. Centrală a Casei Autonome a Monopolurilor. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3. |
| 82 | 1920, Ian. 10 | MITITELU C. I. Inginer. — Întreprinzător de Lucrări Publice. — Calea Griviţei, 36. Telefon 367/93. Bucureşti 2. |
| 83 | 1922, Martie 1 | NEGRETZU I. Inginer de mine.—Exploatări agricole (agricultor).— Str. Şerban-Vodă, 170. Piteşti. |
| 84 | 1928, Aug. 29 | NEGURĂ ST. Licenţiat în Matematici. — Profesor la liceul „Codreanu" din Bârlad. — Str. Carol, Bârlad. |
| 85 | 1910, Mai 20 | NICHIFOR A. G. Doctor în Ştiinţele Matematice.—Profesor agregat la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Str. Dimitrie Racoviţă, 32. Bucureşti 4. |

| | | |
|---|---|---|
| 86 | 1929, Aug. 28 | NICOLAU H. CONST. Inginer.—Directorul Imprimeriei Naţionale — Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6. Telefon 372/88. |
| 87 | 1922, Noem. 4 | NICOLAU TH. M. Inginer. — Director în Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. Lăzureanu, 31 bis. Bucureşti. 6. |
| 88 | 1931, Mart. 11 | NICULESCU V. ALEX. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar.— Str. Isvor, 98. Bucureşti 6. |
| 89 | 1920, Oct. 28 | NICULESCU CRISTEA. Inginer-Şef. — Director General al Societăţii Anonime industriale „Arad-Brad".—B-dul Carol, 57. Arad. |
| 90 | 1923, Iulie 4 | NICULESCU GHEORGHE. Căpitan. Inginer. Absolvent al Şcoalei Politechnice Timişoara şi al Şcoalei Superioare de Aeronautică Paris.—Str. Isvor, 98. Bucureşti 6. |
| 91 | 1929, Ian. 31 | NICOLESCU MIRON. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Sorbonne. — Conferenţiar de Algebră Superioară şi Teoria Numerelor la Facultatea de Ştiinţe din Cernăuţi. — Universitate, Cernăuţi. |
| 92 | 1922, Martie 1 | ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor agregat la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. Director al Institutului Superior de Educaţie Fizică. Director al Şcoalei de Statistică. — Str. Rozelor 9, Bucureşti. |
| 93 | 1927, Ian. 28 | OPRESCU GH. Colonel. — Fundătura Oraţiu, 6 bis. Bucureşti 2. |
| 94 | 1927, Ian. 28 | ORĂNESCU O. Inginer.— Inginer mecanic la Navigaţiunea Fluvială Română, Galaţi. — Str. Grădina-Veche, 34. Galaţi. |
| 95 | 1913, Oct. 7 | ORĂŞANU D. CEZAR. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. Licenţiat în Matematici. Inginer-hotarnic şi Operator Topometru.—Conferenţiar la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Profesor la Şcoalele Aeronautice. Antreprenor de Lucrări.—Str. Ştirbei Vodă, 45. Bucureşti 2. |
| 96 | 1910, Mai 20 | ORĂŞANU GR. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Gh. Lazăr" din Bucureşti. — Str. Stănică Marin, 32. Ploeşti. |
| 97 | 1927, Oct. 17 | OTTULESCU EUG. Inginer. — Str. Alexandrina, 10. Bucureşti 2. |
| 98 | 1914, Dec. 20 | PANAITESCU SC. General de Divizie în retragere. — Conferenţiar Universitar. Membru corespondent al Academiei Române. Consilier la Banca Românească din Chişinău. — Str. Alexandru cel Bun, 79. Chişinău. |
| 99 | 1929, Ian. 31 | PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici. Actuar. — Inspector actuar în Ministerul de Industrie şi Comerţ.—Str. Vaselor, 42. Bucureşti. |
| 100 | 1924, Ian. 30 | PAŞCANU S. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele (1919); Arhitect Naval diplomat Univ. din Glasgow (1921). B. Sc.; A. I. N. A. — Inginer Expert la Societatea Naţională de Credit Industrial. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Calea Dorobanţilor, Aleea A, 8. Bucureşti 3. |
| 101 | 1911, Dec. 17 | PATRICIU G. TITUS. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Directorul Liceului „M. Kogălniceanu" din Iaşi. Fost Director General al Învăţământului Primar şi Normal în Ministerul Instrucţiunii.— Str. Rosetti, 8. Iaşi. |

| | | |
|---|---|---|
| 102 | 1920, Oct. 28 | PHILIPIDE M. Inginer. - Directorul General al Societăţii Anonime Române de Navigaţie pe Dunăre S. R. D.—Str. Radu Vodă, 25. Bucureşti 5. |
| 103 | 1911, Aug. 11 | POPESCU GH. Inginer Inspector General. — Director General al Societăţii Naţionale de Credit Industrial. Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Str. G-ral Praporgescu, 27. Bucureşti 1. |
| 104 | 1922, Aug. 31 | POPESCU ION. Inginer.—Director la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Popa Savu, 12 A. Bucureşti 2. |
| 105 | 1931, Mart. 11 | POPP N. Căpitan. — Preşedintele Comisiunii militare de recepţie la Uzinele I. A. R. Braşov. |
| 106 | 1927, Mai 11 | POPP TRAIAN. Licenţiat în Matematici — Profesor la Seminarul pedagogic universitar şi la Liceul Sf. Sava. — Parcul Delavrancea, Aleea D, 2. Bucureşti 2. |
| 107 | 1928, Mai 9 | POPOVICIU TIBERIU. Licenţiat în Matematici. — Elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris.—Str. Niculae Filipescu, 25. Arad. |
| 108 | 1929, Ian. 31 | PORTOCALĂ MIHAI. Inginer. — B-dul Domniţei, 15. Bucureşti 1. |
| 109 | 1930, Aug. 31 | POTOPEANU GHEORGHE. Lt.-Colonel. Şeful secţiei operaţiilor din Marele Stat Major.— Bulevardul Elisabeta, 97. Et. II. Bucureşti 2. |
| 110 | 1925, Febr. 11 | PROTOPOPESCU GRIGORE. Colonel din Artilerie. — Comandantul Regimentului 2 Artilerie „General de Divizie Gheorghe Manu".— Str. Cobălcescu 41. Bucureşti 1. |
| 111 | 1927, Mai 11 | RACLIŞ RODOLPHE. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Licenţiat în Ştiinţele Fizice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Inginer Diplomat de l'Ecole Supérieure d'Electricité de Paris. — Directorul „Revistei Universitare Matematice".—Aleea Vulpache, 21 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3. |
| 112 | 1910, Aug. 3 | RADU E. M. Inginer Inspector General în Direcţiunea Apelor din Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor.—Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Str. Armenească, 24. Bucureşti 1. |
| 113 | 1920, Aug. 15 | REVICI TEOFIL. Inginer. — Şef de Secţie în Direcţia de Poduri C. F. R.—Str. D. Racoviţă, 14. Bucureşti 4. |
| 114 | 1914, Dec. 20 | ROŞU V. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Calea Victoriei, 2. Bucureşti. |
| 115 | 1929, Aug. 28 | SĂLĂGEANU AUREL. Inginer. — Directorul Imprimeriei Chişinău. — Imprimeria Chişinău. |
| 116 | 1904, Sept. 1 | SALIGNY M. Inginer Inspector General. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic. Profesor la Şcoala de Conductori de Lucrări Publice din Bucureşti.—Str. G. Gr. Cantacuzino, 50. Bucureşti 2. |
| 117 | 1920, Ian. 10 | SĂPUNARU S. GH. Inginer de Poduri şi Şosele. — Director General al Societăţii „Clădirea Românească". — Str. Pia Brătianu, 5. (Parcul Ioanid). Bucureşti 3. |
| 118 | 1929, Aug. 28 | SARIAN MIHAI. Inginer.—Inginer la Atelierele C. F. R. Griviţa. — Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Mircea Zorileanu, 42. Bucureşti. |

| | | |
|---|---|---|
| 119 | 1920, Aug. 15 | ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer.—Antreprenor de construcţii.— Str. Sf. Constantin, 24. Bucureşti. |
| 120 | 1928, Aug. 29 | SERGESCU BARBU. Inginer de mine. Licenţiat în Matematici. — Inginer-Şef la Societatea „Steaua Română". — Soc. „Steaua Română". Câmpina. |
| 121 | 1919, Sept. 12 | SERGESCU P. Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie. — Profesor Universitar. — Str. Berde, 3. Cluj. |
| 122 | 1921, Febr. 5 | SFINŢESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General. — Profesor la Academia de Architectură. Director General Technic la Municipiul Bucureşti. — Soseaua Kiselef, 25. Bucureşti 2. |
| 123 | 1910, Aug. 3 | SMÂNTÂNESCU AUREL. Inginer Inspector General. — Subdirector General al Casei Autonome a Drumurilor de Stat. — Str. Sf. Ştefan, 5. Bucureşti 4. |
| 124 | 1923, Iulie 4 | STAMATESCU I. Profesor la Liceul Matei Basarab şi Seminarul Pedagogic Universitar. — Str. Toamnei, 47. Bucureşti 3. |
| 125 | 1920, Ian, 10 | STAN D. Inginer.—Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Inginer la Soc. Anonimă Română de telefoane.— Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4. |
| 126 | 1927, Mai 11 | TĂNĂSESCU A. Colonel. — Str. Frumoasă, 54. Bucureşti 2. |
| 127 | 1928, Mai 9 | TĂNĂSESCU A. TUDOR. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Conferenţiar la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Salvator, 37. Bucureşti 6. |
| 128 | 1900, Noem. 1 | TEODORESCU V. Profesor la Liceul Naţional şi Liceul Militar din Iaşi. — Str. Elena Doamna, 39. Iaşi |
| 129 | 1911, Mai 18 | TEODORESCU N. N. Inginer Inspector General. — Str. Aurel Vlaicu, 22. Bucureşti 3. |
| 130 | 1929, Aug. 28 | TEODORU D. RADU. Inginer-Şef. — Director la Direcţia Generală a exploatării monopolurilor. — Piaţa Lahovary, 1. Bucureşti 3. |
| 131 | 1910, Mai 20 | THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici. — Directorul Institutului „Schewitz-Thierrin". — Str. Scaune, 33. Bucureşti 1. |
| 132 | 1921, Aug. 31 | ŢINO O. Doctor în Matematici. — Senator. Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara. Profesor la Seminarul Pedagogic din Bucureşti. — Str. Ismail, 16. Bucureşti 4. |
| 133 | 1929, Oct. 30 | ŢIŢEICA GABRIELA. Licenţiată în Matematici, Inginer. — Asistentă la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti.—Str. Dionisie, 80. Bucureşti. |
| 134 | 1895, Noem. 1 | ŢIŢEICA GH. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Secretar general al Academiei Române. Profesor la Facultatea de Ştiinţe şi la Şcoala Politecnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Profesor agreat la Sorbona. — Str. Dionisie, 80. Bucureşti, 3. |
| 135 | 1919, Sept. 12 | ULESCU AL. Inginer. — Director la Fabrica I. A. R. — Str. General Dona, 11. Bucureşti 2. |
| 136 | 1914, Dec. 10 | VARDALA I. Inginer Inspector General.—Director General al Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe Apă. — B-dul Tacke Ionescu, 38. Bucureşti 4. |
| 137 | 1927, Mai 11 | VASILACHE I. Inginer-Şef. — Profesor şi Subdirector al Şcoalei Superioare de Arte şi Meserii din Bucureşti. — Str. Polizu, 11. Bucureşti 2. |

| | | |
|---|---|---|
| 138 | 1927, Mai 11 | VASILESCU FL. Doctor în Matematici. — Str. Eroului, 19. Bucureşti |
| 139 | 1923, Mart. 26 | VASILESCU GR. Inginer. — Str. Costache Negri, 21. Bucureşti 6. |
| 140 | 1920, Ian. 10 | VASILESCU G. I. Inginer-Şef. — Director General al Regiei Conductelor de Petrol ale Statului. — Calea Griviţei, 46. Bucureşti. |
| 141 | 1927, Aug. 26 | VASILIU M. Inginer. — Asistent la Şcoála Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Vaselor, 70. Bucureşti 4. |
| 142 | 1924, Ian. 30 | ZAMFIRESCU GRIGORE. Inginer. Diplomat S. N. P. S. Bucureşti 1921 şi E. S. A. Paris 1922.—Industriaş, constructor de avioane, proprietarul fabricei de avioane „SET".—Domiciliu: Parcul Ferdinand, Str. F, 105. Birou: Str. Popa Lazăr, 13—15. Tel. 253/49. Bucureşti. |
| 143 | 1920, Sept. 28 | ZAPAN GH. Avocat.—Profesor şi Avocat.—Berlin-Charlottenburg, Dernburgstr 26. |
| 144 | 1921, Mai 4 | ZAPAN GRIGORE. Căpitan.— Inginer de construcţii Aeronautice şi Mecanice. Inginer hotarnic. Inginer la Arsenalul Aeronauticei. Profesor de Matematici. — Légation de Roumanie. 17, rue Brémontier, Paris (17-e). |
| 145 | 1925, Aug. 26 | ZLATCU ST. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politechnică din Zürich. — Antreprenor — Str. Pasteur, 8. Tel. 336/54. Bucureşti 6. |

†

## MEMBRII DECEDAŢI *)

| | Data admiterii | Data morţii |
|---|---|---|
| 1. ALEXANDRESCU T. I. | 1928 Mai 9 | 1930 Sept. 5 |
| 2. ALEXANDRINI O. | 1895 Noemb. 15 | 1905 Sept. 6. |
| 3. BALABAN V. | 1895 Sept. 15 (fondator) | 1895 Sept. 22. |
| 4. CRISTESCU V. | 1895 Sept. 15 (fondator) | 1929 Martie 10. |
| 5. DAVIDESCU EM. | 1895 Sept. 15 (fondator) | 1905 Aug. 28. |
| 6. DORDEA TR. | 1928 Ian. 26 | 1930 Apr. 30. |
| 7. ERBICEANU C. | 1898 Sept. 15 | 1904 Apr. 3. |
| 8. EVOLCEANU V. | 1927 Ian. 28 | 1928 Oct. 19. |
| 9. LALESCU TR. | 1905 Mart. 1 | 1929 Iunie 15. |
| 10. MOŢOI I. | 1906 Apr. 1 | 1929 Ian. 16. |
| 11. NĂSTURAŞ D. | 1909 Noemb. 9 | 1930. |
| 12. NICOLAEVICI G. | 1909 Iunie 1 | 1917. |
| 13. NICOLESCU N. | 1895 Sept. 15 (fondator) | 1924 Mai 5. |
| 14. ROCO M. | 1895 Sept. 15 (fondator) | 1931 Ian. 5. |
| 15. ROŞU AL. | 1910 Iunie 21 | 1917 Apr. 17. |
| 16. SALIGNY A. | 1914 Dec. 9 | 1925 Iunie 17. |
| 17. TEODOR D. I. | 1906 Apr. 1 | 1924 Iulie 30. |
| 18. TEODORESCU I. S. | 1914 Iunie 12 | 1918 Dec. 22. |
| 19. ZOTTU I. G. | 1895 Sept. 15 (fondator) | 1902 Iulie 8. |

*) Aci sunt trecuţi numai redactorii şi membrii, cari au stat la *„Gazeta Matematică"* până la sfârşitul vieţii lor, în ordine alfabetică.

# PREMIILE ŞI ALTE DISPOZIŢIUNI ALE FONDURILOR „GAZETEI MATEMATICE“

PENTRU

## CURSUL ANULUI 1931—1932

*(1 Septemvrie 1931 — 31 August 1932)*

In conformitate cu dispoziţiunile art. 11 din Regulamentul general al fondurilor «Gazetei Matematice», subsemnaţii membri ai Comisiunii pentru controlarea gestiunii acestor fonduri şi pentru privigherea la îndeplinirea prevederilor regulamentare ale fiecărui fond, desemnaţi în adunarea generală care a avut loc în ziua de 31 August 1930, aducem la cunoştinţă următoarele:

1. Din venitul anual al fondului SPIRU G. HARET, conform regulamentului pentru administrarea lui publicat în «Gazeta Matematică» vol. XXVI, pag. 108, urmează să se cumpere cărţi de matematici pure şi aplicate (literatură matematică, istoria matematicilor, varietăţi şi curiozităţi matematice, aparate şi modele matematice etc.) care să se doneze bibliotecilor şcolare dela şcoli secundare sau corespondenţilor merituoşi, elevi ai acestor şcoli.

Cărţile se vor distribui între începutul anului şcolar şi vacanţa Crăciunului.

In baza hotărîrii luate de adunarea generală dela 28 August 1931, cărţile de felul celor enumerate mai sus, cumpărate din venitul anului expirat, s'au destinat să se doneze liceului din Sighet.

2. Din venitul fondului LT.-COL. G. TĂNĂSESCU, al cărui regulament a fost publicat în «Gazeta Matematică» vol. XXVIII, pag. 19, urmează să se dea cărţi de matematică, primului clasificat la concursurile anuale ale «Gazetei Matematice».

3. Premiul bienal Inginer H. CAPRIEL în valoare de 500 lei pentru lucrări de matematici superioare sau pure aplicate se acordă lucrărilor ce se vor prezentà societăţii de către: studenţii Universităţilor, elevii şcolilor Politechnice sau de către elevii şcolilor de Artilerie, Geniu şi Marină din ţară.

Regulamentul acestui premiu a fost publicat în «Gazeta Matematică» anul XVII, pag. 361.

Subiectul lucrării pentru premiul pe anul 1932 s'a publicat în «Gazeta Matematică» anul XXXVI, numărul 9 (pe luna Maiu).

Lucrările trebuesc trimise Societăţii cel mai târziu până la 1 Maiu 1932, iar rezultatul se va publică în numărul din Septemvrie 1932 al «Gazetei Matematice».

Premiul este indivizibil şi în cazul când nu se va găsi nici o lucrare meritorie, se va ţine un nou concurs.

4. Premiul VASILE CONTA în valoare de 200 lei, alimentat din fondurile «Gazetei Matematice» se acordă exclusiv pentru lucrări de filozofie matematică.

Regulamentul acestui premiu s'a publicat în «Gazeta Matematică» anul XXIX pag. 14.

Autorul trebuie să fie român şi să-şi fi făcut studiile secundare în ţară.

Lucrările trebuesc prezentate până la 1 Iulie ale fiecărui an şi în cazul când până la această dată nu s'a primit nici o lucrare, se va aşteptă data de 1 Iulie anul următor şi aşà mai departe.

Comisiunea care va examinà lucrările prezentate după 1, 2, 3, etc., ani va propune pentru premiere una sau două lucrări dintre cele mai bune, cu totalul sumelor strânse an cu an până la aceà dată, sumă care dacă intervalul e mai mare de un an, se va puteà divide între lucrările alese. Comisiunea însă va puteà să nu recomande nici una din lucrările prezentate.

Raportul Comisiunii însărcinate cu cercetarea lucrărilor se va supune desbaterilor Adunării generale extraordinare în cursul lunei Octomvrie, iar rezultatul se va publică în numărul din Noemvrie al «Gazetei Matematice».

5. Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare, în valoare de 200 lei, se acordă pentru cea mai bună publicaţiune de matematică la ştiinţele militare apărută în cursul fiecărui an.

Regulamentul acestui premiu a fost publicat în «Gazeta Matematică» anul XXXII pag. 9.

Autorul publicaţiunii trebuie să fie român sau să-şi fi făcut cultura matematică în ţară.

Premiul este indivizibil şi se acordă neapărat în fiecare an. In cazul când nu se găseşte nici o lucrare de premiat sau în cazul când autorul lucrării premiate nu voeşte a primì suma de 200 lei, ea se va da uneia din revistele în care se publică şi chestiuni de ştiinţă matematică aplicate la ştiinţele militare.

Comisiunea însărcinată cu examinarea publicațiunilor militare apărute prin reviste sau cărți speciale, pânăla 1 Septemvrie anul trecut, precum și manuscrisele ce s'ar aduce la cunoștința societății până la acea dată, va întocmi un raport ce se va supune desbaterilor Adunării generale extraordinare în cursul lunii Ianuarie.

Premiul se va anunță în numărul ce apare în luna Martie și se va acordà lucrării premiate după apariția numărului.

6. Din fondul «ANGHEL SALIGNY» destinat tipăririi bibliotecii tehnice a «Gazetei Matematice» nu se va tipări nimic, suma fiind angajată în publicațiunile ce au apărut din acest fond.

7. Din fondurile bibliotecii «Gazetei Matematice», deasemenea nu se va puteà tipări nici o lucrare, ele fiind angajate în lucrările publicate.

COMISIUNEA PENTRU PREMII:

IOAN BUȘILĂ, A. SĂLĂGEANU.

---

## *O PROPRIETATE A TREI DREPTE CONCURENTE TĂIATE DE O TRANSVERSALĂ

**Teoremă.** *Dacă trei drepte concurente* AB, AC, AD *sunt tăiate de o transversală în punctele* B, C, D, *raportul dublu:*

$$(BD/CD) : (BA/CA)$$

*nu depinde de poziținea transversalei.*

Triunghiurile ABD și ACD au același vârf A și bazele respective pe aceiaș dreaptă BC. Ele au deci aceiaș înălțime pornind din A și deci ariile lor sunt proporționale cu bazele lor. Avem deci:

$$\text{aria } ABD/\text{aria } ACD = BD/CD.$$

Dacă ducem din D perpendicularele DB' și DC' pe AB și CD avem:

$$\text{aria } ABD = \tfrac{1}{2}\, AB \times B'D \quad , \quad \text{aria } ACD = \tfrac{1}{2}\, AC \times C'D.$$

Inlocuind în relația precedentă ariile prin valorile lor, găsim:

$$(AB \times B'D)/(AC \times C'D) = BD/CD,$$

care se poate scrie:

$$(BD/CD) : (BA/CA) = B'D/C'D.$$

Prima parte e raportul dat în enunțul teoremei; a doua arată raportul distanțelor dela un punct D al dreptei AD la laturile AB, AC ale triunghiului BAC. Se vede că acest raport nu depinde de direcțiunea în care ducem dreapta BC prin D. El nu depinde nici de poziținea lui D pe AD, căci dacă luăm un alt punct $D_1$ pe această dreaptă și ducem din el perpendicularele $D_1B_1$ pe AB și $D_1C_1$ pe AC, triunghiurile ABD, $AB_1D_1$ de o parte și ACD, $AC_1D_1$ de alta, având unghiurile din A comune și fiind dreptunghice, sunt asemenea și ne dau:

$$B_1D_1/BD = AD_1/AD, \quad C_1D_1/CD = AD_1/AD,$$
$$\therefore \quad B_1D_1/BD = C_1D_1/CD,$$
$$\therefore \quad B_1D_1/C_1D_1 = BD/CD.$$

Raportul distanțelor lui D la dreptele AB, AC nu se schimbă când acest punct se mișcă pe AD. Deci raportul dublu considerat rămâne invariabil, oricare ar fi orientarea și poziținea transversalei BCB.

Cu ajutorul acestei teoreme se poate demonstrà ușor unele teoreme și rezolvà diferite probleme. Iată aci câte-va exemple.

1. **Problema 1912** (rezolvată în *Gazeta Matematică*, Anul XIX pag. 153) se poate rezolvà ușor cu această teoremă:

*Fiind dat un triunghiu* MAB, *se ia dela* M *spre* A *și* B *pe laturile* MA, MB *lungimile* MC = p . MA *și* MD = q . MB, *unde* p *și* q *sunt două numere date. Să se arate că dreapta care unește* M *cu mijlocul lui* CD *taie pe* AB *în un punct fix, oricare ar fi poziția lui* M *față de* A *și* B.

Fie N mijlocul lui CD și P intersecția lui MN cu AB. Dreptele tăiate de transversalele AB, CD ne dau:

$$\frac{PA}{PB} : \frac{AM}{BM} = \frac{NC}{ND} : \frac{CM}{DM},$$

și cum NC = ND, MC = $p$ . MA, MD = $q$ . MB, înlocuind ne rămâne:

$$PA/PB = q/p,$$

ceeace arată că P e fix pe AB, când M se mișcă.

2. In **Exercices de géométrie** par F. G. M., pag. 530 se demonstrează teorema următoare:

*Mediana* $AA_1$ *a unui triunghiu oarecare* ABC *taie coarda unui arc* B'C' *cuprins între laturile triunghiului şi descris din* A *ca centru în două părţi al căror raport este invers cu al laturilor* AB, AC.

Fie I intersecţia dreptelor $AA_1$, B'C'. Dreptele concurente tăiate de transversalele BC şi B'C' ne dau:

$$\frac{A_1B}{A_1C} : \frac{AB}{AC} = \frac{B'I}{C'I} : \frac{B'A}{C'A}$$

şi cum $A_1B = A_1C$, $AB' = AC'$, ne rămâne:

$$(B'I/C'I) = (AC/AB).$$

3. *Fie triunghiul* ABC. *Luăm punctul* B' *pe* AC *şi* C' *pe* AB *aşà că:*

$$B'C/B'A = m/n \quad , \quad C'B/C'A = p/q.$$

*Dreptele* BB', CC' *se taie în* I. *In ce raport împarte* I *aceste drepte?*

Dreptele CB, CC', CA tăiate de transversalele BA, BB' ne dau:

$$\frac{BC'}{AC'} : \frac{BC}{AC} = \frac{BI}{B'I} : \frac{BC}{B'C} .$$

Dar:

$$BC'/AC' = p/q \quad , \quad AC/B'C = (m + n)/m.$$

Inlocuind găsim:

$$BI/B'I = p/q \,.\, [1 + (n/m)].$$

Ca aplicaţiune a acestei relaţii să găsim în ce raport împarte mediana centrul de greutate al triunghiului. E destul a face $m/n = 1$ şi $p/q = 1$ şi găsim că raportul BI/B'I este 2. *Deci centrul de greutate divide medianele în raportul* 2/1, *pornind dela vârf spre bază.*

Dacă transversalele sunt bisectoarele triunghiului, atunci $m/n = a/c$ şi $p/q = a/b$. Se găseşte raportul $BI/B'I = (a + c)/b$.

4. *Fie* $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ *trei drepte concurente duse prin vârfurile triunghiului (trei ceviene) şi* $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$ *alte trei drepte concurente. Acestea trei din urmă taie dreptele* $B_1C_1$, $A_1C_1$, $A_1B_1$ *respectiv în* A', B', C'. *Dreptele* $A_1A'$, $B_1B'$, $C_1C'$ *sunt concurente.*

Aplicăm teorema la dreptele AB, AC, $AA_2$ eşite din A cu transversala $B_1C_1$; apoi la dreptele BC, BA şi $BB_2$ eşite din B cu

transversala C'A' şi în fine la dreptele CA, CB, $CC_2$ eşite din C cu transversala A'B.

Găsim relaţiunile:

$$\frac{A_2B}{A_2C}:\frac{AB}{AC}=\frac{A'C_1}{A'B_1}:\frac{AC_1}{AB_1};\frac{B_2C}{B_2A}:\frac{BC}{BA}=\frac{B'A_1}{B'C_1}:\frac{BA_1}{BC_1};\frac{C_2A}{C_2B}:\frac{CA}{CB}=\frac{C'B_1}{C'A_1}:\frac{CB_1}{CA_1}.$$

Să înmulţim aceste egalităţi termen cu termen. Găsim:

$$\left(\frac{A_2B\times B_2C\times C_2A}{A_2C\times B_2A\times C_2B}\right):\left(\frac{AB\times BC\times CA}{AC\times BA\times CB}\right)$$

$$=\left(\frac{A'C_1\times B'A_1\times C'B_1}{A'B_1\times B'C_1\times C'A_1}\right):\left(\frac{AC_1\times BA_1\times CB_1}{AB_1\times BC_1\times CA_1}\right) \quad (1)$$

Observăm că a doua parenteză se reduce la — 1, căci factorii dela numărătorul şi dela numitorul ei sunt aceiaşi. Prima parenteză este — 1, deoarece în triunghiul ABC dreptele $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$ sunt concurente şi după teorema lui CEVA produsul dela numărător este egal cu cel dela numitor. Ultima parenteză este deasemenea egală cu — 1, căci în triunghiul ABC dreptele $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ sunt concurente. Rămâne atunci, din egalitatea precedentă, că a treia parenteză să fie şi ea — 1. Aceasta cere egalitatea produselor dela numărător şi numitor. După reciproca teoremei lui CEVA, aceasta arată că în triunghiul $A_1B_1C_1$ dreptele $A_1A'$, $B_1B'$, $C_1C'$ sunt concurente, c. c. e. d. d.

5. *Un cerc taie laturile* BC, CA, AB *ale unui triunghiu* ABC *în* $A_1$, $A_2$; $B_1$, $B_2$; $C_1$, $C_2$ *aşezate în această ordine pe cerc. Fie* A', B', C' *intersecţiunile lui* $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$ *respectiv cu* $B_1C_1$, $C_1A_1$, $A_1B_1$. *Dreptele* $A_1A'$, $B_1B'$, $C_1C'$ *sunt concurente.*

Se stabileşte întocmai ca mai sus egalitatea (1) şi se deduce că a doua paranteză este — 1. Rezolvăm egalitatea în raport cu a treia paranteză şi punem partea a doua sub forma următoare:

$$\frac{A'C_1\times B'A_1\times C'B_1}{A'B_1\times B'C_1\times C'A_1}=\left(\frac{BA_1\times BA_2}{BC_1\times BC_2}\right)\cdot\left(\frac{CB_1\times CB_2}{CA_1\times CA_2}\right)\cdot\left(\frac{AC_1\times AC_2}{AB_1\times AB_2}\right).$$

Dar cele trei parenteze din partea a doua a egalităţii sunt toate egale cu 1, deoarece numărătorii sunt egali cu numitorii după propietatea secantelor $BA_1A_2$, $BC_1C_2$, $CB_1B_2$, $CA_1A_2$, $AC_1C_2$, $AB_1B_2$ duse din B, C, A la un cerc. Rămâne dar că prima parte a egalităţii este — 1, de unde conchidem, ca la Nr. 4, că dreptele $A_1A'$, $B_1B'$, $C_1C'$ sunt concurente.

GH. ZAPAN.

# NOTE MATEMATICE

*1. *O soluţie practică a problemei 1364.* In această problemă D-l I. Ionescu cere să se determine numai cu compasul diametrul unei bare cilindrice cu capetele rupte neregulat. O soluţie practică, ca şi cele date în Anul XXXVI al *Gazetei Matematice*, este şi următoarea:

Luăm un compas cu muchiile interioare ale picioarelor plane, îl deschidem aşà fel ca să-l putem încălecà peste bară. Prin râcâire sau prin vopsea se determină contactele dintre bară şi picioarele compasului. Lăsăm compasul în starea aceasta, îl aşezăm pe o hârtie pusă pe o planşetă, trasăm două drepte în lungul feţelor interioare ale picioarele şi notăm pe ele punctele de contact de care am vorbit. Dacă pe acele drepte în punctele de contact ridicăm perpendiculare, ele se vor intersectà, la distanţe de liniile trasate, egale cu raza barei. Dublând raza găsim diametrul cerut al barei.

Se poate obiectà că în această construcţie picioarele barelor ţin locul de rigle. Putem însă să nu tragem nici o dreaptă dacă ne servim de un al doilea compas. După ce am aşezat compasul pe planşetă notăm, cu vârful compasului al doilea, punctele de contact C, C'. Din ele luate ca centre, descriem două arce cu aceeaş rază, care ating picioarele compasului de pe planşetă în A, B şi în A', B'. Ridicăm primul compas de pe planşetă şi cu al doilea compas descriem din A şi B două arce de cerc care se taie, între ramurile primului compas, în M şi în afară în N. Facem acelaş lucru din A' şi B' şi găsim punctele analoage M' şi N'. De regulă M nu coincide cu M'. Mărind sau micşorând raza cu care am descris arcele, ajungem prin încercări să aducem pe M în coincidenţă cu M'. In acest caz MN = MN' este diametrul barei cilindrice.

A. I. M.

E bine înţeles că soluţia matematică a problemei este încă aşteptată.

I. I.

*2. *Asupra exerciţiului din Anul XXXV, pag. 196.* In prima parte se cereà să se arate că numerele 81, 9081, 990881,... sunt patrate. Proprietatea este cunoscută. In *Gazeta Matematică*, Anul VII pag. 167 a fost pusă ca problemă propusă sub Nr. 655. Acolo se

spune că proprietatea e menţionată de arabul IBN-AB-BAMMA în secolul XIII, în cartea sa TALKHIS AMALI AL KISSAB.

H. P. IONESCU.

*3. *Asupra exerciţiului 49 din Anul XXXIII.* Dintre soluţii lipseşte numărul prim 1999.

Soluţiile de forma *aaab* sunt: 1117, 2221, 3331, 4441, 5557, 6661, 8887, 9997.

AL. A. ROŞU.

4. *Asupra patratelor perfecte de 7 şi 8 cifre.*
Următoarele patrate conţin grupe de cifre identice:

*a)* o grupă de 4 cifre:

$\overline{1291}^2 = 1666681$
$\overline{1609}^2 = 2588881$
$\overline{1633}^2 = 2666689$
$\overline{2582}^2 = 6666724$
$\overline{2848}^2 = 8111104$

$\overline{3496}^2 = 12222016$
$\overline{3944}^2 = 15555136$
$\overline{4166}^2 = 17355556$
$\overline{4585}^2 = 21022225$
$\overline{4714}^2 = 22221796$
$\overline{5164}^2 = 26666896$
$\overline{5415}^2 = 29322225$
$\overline{5696}^2 = 32444416$

$\overline{5774}^2 = 33339076$
$\overline{6101}^2 = 37222201$
$\overline{6245}^2 = 39000025$
$\overline{6253}^2 = 39100009$
$\overline{6992}^2 = 48888064$
$\overline{7071}^2 = 49999041$
$\overline{7303}^2 = 53333809$
$\overline{7746}^2 = 60000516$
$\overline{8332}^2 = 69422224$
$\overline{8334}^2 = 69455556$
$\overline{8544}^2 = 72999936$
$\overline{8557}^2 = 73222249$
$\overline{8819}^2 = 77774761$
$\overline{9428}^2 = 88887184$

*b)* trei grupe de 2 şi 3 cifre:

$\overline{3338}^2 = 11142244$
$\overline{3415}^2 = 11662225$
$\overline{6650}^2 = 44222500$

$\overline{6670}^2 = 44488900$
$\overline{8167}^2 = 66699889$
$\overline{9424}^2 = 88811776$

VIRGILIU C. POPESCU
(Toulouse).

*5. *Asupra problemei 3951.*

Produsul falş 154073,84064 se poate sporì cu mult mai puţin decât s'a găsit la pagina 393 vol. XXXVI şi totuşi problema să fie posibilă dar să nu mai fie certă, dacă presupunem că la produsul falş se şterg nulele dela dreapta părţii zecimale.

Pentru aceasta este suficient a căutà numărul imediat superior lui 15407384064 care se divide exact prin cel mai mic multiplu comun al numerilor $3 \times 443$ şi $3 \times 167$ (iar nu al numerilor $2^4 . 3 . 443$ şi $2^6 . 3 . 167$) adică 221943. Se găseşte *154075,05003.* In adevăr:

$$154075{,}05003 : 21{,}264 = 7245{,}816875$$

$$154075{,}05003 : 32{,}064 = 4805{,}23484375$$

şi $$154075{,}05003 - 154073{,}84064 = 1{,}20939.$$

Este de remarcat că ne putem apropià şi mai mult dacă căutăm numărul imediat superior lui $15407384064 \times 10^n$ ce se împarte exact cu 221943, dar în acest caz noul produs falş va aveà mai multe zecimale.

I. B. Fl.

## BIBLIOGRAFIE

**Anales de la Sociedad Cientifica Argentina.** Tomul CXI. Fascicola VI. Iunie 1931. Buenos Aires.

**Boletin Matematico.** Anul IV. No. 3. Mai 1931, Buenos Aires. Inginerul Don José S. Corti. A 70-a aniversare. Viitorul Buletinului Matematic, de B. I. Baidaff. Răspunsuri la intrebarea din ultimul număr.

**Sphinx.** *Revue mensuelle des questions récréatives.* Director M. Kraitchik. Rue Philippe Baucq. Bruxelles. Anul I. No. 7 Iulie 1931. Conţine şi jocuri şi recreaţiuni matematice.

**Revista matematică din Timişoara.** Anul XI. No. 6. August 1931. Timişoara. Câteva identităţi trigonometrice de T. Marsieu.

## CERERI

209. *Răspuns la cererea 202.* Prin acea cerere întrebam cum zic ţăranii noştri, dogari şi rotari, la *compas.* Nu am primit nici un răspuns. Iată însă câteva indicaţiuni.

In comuna Valea Călugărească din județul Prahova dogarii zic *pas*, iar a măsură cu compasul distanțe egale zic *a păsui*.

In «*Vocabulaire français-valaque*» tipărit în „Boucourest" la 1840 de P. Poyenar, F. Aaron și G. Hill găsim:

«*Compas*. s. m. *compas, perghel, țărcălău, capra dogarului*».

In «*Incercare de terminologie poporană română*» Frédéric damé arată că dogarii noștri zic *pas, pasnic* sau *capră*. La picioarele compasului zic *craci*, iar la arcul care fixează deschiderea *arc, arcuș, coardă* sau *punte*. Numirile de *pas* și *pasnic* le întrebuințează și dulgherii.

Unii ferari zic, după cuvântul german, *țircăl*.

I. Ionescu.

## PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1500. *Să se găsească longitudinea* $\lambda$ *a soarelui în ziua când într'un loc de latitudine boreală dată* $\lambda$, *încep zorile la* m *ore după sfârșitul amurgului. Care e locul punctelor de pe pământ pentru care putem avea* $m = 0$ *și în ce semne zodiacale se mișcă soarele în acest caz? Inclinarea elipticei pe ecuator e* $23^0 27' 15''$.

S. Mirea.

*Soluție* dată de D-l C. Avramescu.

$\omega$, $l$, $\alpha$, $\delta$ fiind respectiv înclinarea eclipticei, longitudinea soarelui, coordonatele ecuatoriale, vom avea:

$$\operatorname{tg} l \cdot \cos\omega = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}\delta = \sin\alpha \operatorname{tg}\omega.$$

De unde scot:

$$\operatorname{tg} l = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\omega} \qquad (1)$$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\omega}; \qquad (2)$$

dar știu:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}},$$

vom avea:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\omega - \operatorname{tg}^2\delta}}$$

şi (1) devine:

$$\operatorname{tg} l = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\omega - \operatorname{tg}^2\delta}}. \qquad (2')$$

În (2') nu cunosc pe $\delta$, care e dat de formula:

$$\cos y = -\operatorname{tg}H \operatorname{tg}\delta - \frac{\sin 18^0}{\cos\delta \cos H} \qquad (1')$$

unde $y$ exprimă numărul de ore de când încep zorile. Chiar (1') defineşte zorile.

Apoi $18^0$ este momentul unde se găseşte soarele că zorile şi amurgul încep şi sfârşesc.

In cazul nostru:

$$H = \lambda \quad \text{şi} \quad y = \frac{15m}{2},$$

căci ştim că

$$y = \frac{2}{15} \operatorname{arc}\cos(-\operatorname{tg}H \operatorname{tg}\delta)$$

şi (1') devine:

$$-\cos\frac{15m}{2} = \operatorname{tg}H \operatorname{tg}\delta + \frac{\sin 18^0}{\cos\delta \cos H},$$

sau

$$\cos\frac{15m}{2}\cos\delta\cos H = \sin H \sin\delta + \sin 18^0.$$

$$\cos\frac{15m}{2}\cos\delta\cos\lambda = \sin\lambda \sin\delta + \sin 18^0. \qquad (3)$$

$$\operatorname{tg} l = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos\omega} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\omega - \operatorname{tg}^2\delta}} \qquad (4)$$

(3) şi (4) ne dau longitudinea soarelui căutată. Dacă fac acum în $m = 0$ voiu obţine:

$$\cos(\lambda + \delta) = \sin 18^0 = 0{,}309$$

$$\lambda + \delta = 72;$$

de unde:

$$\lambda = 72^0 - \delta.$$

Determinând pe $\delta$ din (3), (4), obţin valoarea căutată a lui $\lambda$.

PROBLEMA 1799. *Admiţând că orbitele a două planete sunt cercuri cu centrul în Soare, se cere să se găsească expresiunea vitezei uneia din planete, cunoscând viteza celeilalte pe orbita ei şi forţele de atracţiune newtoniene corespunzătoare.*

*Aplicaţie pentru Pământ şi Marte.*

S. MIREA.

*Soluţie* dată de D-nii: S. MARCELINO şi MIHAIL N. GHERMĂNESCU.

Fie $F_1$, $F_2$, $v_1$, $v_2$, $m_1$, $m_2$, $r_1$, $r_2$ respectiv forţele de atracţiune, vitezele, massele şi razele celor 2 planete.

Ştim că forţa de atracţiune e dată:

$$(1) \qquad F_1 = \frac{um_1}{r_1^2} \qquad F_2 = \frac{um_2}{r_2^2}$$

şi vitezele sunt date de:

$$(2) \qquad v_1^2 = \frac{u}{r_1} \qquad v_2^2 = \frac{u}{r_2}$$

$u$ fiind o constantă egală cu 0,0002959.

Din (2) avem:

$$r_1 v_1^2 = r_2 v_2^2 \qquad (3)$$

şi din (1)

$$\frac{r_1^2 F_1}{m_1} = \frac{r_2^2 F_2}{m_2}$$

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{F_2}{F_1} \qquad (4)$$

(3) îmi dă:

$$\frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

(4) devine:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt[4]{\frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{F_2}{F_1}}$$

de unde:

$$v_2 = v_1 \sqrt[4]{\frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{F_2}{F_1}}$$

$v_1$ fiind cunoscut.

*Aplicaţie :*

$m_1$ massa pământului e dată :

$$m_1 = 5784 \times 10^{20} \frac{\text{kgr sec}^2}{m} .$$

$F_1$ forţa de atracţiune :

$$F_1 = 1337 \times 10^{17} \text{ kgr}$$

în acelaş mod am aveà pentru Marte ; dar să mă servesc de (4) :

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{F_2}{F_1}$$

unde :

$$r_1 = 149.501.000$$

$$r_2 = 149.501.000 \times 1{,}5237$$

deci :

$$\frac{m_1 . F_2}{m_2 . F_1} = \frac{1}{1{,}5237}$$

şi din :

$$v_1 = \sqrt{\frac{u}{r_1}} = \sqrt{\frac{0{,}0002959}{149.501.000}}$$

şi atunci :

$$v_2 = \sqrt{\frac{0{,}0002959}{149.501.000}} \sqrt[4]{\frac{1}{1{,}5237}} .$$

care îmi dă valoarea lui $v_2$.

---

PROBLEMA 1808. *La ora* $T = 6^{ore}$ *timp adevărat s'a observat cu teodolitul într'un loc oare care distanţa zenitală* G *a Soarelui în ziua când umbra minimă aruncată pe pământ de construcţiuni a fost egală cu înălţimea lor.*

*Cunoscând înclinarea eclipticei pe ecuator :*

$$\omega = 23^0 . 27'$$

*se cere :*

*1) Să se găsească latitudinea locului.*

*2) Să se afle zona depe pământ pentru care fenomenul este posibil.*

ST. N. MIREA.

Fie $\delta$ declinația Soarelui și H latitudinea locului.

1. Se știe din gnomonică relațiunea care există între lungimea umbrei meridiane $l$ și înălțimea $h$. Această relație este:

$$l = h \operatorname{cotg} (\delta + H) \qquad H = \delta + z.$$

In ziua în care s'a făcut observația, declinația Soarelui a satisfăcut deci egalitatea:

$$\operatorname{cotg} (\delta + H) = 1,$$

sau:

$$\delta = \frac{\pi}{4} - H.$$

Din triunghiul Zenit, Pol, Soare deducem că unghiul orar $t$ al Soarelui este de $90^0$ deoarece observația a fost făcută la ora $6^{ore} . 0' . 0''$ timp adevărat.

Putem deci scrie în triunghiul dreptunghic ZPS:

$$\cos\xi = \sin H \sin\left(\frac{\pi}{4} - H\right).$$

Ecuația problemei este deci ecuația bipătrată:

$$2\sin^4 H + (2\sqrt{2}\cos\xi - 1)\sin^2 H + 2\cos^2\xi = 0,$$

care ne dă soluțiile cu condițiunile necesare de realitate și admisibilitate.

2. Se știe că declinațiunea Soarelui este cuprinsă între limitele:

$$-23^0 . 27' \leqslant \delta \leqslant +23^0 . 27'.$$

Trebue deci să avem:

$$-23^0 . 27' \leqslant \frac{\pi}{4} - H \leqslant +23^0 . 27',$$

ceeace dă:

$$21^0 . 33' \leqslant H \leqslant 68^0 . 27', \qquad (1)$$

fenomenul nu este deci posibil decât în emisferul boreal.

*Discuție.*

Pentru realitatea soluțiilor în $\sin^2 H$ trebue să avem:

$$(2\sqrt{2}\cos\xi - 1)^2 - 16\cos^2\xi \geqslant 0,$$

sau:

$$8\cos^2\xi + 4\sqrt{2}\cos\xi - 1 \leqslant 0,$$

ceeace dă imediat:

$$-\frac{2+\sqrt{2}}{4} \leqslant \cos\xi \leqslant \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Dacă observăm că distanța zenitală $0 \leqslant \xi \leqslant 90^0$, putem scrie șirul precedent sub forma:

$$0 \leqslant \cos\xi \leqslant 0{,}14645,$$

sau:

$$90^0 \geqslant \xi \geqslant 81^0 . 34' . 47'', 40. \qquad (2)$$

In aceste condițiuni

$$\sin^2 H = \frac{1 - 2\sqrt{2}\cos\xi + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}\cos\xi - 8\cos^2\xi}}{8}. \qquad (3)$$

Din cele spuse rezultă că în intervalul (2) avem:

$$1 - 2\sqrt{2}\cos\xi > 0,$$

ceeace însemnează că ambele semne sunt admisibile înaintea radicalului. In fine, dacă observăm că numărătorul membrului al doilea al relației (3) este totdeauna mai mic decât 2 suntem conduși la concluzia că în condițiile (1) și (2), problema admite în general două soluțiuni.

*Exemplu.* Să luăm spre exemplu $\xi = 85^0$. Avem: $\cos\xi = 0{,}08716$

$$\sin^2 H = \frac{1-2\sqrt{2}\times 0{,}08716 \pm \sqrt{1-4\sqrt{2}\times 0{,}08716 - 8\times 0{,}08716^2}}{8} = \frac{0{,}7538 \pm \sqrt{0{,}44618}}{8}$$

ceeace face efectuând:

$$\sin^2 H = 0{,}17768 \quad \text{și} \quad \sin^2 H = 0{,}01069 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \sin H = \pm 0{,}42152 \quad \text{și} \quad \sin H = \pm 0{,}10339$$

$$\therefore \quad H = +24^0 . 54' . 10'', 8 \quad H = +5^0 . 50' . 56'', 4 \text{ (străin)}$$

Locul este deci situat la o latitudine:

$$H = 24^0 . 54' . 10'', 8$$

A rezolvat problema D-l S. MARCELINO.

O schiță a soluției se găsește în Culegerea de probleme de Geom. Descr. și Cosmogr. pag. 74.

PROBLEMA 3986. *Din rezolvarea şi discuţia ecuaţii în* x

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + ax + 1} = y$$

*să se găsească maximul şi minimul lui* y, a *fiind un parametru variabil. Să se determine* a, *astfel ca maximul lui* y *să fie* $\frac{7}{3}$ *şi să se găsească valoarea corespunzătoare a lui* x. *Să se figureze, fără ajutorul derivatelor, curba reprezentativă a variaţii lui* y *în acest caz particular.*

N. ABRAMESCU.

*Soluţie* dată de D-ra E. ANTONIU şi D-nii: VASILE VASU, M. VELEA (Studenţi Cluj), SUB.-LT. I. G. ZAMFIRESCU.

Ecuaţia în $x$ este

$$(1) \qquad x^2(1-y) - x(1+ay) + y - 2 = 0,$$

care are rădăcinile

$$(2) \quad x_{1,2} = \frac{1 + ay \pm \sqrt{(a^2-4)y^2 + 2(a+6)y - 7}}{2(1-y)}.$$

Pentru a fi reale, trebuie să avem

$$(3) \qquad \Delta = (a^2-4)y^2 + 2(a+6)y - 7 \geqslant 0.$$

Rădăcinile ecuaţii $\Delta = 0$,

$$(4) \qquad (a^2-4)y^2 + 2(a+6)y - 7 = 0,$$

sunt

$$y_{1,2} = \frac{-(a+6) \pm 2\sqrt{2a^2+3a+2}}{a^2-4},$$

şi au valori reale; în adevăr, realizantul $2a^2 + 3a + 2$ egalat cu zero are rădăcini imaginare, este o sumă de pătrate, $2\left[\left(a+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right]$, semnul său depinde de coeficientul 2 al lui $a^2$, deci este pozitiv.

Să găsim valorile lui $y$ din (3) pentru care $\Delta \geqslant 0$. Suntem conduşi a studiă următoarele cazuri [1]):

1) A se vedeà pentru discuţia cazului general, *Curs complimentar de Algebră* de MANICATIDE revăzut şi adăugit de N. ABRAMESCU.

1°. $a^2 - 4 > 0$, adică $a < -2$, sau $a > 2$. Rădăcinile $y_1, y_2$ ale ecuației (4) sunt

$$y_1 = \frac{-(a+6) - 2\sqrt{2a^2+3a+2}}{a^2-4},$$

$$y_2 = \frac{-(a+6) + 2\sqrt{2a^2+3a+2}}{a^2-4},$$

și $y_1 < y_2$, de oarece $a^2 - 4 > 0$. Pentru ca $\Delta > 0$, trebuie să avem $y \leqslant y_1$, sau $y \geqslant y_2$, deci cea mai mică valoare pe care poate să o ia $y$ este $y_2$, iar cea mai mare $y_1$, astfel că $y_1$ este maximul lui $y$ și $y_2$ minimul.

2°. $a^2 - 4 < 0$. In acest caz trebuie să avem $y_2 < y < y_1$, deoarece $y_2 < y_1$ și $a^2 - 4 < 0$; deci $y_2$ este minimul lui $y$ și $y_1$ este maximul.

3°. $a^2 - 4 = 0$. Rădăcinile ecuații în $y$ sunt, pentru $a = -2$, $y = \frac{7}{8}$, iar pentru $a = 2$, $y = \frac{7}{16}$. Realizantul $\Delta$ este în aceste cazuri respectiv $a = -2$, $8y - 7$; $a = 2$, $16y - 7$; cum trebuie să avem $\Delta > 0$, urmează $8y - 7 > 0$, $16y - 7 > 0$, deci, respectiv $y > \frac{7}{8}$, $y > \frac{7}{16}$. Așa dar, în ambele cazuri, funcțiunea $y$ este minimă, căci $\frac{7}{8}$ și $\frac{7}{16}$ sunt cele mai mici valori ce le poate luă $y$.

4°. Pentru a vedeà care este valoarea lui $a$ pentru care maximul lui $y$ să fie $\frac{7}{3}$, va trebuì a scrie că această valoare este o rădăcină a ecuației (4), adică

$$(a^2-4)\left(\frac{7}{3}\right)^2 + 2(a+6)\frac{7}{3} - 7 = 0,\ 7a^2 + 6a - 1 = 0,$$

de unde $a = -1$, $a = \frac{1}{7}$. In cazul $a = -1$, rădăcinile $y$ ale ecuației (4) sunt 1 și $\frac{7}{3}$, deci 1 este cea mai mică, minimum, $\frac{7}{3}$ cea mai mare, adică maximum.

Pentru $a = \frac{1}{7}$, $y\,\max = y_1 = \frac{7}{3}$, $y\,\min = y_2 = \frac{7}{65}$.

Valorile corespunzătoare pentru $x$ sunt date de relaţia (2), $x = \frac{1+ay}{2(1-y)}$ şi avem

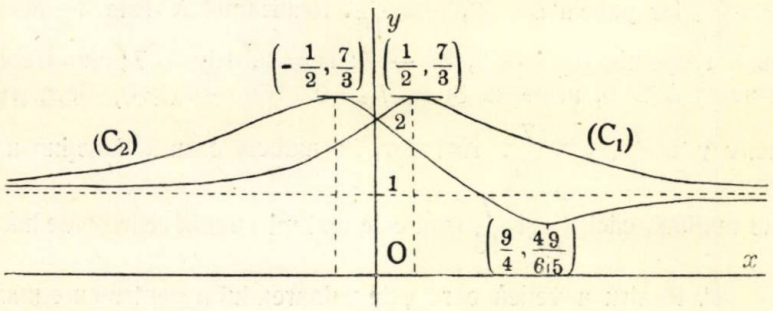
$$a = -1, y = \frac{7}{3} (\max), x = \frac{1}{2}, \; y = 1 \text{ (minim)}, \; x = \infty;$$

$$a = \frac{1}{7}, y = \frac{7}{3} (\max), x = -\frac{1}{2}, y = \frac{49}{65} \text{ (minim)}, x = \frac{9}{4}.$$

Funcţiunile de studiat sunt

$$a = -1, \; (C_1) \; y = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x + 1} \; ; \; a = \frac{1}{7}, \; (C_2) \; y = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + \frac{1}{7}x + 1}.$$

Numitorii $x^2 - x + 1$, $x^2 + \frac{x}{7} + 1$ având rădăcini imaginare, nu pot fi egali cu zero, $y$ nu devine infinit. Numărătorul $x^2 - x + 2$ de asemenea nu poate fi zero, ca având rădăcini imaginare, deci




$y$ nu se anulează. Pentru $x \to \infty$, $y = 1$, deci dreapta $y = 1$ este asimptotă la ambele curbe $(C_1)$ şi $(C_2)$. Studiul variaţii se vede pe figură şi tablourile alăturate.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | creşte | 2 | creşte | $\frac{7}{3}$ | max descr | 1 |

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $\frac{9}{4}$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | creşte | $\frac{7}{3}$ | max descr | 2 | descr | $\frac{49}{65}$ | min creşte | 1 |

Pentru $x = -\infty$, curba $(C_2)$ este deasupra curbei $(C_1)$, căci diferența valorilor lui $y$ este

$$\frac{x^2-x+2}{x^2+\frac{1}{7}x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x+1}=(x^2-x+2)\frac{-\frac{8x}{7}}{(x^2-x+1)(x^2+\frac{1}{7}x+1)}$$

și pentru $x \to -\infty$, această diferență este pozitivă, adică $y$ al curbei $(C_2)$ este mai mare ca $y$ al curbei $(C_1)$.

---

PROBLEMA 3997. *Din discuția ecuației în* x

$$\sqrt{ax^2-(a+3)x+3}=y$$

*să se determine maximul și minimul lui* y. *Să se determine* a *astfel ca maximul lui* y *să fie egal cu* 2 *și să se afle valoarea lui* x *corespunzătoare. Să se figureze curba reprezentativă a variației lui* y *fără derivate.*

N. Abramescu.

*Soluție* dată de D-nii: Chițu Marin (Liceul Giurgiu), Patraulea Radu (Liceul Militar, Tg.-Mureș), Puta Traian, Vasu Vasile (Studenți, Cluj), Sub.-Lt. I. G. Zamfirescu (Pitești).

Pentru ca $y$ să existe, trebuie ca $ax^2-(a+3)x+3 \geqslant 0$, $a(x-1)(x-\frac{3}{a}) \geqslant 0$. Când $a<0$, trebuie $\frac{3}{a}<x<1$; dacă $0<a<3$, trebuie $(x-1)(x-\frac{3}{a})>0$, $x<1$, sau $x>\frac{3}{a}$; când $a>3$, trebuie $(x-1)(x-\frac{3}{a})>0$, $x<\frac{3}{a}$, sau $x>1$.

Ridicând la pătrat expresia dată, avem

$$(1) \qquad ax^2-(a+3)x+3-y^2=0,$$

şi deci ca să avem valori reale pentru $x$ trebuie ca realizantul acestei ecuaţii să fie pozitiv,

$$(a+3)^2 - 4a\,(3-y^2) > 0 \quad , \quad 4ay^2 + (a-3)^2 > 0.$$

Această neegalitate este verificată pentru $a > 0$ oricare ar fi $y$; deci în acest caz nu avem nici maximum nici minimum.

Când $a < 0$, trebuie ca $y$ să fie cuprins între rădăcini,

$$\frac{a-3}{2\sqrt{-a}} < y < -\frac{a-3}{2\sqrt{-a}}\,.$$

Deci, în acest caz cea mai mică valoare ce o poate luà $y$ este $\dfrac{a-3}{2\sqrt{-a}}$, este un minimum pentru $y$, iar cea mai mare valoare este $-\dfrac{a-3}{2\sqrt{-a}}$, care este maximul lui $y$.

Pentru ca maximul să fie egal cu 2, trebuie ca

$$-\frac{a-3}{2\sqrt{-a}} = 2,\ a^2 + 10a + 9 = 0;\ a = -1,\ a = -9.$$

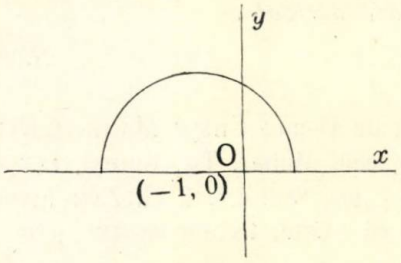



Fig. 1.

1°. Pentru $a = -1$, expresia (1) devine $-x^2 - 2x + 3 - y^2 = 0$, şi pentru $y = 2$ avem $x^2 + 2x + 1 = 0$, $(x+1)^2 = 0$, de unde $x = -1$. Deci maximul corespunde lui $x = -1$. Funcţiunea este în acest caz $y = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$, intervalul de realitate este $-3 < x < 1$, are maximul $y = 2$ pentru $x = -1$. Se mai poate scrie, ridicând la pătrat, $y^2 = -x^2 - 2x + 3$, $(x+1)^2 + y^2 = 2^2$, se vede că este un semicerc (Fig. 1) de centru $(-1, 0)$ şi de rază 2.

$2^0$. Pentru $a = -9$, funcţiunea este $y = \sqrt{-9x^2+6x+3}$, maximul $y = 2$ corespunde lui $x$ dat de ecuaţia $9x^2-6x-3+y^2 = 0$, $9x^2 - 6x + 1 = 0$, $(3x - 1)^2 = 0$, deci $x = \frac{1}{3}$. Intervalul de realitate este $-\frac{1}{3} < x < 1$.

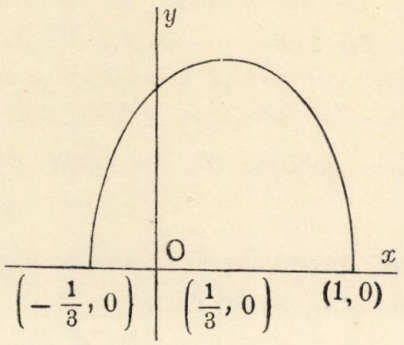



Fig. 2.

Ecuaţia curbei se mai poate scrie

$$y^2 = -9x^2 + 6x + 3, \quad (3x - 1)^2 + y^2 = 4,$$

$$9(x - \tfrac{1}{3})^2 + v^2 = 4, \quad \frac{(x-\frac{1}{3})^2}{(\frac{2}{3})^2} + \frac{y^2}{(2)^2} = 1.$$

Făcând în ecuaţie $y = 0$, adică voind a vedeà unde curba ae axa $Ox$, avem

$$-9x^2 + 6x + 3 = 0, \text{ de unde } x = 1, \; x = -\tfrac{1}{3}.$$

Curba tae axa $Ox$ în punctele $(-\frac{1}{3},0)$, $(1,0)$ şi din forma simplificată, se vede că este o semi-elipsă căci $y$ trebuie să fie pozitiv (deasupra axei $Ox$), cu centrul în $(\frac{1}{3}, 0)$, cu semi axele $\frac{2}{3}$ şi 2. Semi-elipsa tae axa $Oy$ în punctul pentru care $x = 0$, şi înlocuind în funcţiune $x = 0$, avem $y = \sqrt{3}$.

## Problema N° 4001.

Se cere să se calculeze câţi elevi de licee civile şi câţi de licee militare au fost valabil înscrişi pentru concursul din anul acesta, al Gazetei Matematice, ce urma să se ţină în vacanţa Paştilor, ştiind că am putea face un front simetric punând câte doi elevi civili printre elevi militari sau câte doi elevi militari printre grupe de doi elevi civili.

I. Ionescu.

Notăm cu $x$ numărul elevilor civili şi cu $y$ numărul elevilor militari.

In prima aranjare avem $\frac{x}{2}$ grupe de câte 2 elevi civili şi $y$ grupe de câte 1 elev militar.

Cum într'un şir, între $m$ elemente sunt $(m-1)$ intervale, rezultă o primă ecuaţie:

$$y = \frac{x}{2} + 1.$$

Deasemenea, din a doua aranjare deducem:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} + 1$$

Avem aşa dar de rezolvat sistemul:

$$\begin{cases} 2y - x = 2, \\ x - y = 2, \end{cases}$$

care ne dă $x = 6$ şi $y = 4$.

Au fost deci valabil înscrişi 6 elevi civili şi 4 militari.

b.

George Şt. Roşca.

*Notă.* Am reprodus prin foto-zincografie această soluţiune a problemei 4001 ca model de îngrijire la redactare şi acurateţă la scriere.

Au rezolvat problema şi D-nii: P. M. Varlam (Liceul Eminescu, Bucureşti), H. P. Ionescu (Student), A. Halpern (Anul preparator al Şcoalei Politecnice, Bucureşti) şi C. D. Ionescu-Ţiu.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

Problema se poate rezolvà foarte uşor aritmeticeşte. Să considerăm primul front făcut de perechi de elevi civili printre câte un elev militar. Să trecem dela acest front la următorul. Să luăm elevii militari dela capetele frontului şi să-i ducem lângă elevii militari cei mai apropiaţi de ei. Frontul are acum la capete perechi de elevi civili şi lângă ei câte o pereche de elevi militari. Alţi elevi militari nu mai putem deplasa, spre a-i aşezà perechi cu elevi militari, căci atunci ar rămâne câte patru elevi civili alături. Deci problema nu mai e posibilă dacă sunt peste două perechi de elevi militari. Aceştia sunt dar în număr de 4. In primul front ei lasă printre dânşii trei locuri libere în care sunt câte doi elevi civili. Deci aceştia sunt în număr de 6.

I. Ionescu.

---

*PROBLEMA 4018. *Intr'o Cosmografie veche tipărită în limba română citesc următoarele:*

*«Ilustrulu autoru allu Astronomiei populare raportă că un professoru din Angers, voindu să dea elevilor sei uă idee sensibilă de mărimea pământului comparată cu acea-a sorelui, 'şi imagină să numere grăunţele de grâu conţinute într'unu litru: şi a aflatu 10.000. Prin urmare 14 decalitri trebue să conţină 1.400.000. Turnându apoi într'uă tavă 14 decalitruri de grâu, arată eleviloru unu singure grăunt şi le zice: «Iată pământul şi (apoi arătându-le tava) iată soarele».*

*Care e minimum diametrului tavei, ştiind că grâul uscat se poate menţine sub un unghiu de 30°?*

I. Ionescu.

*Soluţie* dată de D-l Al. D. Stoica. (Elev classa III a Liceului «Marele Voivod Mihai» din Bucureşti).

Grâul formează pe tavă un con circular drept, ale cărui generatoare fac cu baza unghiuri de 30°.

Fie A vârful conului, O centrul bazei, BOC un diametru al bazei. Fie A' simetricul lui A faţă de BC. Cum $\sphericalangle A'BO = \sphericalangle ABO = 30^0$ reese că $\sphericalangle ABA' = 60^0$. Triunghiul isoscel ABA' având un unghiu de $60^0$ este echilateral, şi deci $AA' = AB$, de unde deducem $AO = \frac{1}{2}AA' = \frac{1}{2}AB$.

Triunghiul dreptunghic AOB ne dă:

$$\overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{AB}^2 - (\tfrac{1}{2}AB)^2 = 3\overline{AB}^2/4 = 3\overline{AO}^2,$$

de unde $AO = OB/\sqrt{3}$.

Dacă însemnăm cu V volumul conului, avem:

$$V = \pi \cdot OB^2 \cdot OA/3 = \pi \cdot OB^3/3\sqrt{3} = 14 \text{ dal} = 140 \text{ dm}^3.$$

De aici deducem:

$$OB^3 = 140 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}/\pi.$$

Dar $\pi = 3{,}1416$, $\sqrt{3} = 1{,}77321$ aproximativ. Inlocuind şi făcând calculele, găsim:

$$OB^3 = 231{,}5641 \ldots$$

de unde $OB = 6{,}14$ dm $= 0{,}614$ m. Diametrul bazei tavei va fi dar $2 \times 0{,}614 = 1{,}228$ m.

D-l C. D. Ionescu-Ţiu a luat ca necunoscută înălţimea conului şi a găsit diametrul 1,226 m.

D-l A. Em. Bădescu a făcut calculele cu logaritmi şi a dat rezultatul exact 1,228 m.

Celelalte soluţii trimise au fost eronate.

## *EXERCIŢII

1. Pentru orice triunghiu să se stabilească relaţia

$$p^2 - s\,\Sigma \frac{1}{\sin A} = R^2\,\Sigma \sin^2 A$$

(notaţiile obişnuite).

I. C. Şova-Grigoreni.

R. Se pleacă dela

$$a^2 = 4R^2 \sin^2 A$$

şi deci

$$\Sigma a^2 = 4R^2\,\Sigma \sin^2 A.$$

Ţinând seamă că

$$\Sigma\, a^2 = 4p^2 - 2abc\,\Sigma \frac{1}{a}$$

se ajunge la relaţia

$$2p^2 - abc\,\Sigma \frac{1}{2R \sin A} = 2R^2\,\Sigma \sin^2 A$$

care e cea din enunţ, fiindcă

$$\frac{abc}{2R} = 2s.$$

## PROBLEME PROPUSE

*4051. Care din expresiunile:

$$\frac{2,44}{1,2}+\sqrt{\frac{2}{2,44}}\ ,\quad \frac{2,69}{1,3}+\sqrt{\frac{2}{2,69}}\ ,\quad \frac{2,96}{1,4}+\sqrt{\frac{2}{2,96}},$$

este cea mai mare şi care este cea mai mică ?

I. Ionescu.

*4052. Se cere patratul *dmszu* aşà ca *mdsuz* să fie alt patrat iar $(m+u)$ şi $(s+z)$ să fie numere prime consecutive.

D. V. Şerban.

4053. Să se determine numerele prime cu $n$ din şirul:

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots\ P_n,$$

în care:

$$P_i=(i-1)^2+i^2.$$

Ioan B. Florescu.

*4054. Intre laturile $a,\ b,\ c,\ d,$ diagonalele $e,\ f,$ razele cercurilor circumscrise triunghiurilor obţinute luând câte trei vârfurile unui patrulater convex ABCD, avem relaţiile

$$\left(\frac{ab}{R_1}+\frac{cd}{R_2}\right)e=\left(\frac{ad}{R_3}+\frac{bc}{R_4}\right)f=4S,$$

S fiind suprafaţa patrulaterului.

M. Ghermănescu.

4055. Sur une droite $xy$ on marque quatre points dans l'ordre A, C, D, B. Sur les segments AC, DB, AB, on décrit des demi-cercles au dessus de AB; sur CD un demi-cercle au dessous de AB. Détérminer les centres de gravité:

1. Du périmètre curbiligne de cette figure;
2. De l'aire limité par ces demi-cercles.

V. Thébault.

*4056. Să se construiască un triunghiu cunoscând un unghiu şi centrele cercurilor înscris şi circumscris şi razele lor.

D. ARG. DUMITRESCU.

*4057. Se dau două progresii à câte opt termeni, una aritmetică şi alta geometrică. Ştiind că ambele progresii încep cu aceiaşi cifră, iar raţia este identică, se cere să se determine cele două progresii în cazul când avem relaţiile:

$l_1^2 = l_2$, între ultimii termeni, şi

7. $S_1 = S_2 - 6$, între sume, indicele *1* fiind al progresiei aritmetice şi *2* al progresiei geometrice.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

*4058. Să se discute ecuaţia:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \lambda \operatorname{tg} 3\theta + 3 \operatorname{tg} \theta,$$

când parametrul real $\lambda$ variază.

Să se afle $\theta$ cu o eroare $< 1''$ când $\lambda = 3$.

N. C.

4059. Polinoamele de variabilă reală $x$

$$P_i = \sum_1^i (-1)^{p-i} \frac{A_i^p}{p} \alpha^{n-p} x^{n-p}$$

satisfac relaţia

$$P_{n+1} + (n - \alpha) P_n - n\alpha x P_{n-1} \equiv \alpha^n x^n,$$

unde $A_i^p$ este simbolul aranjamentelor.

SUB.-LT. M. FOCŞENEANU.

4060. Se dau două drepte concurente în O, $\Delta$ şi $\Delta'$ şi o direcţie fixă D. Printr'un punct mobil M de pe dreapta $\Delta$ se duce o paralelă la D care taie pe $\Delta'$ în N. Pe dreapta MN se ia un punct P astfel ca $\overline{MN} \times \overline{MP} = \mu^2 = \text{const.}$

Se cere să se găsească locul geometric al punctului P.

M. NICOLAU.

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

# BOLETIN MATEMATICO

**FUNDAT ÎN ANUL 1928. — ABONAMENT ANUAL: 400 LEI**

# BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

**FUNDAT ÎN ANUL 1930. — ABONAMENT ANUAL: 125 LEI**

**Director: Dr. B. I. BAIDAFF**

**SUNT CELE MAI IMPORTANTE PUBLICAȚIUNI PERIODICE MATEMATICE DIN AMERICA DE SUD**

**SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL IV (IAN. — DEC. 1931)**

**ABONAMENTELE ȘI CORESPONDENȚA SE VOR TRIMITE LA ADRESA:**

**BOLETIN MATEMATICO, Belgrano 975, Buenos-Aires, Rep. Argentina.**

Dela Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930 s'au publicat articole și note dela Domnii:

**F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos** și **J. Tschiek,** Buenos-Aires (Rep. Argentina), **J. Hartmann,** La Plata (Rep. Argentina), **C. Dieulefait** și **E. Natale,** Rosario (Rep. Argentina), **O. Márquez,** Salta (Rep. Argentina), **M. A. Basoco** și **E. T. Bell,** Pasadena (California), **M. Krawtchouk** și **N. Kryloff,** Chiev (U. R. S. S.), **J. Gonzalez Perera, S. José** (Uruguay), **B. Jekhowsky,** Bordo (Francia), **W. Lewitzky,** Lemberg (Polonia), **O. J. Ramler,** Washington (Statele Unite) **J. Shohat,** Ann Arbor (Statele Unite), **D. M. J. Sommerville,** Wellington (N. Zelandia), **V. Thébault,** Le Mans (Francia), **O. Szász,** Frankfurt a. M. (Alemania), **G. Vivanti,** Milano (Italia), **J. R. Wilton,** Adelaida (Sud Australia).

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

---

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Aldea N. N.* (3248, 978, 4014, 26, 27, 32); *Aurian A. I.* (4020, 33); *Avram N. C.* (4026); *Bădescu Em. A.* (4019, 20); *Cârstoiu I. D.* (4008); *Cinsky V. C.* (4038); *Cojocaru I.* (4027); *Curchi Ioan* (4027, 33, P); *Dangă V.* (3949); *Deac I.* (4008); *Dumitraşcu N. Romeo* (E); *Faţe Mărgărit* (3939); *Florescu B. I.* (3308); *Gheorghiu-Gladiş Th. Gh.* (1576); *Ghişoiu I. P.* (3940, 48, 50, 78, 79); *Ghiuţă G. V.* (4019); *Halperin A.* (3664); *Ionescu-Bis P. Haralambie* (3248, 513, 910, 61, 4006, 14, 26, 27, E); *Ionescu-Ţiu D. Const.* (3889, 92, 93, 965, 82, 84, 92, 4002, 03, 07, 11, 12, 14, 19, 26, E); *Lenca I.* (R); *Mereuţă Em.* (3966, 99, 4008, 11, 19, 26); *Mihăileanu N. N.* (3979, 4019, 22, 33, E); *Motoc D. Mircea* (3929, 45, 65, 84); *Negrea A. M.* (4026); *Parepeanu I.* (3939, 78, 4008, 14, 19, 26, E); *Popescu-Stăneşti M. I.* (3926, 88, 4027); *Roşca St. G.* (3938, 39, 61, 78, 92, 4003, 11, 26); *Russu D. C.* (3948, 78); *Şova C. Ioan* (3919, 4027); *Stan I. A.* (3650, 4009, 14); *Thébault V.* (A, N, P); *Truţescu Ştefania* (3978); *Varlam M. Petre* (3932, 52, 65, 4003, 06, 22, 26, 27); *Vasiliu C. Ion* (1969, 76, 2643, 999, 3396, 556, 694, 815, 35, 914, E, N, P); *Vasu Vasile* (3989, 4006, 09, 17, P); *Zamfirescu Gh. I.* (3467, 635, 4020); *Zane D. N.* (3984, 4022, 32).

---

*Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

---

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

---

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

# Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

**La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din bibiioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.**

# GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVII.

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1931.

...TECA CE...

SUMARUL

1. Sur les carrés parfaits . . . . . *V. Thébault.*
2. Asupra rezolvării în numere întregi a unei ecuaţii omogene de gradul al doilea cu *n* variabile . . . . . *Ioan B. Florescu.*
3. Note matematice: 6 — 7.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 210.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 1482, 1968, 2580, 3835, 3882, 3930.
9. Exerciţii: 2 — 3.
10. Probleme propuse: 4056, 4061 — 4070.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1931

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVII se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orăşanu,** Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se inapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, cores-, pondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 82, 405, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 80, 84, 93, 99, 804, 08, 10, 29, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 70, 80, 96, 98, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 72, 73, 76, 83, 87, 4000, 10, 13, 21, 24, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 40, 44, 45, 46, 48, 51, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

# *SUR LES CARRÉS PARFAITS

Les propriétés des nombres entiers carrés parfaits ont, depuis longtemps, attiré l'attention des mathématiciens. Les Revues et les Recueils en ont signalé de très nombreuses. Les méthodes générales, pour résoudre ces questions, font parfois défaut. On y supplée par l'emploi de remarques souvent curieuses qui donnent à ces exercices d'analyse indéterminée beaucoup d'intérêt.

A titre d'exemple, voici pour les jeunes lecteurs, une question que nous avons proposée et qui n'a pas reçu de solution [1]):

*Trouver les carrés de quatre chiffres tels que la somme de leurs deux chiffres à gauche égale celle des deux chiffres de droite.*

1. Rappelons tout d'abord ces curiosités connues :

*a) L'un des deux chiffres à droite d'un carré quelconque est toujours pair. Il n'existe, par suite, pas de carrés parfaits formés exclusivement de chiffres impairs.*

*b) Les carrés formés de quatre chiffres pairs sont :*

$$\overline{68}^2 = 4624\,;\quad \overline{78}^2 = 6084\,;\quad \overline{80}^2 = 6400\,;\quad \overline{92}^2 = 8464.$$

*c) Il existe un seul carré de la forme aabb :*

$$\overline{88}^2 = 7744.$$

*d) Il n'existe pas de carrés de quatre chiffres de chacune des formes aaaa, abba, abab.*

2. Soit N un carré parfait formé de quatre chiffres *a, b, c, d,* tels que $a + b = c + d$.

Les chiffres *a, b, c, d,* ne peuvent être *tous pairs,* ni *tous impairs.* Il ne peut y avoir non plus trois d'entre eux pairs ou trois impairs, les nombres $(a + b)$ et $(c + d)$ étant de même parité.

On ne peut donc avoir que *deux chiffres pairs* et *deux chiffres impairs.*

De plus, *a, b, c, d,* sont *tous différents,* autrement, N serait de l'une des formes *aaaa, aacc, adad, acca.*

---

1) *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles,* 1925 — 167. — *Education mathématique,* 28-e année — 80, question 5428.

Nous n'avons donc que deux hypothèses à retenir :

*a) les chiffres c et d sont pairs tous les deux et a, b, sont impairs ;*

*b) l'un seulement des chiffres c ou d est pair a et b sont l'un pair, l'autre impair.*

D'autre part, *d*, qui est toujours différent de zéro, ne peut être que

1, 4, 5, 6 ou 9.

**Première hypothèse.** Pour que *c* et *d* soient pairs tous les deux, il faut et il suffit que le chiffre des dizaines du nombre $d^2$ soit pair. Ceci n'a lieu que lorsque $d^2$ est terminé par 4. Dans ce cas la racine carrée *n* de N est terminée par 2 ou 8.

Alors

$c = 0.$ $\quad a + b = (1 + 3)$ ou $(3 + 1).$

$c = 2.$ $\quad a + b = (1 + 5)$ ou $(5 + 1).$

$c = 4.$ $\quad \begin{cases} a + b = (1 + 7) \text{ ou } (7 + 1) \\ a + b = (3 + 5) \text{ ou } (5 + 3). \end{cases}$

$c = 6.$ $\quad \begin{cases} a + b = (1 + 9) \text{ ou } (9 + 1) \\ a + b = (3 + 7) \text{ ou } (7 + 3). \end{cases}$

$c = 8.$ $\quad \begin{cases} a + b = (3 + 9) \text{ ou } (9 + 3) \\ a + b = (5 + 7) \text{ ou } (7 + 5). \end{cases}$

Aucun de ces groupements ne donne de solution.

**Seconde hypothèse.** — *a) d est pair, c est impair.*

Dans ce cas, $d = 6$ et *n* est terminé par 6.

$c = 1.$ $\quad a + b = (3 + 4)$ ou $(4 + 3).$

$c = 3.$ $\quad \begin{cases} a + b = (9 + 0) \\ a + b = (2 + 7) \text{ ou } (7 + 2) \\ a + b = (4 + 5) \text{ ou } (5 + 4). \end{cases}$

$c = 5.$ $\quad \begin{cases} a + b = (2 + 9) \text{ ou } (9 + 2) \\ a + b = (3 + 8) \text{ ou } (8 + 3) \\ a + b = (4 + 7) \text{ ou } (7 + 4). \end{cases}$

Nous n'avons donc que deux hypothèses à retenir :

*a) les chiffres c et d sont pairs tous les deux et a, b, sont impairs ;*

*b) l'un seulement des chiffres c ou d est pair a et b sont l'un pair, l'autre impair.*

D'autre part, *d*, qui est toujours différent de zéro, ne peut être que

1, 4, 5, 6 ou 9.

**Première hypothèse.** Pour que *c* et *d* soient pairs tous les deux, il faut et il suffit que le chiffre des dizaines du nombre $d^2$ soit pair. Ceci n'a lieu que lorsque $d^2$ est terminé par 4. Dans ce cas la racine carrée *n* de N est terminée par 2 ou 8.

Alors

$c = 0.$ $\quad a + b = (1 + 3)$ ou $(3 + 1).$

$c = 2.$ $\quad a + b = (1 + 5)$ ou $(5 + 1).$

$c = 4.$ $\quad \begin{cases} a + b = (1 + 7) \text{ ou } (7 + 1) \\ a + b = (3 + 5) \text{ ou } (5 + 3). \end{cases}$

$c = 6.$ $\quad \begin{cases} a + b = (1 + 9) \text{ ou } (9 + 1) \\ a + b = (3 + 7) \text{ ou } (7 + 3). \end{cases}$

$c = 8.$ $\quad \begin{cases} a + b = (3 + 9) \text{ ou } (9 + 3) \\ a + b = (5 + 7) \text{ ou } (7 + 5). \end{cases}$

Aucun de ces groupements ne donne de solution.

**Seconde hypothèse.** — *a) d est pair, c est impair.*

Dans ce cas, $d = 6$ et *n* est terminé par 6.

$c = 1.$ $\quad a + b = (3 + 4)$ ou $(4 + 3).$

$c = 3.$ $\quad \begin{cases} a + b = (9 + 0) \\ a + b = (2 + 7) \text{ ou } (7 + 2) \\ a + b = (4 + 5) \text{ ou } (5 + 4). \end{cases}$

$c = 5.$ $\quad \begin{cases} a + b = (2 + 9) \text{ ou } (9 + 2) \\ a + b = (3 + 8) \text{ ou } (8 + 3) \\ a + b = (4 + 7) \text{ ou } (7 + 4). \end{cases}$

$c = 7.$ $\begin{cases} a + b = (4 + 9) \text{ ou } (9 + 4) \\ a + b = (5 + 8) \text{ ou } (8 + 5). \end{cases}$

$c = 9.$ $\quad a + b = (7 + 8) \text{ ou } (8 + 7).$

Aucune solution ne découle des ces agencements.

*b) d est impair, c est pair.*

Alors

$$d = 1 \quad , \quad d = 5 \quad , \quad \text{ou } d = 9.$$

$1^0$ $d = 1.$ — $(c > 0).$

$c = 2.$ $\quad a + b = (3 + 0).$

$c = 4.$ $\begin{cases} a + b = (5 + 0), \\ a + b = (2 + 3) \text{ ou } (3 + 2). \end{cases}$ $\quad N = 5041 = \overline{71}^2.$

$c = 8.$ $\begin{cases} a + b = (9 + 0) \\ a + b = (2 + 7) \text{ ou } (7 + 2) \\ a + b = (3 + 6) \text{ ou } (6 + 3) \\ a + b = (4 + 5) \text{ ou } (5 + 4). \end{cases}$

$2^0$ $d = 5.$

Alors,

$c = 2.$ $\begin{cases} a + b = (7 + 0) \\ a + b = (1 + 6) \text{ ou } (6 + 1) \\ a + b = (3 + 4) \text{ ou } (4 + 3). \end{cases}$

$3^0$ $d = 9.$

$c = 2.$ $\begin{cases} a + b = (3 + 8) \text{ ou } (8 + 3) \\ a + b = (4 + 7) \text{ ou } (7 + 4) \\ a + b = (5 + 6) \text{ ou } (6 + 5). \end{cases}$

$c = 4.$ $\begin{cases} a + b = (5 + 8) \text{ ou } (8 + 5) \\ a + b = (6 + 7) \text{ ou } (7 + 6). \end{cases}$

$c = 6.$ $\quad a + b = (7 + 8) \text{ ou } (8 + 7).$

Tous ces cas, sauf $d = 1$, $c = 4$, $a = 5$, $b = 0$, ne donnent pas de solution.

*Il n'y a donc qu'un seul nombre convenable :*

$$5041 = \overline{71}^2.$$

3. Posons

$$N = 100x + y = n^2,$$

$x$, $y$, étant les nombres formés par les deux chiffres $a$ et $b$ à gauche et $c$, $d$, à droite de N. Puisque $a + b = c + d$, le nombre $(x - y)$, (ou $(y - x)$), est multiple de 9 et ne peut être que

$$9,\ 18,\ 27,\ 36,\ 45,\ 54,\ 63,\ 72,\ 81.$$

*a)* Si $x - y = 9$, on a l'équation en nombres entiers,

$$101y = (n - 30)(n + 30),$$

pour laquelle

$$n + 30 = 101 \quad , \quad \text{soit } n = 71.$$

*b)* Si $x - y = 9k$, $(k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$, l'équation du problème devient

$$101y = (n - 30\sqrt{k})(n + 30\sqrt{k}).$$

Elle ne comporte aucune solution convenable.

4. Le nombre N = 5041 présente une autre curiosité

$$N - 1 = 5040 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7.$$

N — 1 *est le produit de sept nombres entiers consécutifs.*

V. THÉBAULT
(Le Mans-France).

# ASUPRA REZOLVĂRII IN NUMERE INTREGI A UNEI ECUAȚII OMOGENE DE GRADUL AL DOILEA CU $n$ VARIABILE

Fie $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$, o ecuație omogenă de gradul al doilea cu $n$ variabile $x_1, x_2, \ldots x_n$ și fie $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ o soluțiune în numere întregi a acestei ecuațiuni.

Soluția generală a acestei ecuațiuni va depinde de un număr oarecare de parametri și va fi evident de forma:

$$x_1 = f_1, \quad x_2 = f_2, \ldots x_n = f_n,$$

unde $f_1, f_2, \ldots f_n$ sunt funcțiuni necunoscute de parametrii de care depinde soluția generală.

Pentru anumite valori ale parametrilor, din această soluțiune generală va trebui să obținem fie soluția $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$, fie soluția $tx'_1, tx'_2, \ldots tx'_n$, unde $t$ este un factor de proporționalitate:

Putem scrie:

(1) $$x_i = tx'_i + (f_i - tx_i) \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Pentru motivele de mai sus egalitățile (1) trebuie să fie de forma:

(2) $$x_i = tx'_i + a_i u_i,$$

unde $a_i$ și $u_i$ sunt două funcțiuni de parametri, $u_i$ fiind presupus astfel, încât pentru valorile parametrilor care dau soluția $tx'_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) să se anuleze.

Evident că nu este niciun motiv ca în cazul general funcțiunile $u_i$ să fie identice. Noi ne propunem însă să vedem dacă printre soluțiunile generale nu se poate izolă o clasă pentru care să avem:

$$u_1 = u_2 = u_3 = \ldots = u_n = u.$$

Este dela sine înțeles că dacă o astfel de clasă de soluțiuni există, ea nu va cuprinde totalitatea soluțiilor ecuației $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ decât în cazuri absolut particulare.

Conform celor spuse, vom căutà soluțiile de forma:

$$x_1 = tx'_1 + a_1 u \; ; \; x_2 = tx'_2 + a_2 u \; ; \; \ldots \; ; \; x_n = tx'_n + a_n u.$$

Deci va trebuì să avem:

$$f(tx'_1 + a_1 u, tx'_2 + a_2 u, \ldots, tx'_n + a_n u) = 0,$$

sau desvoltând după formula lui TAYLOR si ţinând seama că ecuaţia este omogenă şi de gradul II, avem:

$$(3)\quad t^2 f(x'_1, x'_2, \ldots x'_n) + tu \sum_1^n a_i f'_{x'_i} + \frac{u^2}{2} \sum_1^n a_i^2 f''_{x'_i} = 0,$$

unde $f'_{x'_i}$ şi $f''_{x'_i}$ sunt derivatele funcţiunii în raport cu variabilele $x_i$ şi în care variabilele sunt înlocuite cu valorile lor particulare $x'_i$.

Deoarece $x'_1, x'_2 \ldots x'_n$ sunt o soluţiune a ecuaţiei date,

$$f(x'_1, x'_2, \ldots x'_n) = 0,$$

din (3) se deduce:

$$(4)\quad u = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{u}{t} = -\frac{2\sum_1^n a_i f'_{x'_i}}{\sum_1^n a_i^2 f''_{x'_i}}$$

$u = 0$ ne conduce la soluţia banală dela care am plecat, iar din a doua formulă din (4), având în vedere că ne trebuiesc soluţiunile în numere întregi, putem luà:

$$t = \sum_1^n a_i^2 f''_{x'_i} \quad u = -2 \sum_1^n a_i f_{x'_i},$$

formule care ne dau pe $t$ şi $u$ în funcţie de $a_1, a_2 \ldots a_n$ pe care îi putem considerà, fără niciun inconvenient, ca parametrii de care depinde clasa de soluţiuni căutată. Această clasă de soluţiuni e dată de formulele:

$$(5)\quad x_i = x'_i \sum_1^n a_i^2 f''_{x'_i} - 2a_i \sum_1^n a_i f'_{x'_i}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

Acest rezultat ne dă dreptul de a enunţà următoarea teoremă:

*Dacă o ecuaţie omogenă de gradul II cu* n *necunoscute admite o soluţiune în numere întregi, ea admite în mod cert o infinitate*, teoremă pe care nu am găsit-o enunţată nicăeri în totalitatea ei.

Deasemenea formulele (5) ne dau un mijloc de a găsi o infinitate de soluţiuni ale ecuaţiei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ în funcţie de $n$ parametri. Vom tratà câteva exemple spre a se vedeà rezultatele interesante la care conduc aceste formule.

1) Fie $x_1$, $y_1$, $z_1$ o soluție particulară a ecuației

$$Ax^2 + Dxy + By^2 = Cz^2.$$

Ea va admite și soluțiile parametrice:

$$x = x_1 (Aa^2+Bb^2—Cc^2)—a [(2Aa+Db) x_1+(Da+2Bb)y_1—2Ccz_1]$$
$$y = y_1 (Aa^2+Bb^2—Cc^2)—b [(2Aa+Db) x_1+(Da+2Bb)y_1—2Ccz_1]$$
$$z = z_1 (Aa^2+Bb^2—Cc^2)—c [(2Aa+Db) x_1+(Da+2Bb)y_1—2Ccz_1]$$

Soluția generală a acestei ecuații a fost găsită de GAUSS căutând punctele raționale de pe o conică, iar printr'o metodă elementară de mine, într'un articol trimis mai demult și publicat recent *(Gazeta Matematică*, XXXVI, pag. 248 ș. u.).

2) Fie ecuația

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2.$$

Această ecuațiune admite soluțiunea particulară

$$x'_1 = y'_1 = 1 \; ; \; x'_2 = x'_3 = \ldots = x'_n = y'_2 = \ldots = y'_m = 0$$

care introdusă în (5) ne dă soluția parametrică:

$$x_1 = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 - b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_m^2) - 2a_1 (a_1 - b_1)$$
$$y_1 = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 - b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_m^2) - 2b_1 (a_1 - b_1)$$
$$x_i = 2a_i (a_1 - b_1) \qquad (i = 2, 3 \ldots n)$$
$$x_i = 2b_i (a_1 - b_1) \qquad (i = 2, 3 \ldots m)$$

Notând $a_1 - b_1 = t$, această soluțiune devine:

$$x_1 = -t^2 + \sum_2^n a_i - \sum_2^m b_i \; ; \; y_1 = t^2 + \sum_2^n a_i - \sum_2^m b_i$$

$$x_i = 2a_i t \quad (i = 2, 3, \ldots n) \qquad y_i = 2b_i t \quad (i = 2, 3, \ldots m)$$

Această soluțiune a fost găsită de MARTIN în 1896 pentru $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ (Vezi CARMICHAEL, *Analyse indéterminée)*, iar așă cum a fost găsită de noi, de D-l EMIL ȘTEFĂNESCU, după calcule laborioase, în *Gazeta Matematică* XXXI pag. 248 și 287.

Aceste exemple sunt suficiente spre a arătă atenția pe care trebuie să ne-o reclame formulele (5).

Vom face acum câteva observațiuni asupra lor, rezervându-ne dreptul de a le complectă ulterior.

1. Să presupunem că formulele (5) nu dau soluția generală. Atunci există cel puțin o soluțiune $x''_1$, $x''_2 \ldots x''_n$ care nu este

conținută în formulele (5). Ori putem plecà dela această soluțiune și făcând același raționament asupra acestei soluțiuni particulare ca și cel făcut asupra soluțiunei $x'_1, x'_2 \ldots x'_n$, găsim formulele:

$$(5') \qquad x_i = x''_i \sum_1^n \alpha_j^2 f''_{x''_j} - 2\alpha_i \sum_1^n \alpha_j f'_{x''_j}.$$

Formulele (5) și (5') vor aveà o infinitate de soluțiuni comune dacă ecuațiile omogene și de gradul II, cu $2n$ necunoscute $a_1, a_2 \ldots a_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$:

$$(6) \quad x'_1 \sum_{\substack{1 \\ (i=1,2,\ldots n)}}^n a_j^2 f''_{x'_j} - 2a_i \sum_1^n a_j f'_{x'_j} = x''_i \sum_1^n \alpha_j^2 f_{x''_j} - 2\alpha_i \sum_1^n \alpha_j f_{x''_j}$$

au cel puțin o soluțiune în numere întregi.

2. Fie $x'''_1, x'''_2, \ldots x'''_n$ o soluțiune obținută din formulele (5) pentru valori particulare $b_1, b_2, \ldots b_n$ ale parametrelor $a_1, a_2, \ldots a_n$. Putem plecà dela această soluțiune pentru a determinà alte formule analoage cu formula (5). Aceste formule vor dà o infinitate de soluțiuni comune cu cele date de formulele (5) dacă sistemul de $n$ ecuațiuni omogene de gradul II cu $2n$ necunoscute, analog sistemului (6), ce se stabilește în acest caz, va fi rezolvabil în numere întregi. Ele vor da numai soluțiuni noui, dacă acel sistem este nerezolvabil în numere întregi. In fine vor dà toate soluțiunile date de formulele (5) dacă acest sistem ne va determinà valori întregi $a_1, a_2, \ldots a_n$ pentru orice valoare a parametrilor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ (parametri introduși de formulele care au ca bază pe $x'''_1, x'''_2, \ldots x'''_n$) și invers, vor există în totdeauna valori întregi pentru $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ care să verifice sistemul pentru orice valori ale parametrilor $a_1, a_2, \ldots a_n$.

3. Se poate demonstrà că în acest din urmă caz formulele (5) formează un grup, adică plecând dela o soluțiune din (5) ca soluțiune particulară, dăm tot peste o soluțiune care erà conținută de (5) și numai peste acestea. Mai mult, se poate demonstrà, și vom face-o într'un alt articol, că în acest caz formulele (5) sunt soluțiunile generale ale ecuației date.

4. Deasemenea se poate demonstrà că există totdeauna o soluție particulară a ecuației:

$$f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) = 0,$$

(bine înțeles dacă ecuația este rezolvabilă), dela care plecând deducem cu ajutorul formulelor (5) toate soluțiunile ecuației date.

IOAN B. FLORESCU.

# NOTE MATEMATICE

*6. *Expression du rapport de similitude de deux triangles.* Dans un triangle quelconque ABC, on inscrit, (ou on circonscrit), un triangle $\alpha\beta\gamma$ tel que les angles $B\alpha\gamma$, $C\alpha\beta$, $A\beta\gamma$, soient égaux à un même angle $\theta$ et de même sens.

Il est aisé de vérifier que les triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$, sont semblables, les côtés homologues étant

$$(BC, \alpha\gamma)\ ,\ (CA, \alpha\beta)\ ,\ (AB, \beta\gamma).$$

1. Evaluons le rapport de similitude

$$k = \alpha\gamma : BC,$$

en fonction des éléments du triangle ABC.

On a,

$$k = \alpha\gamma : BC = \alpha\gamma : (B\alpha + \alpha C).$$

Or,

$$B\alpha : \alpha C = \sin(B + \theta) : \sin B,$$

et

$$\alpha\gamma : \alpha\beta = \sin\theta : \sin C$$

Par suite

$$k = \alpha\gamma : [\alpha\beta \sin(B + \theta) : \sin B + \alpha\beta \sin\theta : \sin C],$$

ou, en remarquant que

$$\alpha\gamma : \alpha\beta = BC : CA = \sin A : \sin B,$$

$$k = \sin A : [\sin A \sin(B + \theta) : \sin B + \sin B \sin\theta : \sin C]$$

$$= \sin A \sin B \sin C : [\sin A \sin C \sin(B + \theta) + \sin^2 B \sin\theta].$$

Pour rendre ce rapport symétrique par rapport aux angles A, B, C, transformons le dénominateur. On peut écrire

$$\sin A \sin C \sin(B + \theta) = \sin\theta(\sin A \sin C \cos B + 2\sin^2 B) + \cos\theta \sin A \sin B \sin C.$$

Or,

$$\sin A \sin C \cos B = \sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 B,$$

et, finalement,

$$k = \sin A \sin B \sin C : [\tfrac{1}{2}\sin\theta(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + \cos\theta \sin A \sin B \sin C].$$

2. Utilisant les relations connues

$$\sin A \sin B \sin C = pr : 2R^2 = S : 2R^2$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = (p^2 - r^2 - 4Rr) : 2R^2,$$

$(a^2 + b^2 + c^2) : 4S = \cot\omega$, ($\omega$ angle de BROCARD de ABC), on obtient cette relations remarquable :

$$1 : k = \cot\omega \cdot \sin\theta + \cos\theta.$$

Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, ou $\theta = \omega$,

$$1 : k = \cot\omega \text{ ou } 1 : k = 2\cos\omega.$$

Cette derniere relation est vérifiée pour *l'hexagone* de LEMOINE, dans lequel comme il est facile de le montrer, les diagonales sont également inclinées de l'angle de BROCARD sur les côtés du triangle ABC.

V. THÉBAULT.
(Le Mans-France)

7. *O demonstraţie a teoremei lui* LAGUERRE.

Domnul Profesor AL. NICULESCU ne trimite un articol mai lung, din care extragem o demonstraţie a teoremei lui LAGUERRE. Ea se bazează pe determinarea înfăşuratei axelor unui fascicol de conice bitangente.

Soluţia analitică a D-lui NICULESCU e foarte bună. Dar soluţia geometrică, pe care o anexează, e greşită.

Iată două soluţii geometrice ale acestei chestiuni. Una mai scurtă foloseşte metoda corespondenţelor. Cealaltă, ceva mai lungă, e mai elementară.

1. Considerăm conicele $\Gamma$ tangente în A şi B la două drepte fixe. Ele formează un fascicol bitangent. Normalele în A şi B taie una din axe respectiv în M şi N.

Să arătăm că între M şi N avem o corespondenţă de natură (1, 1). Într'adevăr, să ne dăm punctul M pe normala respectivă. Conica căutată $\Gamma$ e caracterizată prin aceea că face parte din fascicolul bitangent şi că atinge (în virtutea simetriei faţă de axă) cercul de centru M şi de rază MA, într'un punct A' diferit de A. Dar conicele variabile ($\Gamma$) ale fascicolului bitangent taie cercul de centru M şi de rază MA în patru puncte: două sunt confundate în A iar celelalte două $A_1$ şi $A_2$ se corespund pe cerc într'o involuţie. Punctul A' trebue să fie unul din punctele duble ale involuţiei.

Dar e evident că printre conicele ($\Gamma$) ale fascicolului bitangent există una, redusă la coarda de contact AB, considerată dublu. Aşadar unul din punctele duble ale involuţiei ($A_1$, $A_2$) este a doua intersecţie $A_0$ a dreptei AB cu cercul M(A). Avem prin urmare, pentru punctul A' care fixează poziţia conicei $\Gamma$, când ne dăm pe M, o singură poziţie: al doilea punct dublu, diferit de $A_0$, al involuţiei $A_1A_2$.

Aşadar conica $\Gamma$ e unic determinată. Axa care conţine punctul M taie a doua normală într'un punct N, bine determinat. Această proprietate se păstrează când, reciproc, voim să determinăm pe M, cu ajutorul lui N.

Deci între M şi N avem o corespondenţă algebrică de natura (1, 1), adică o omografie.

Când conica $\Gamma$ devine o parabolă, una din axe e chiar dreapta dela infinit. Rezultă de aici că omografia dintre M, N este o asemănare.

Când conica $\Gamma$ se reduce la cuplul de puncte A, B, axele devin respectiv: dreapta AB şi perpendiculara $\Delta$ pe mijlocul C al lui AB. Aşadar:

O axă a conicei (de exemplu MN) înfăşoară parabola tangentă normalelor AM, BN, coardei AB şi mediatoarei $\Delta$. Cu alte cuvinte, dacă P e intersecţia axei MN cu $\Delta$, avem între următoarele diviziuni o asemănare:

$$(MPN) = (ACB).$$

Teorema lui LAGUERRE e astfel demonstrată.

2. Iată o altă demonstraţie, mai elementară a faptului că axele fascicolului bitangent ($\Gamma$) înfăşoară o parabolă.

Fie K intersecţia tangentelor în A şi B, comune întregului fascicol. Normalele în A şi B se întâlnesc evident într'un punct L, diametral opus lui K pe cercul AKB. Insemn cu O centrul uneia din conicele $\Gamma$, cu OX şi OY axele ei (X şi Y sunt chiar punctele dela infinit ale axelor).

Se ştie că O se găseşte pe dreapta care uneşte polul K şi mijlocul C al coardei AB. Ţinând seamă că diametralul opus al lui L, pe cercul ALB, e chiar punctul K, rezultă în baza unei propoziţii elementare, că dreapta CK conţine (pe lângă punctul variabil O) şi ortocentrul H al triunghiului ALB.

Se ştie, pe de altă parte, că picioarele A şi B ale normalelor

LA şi LB se găsesc pe iperbola lui APOLONIUS a punctului L faţă de conica Γ. Cu alte cuvinte, există o iperbolă (echilateră) care conţine punctele X, O, Y, A, L, B. La aceste puncte, situate pe iperbola echilateră, trebuie să adăugăm şi ortocentrul H al triunghiului ALB.

Avem, pe iperbolă, următoarele egalităţi de fascicole anarmonice.

$$X(YOAL) = H(YOAL)$$
$$X(YOBL) = H(YOBL).$$

Să tăiem fascicolele din primul membru respectiv cu secantele AL şi BL, iar pe cele din membrul al doilea, amândouă cu secanta AB. Avem astfel următoarele egalităţi de rapoarte anarmonice:

$$(\infty MAL) = (VCAU)$$
$$(\infty NBL) = (VCBU)$$

unde U şi V sunt respectiv intersecţiile lui HL şi HY cu coarda AB. Aşadar U e chiar proiecţia lui L pe AB, cu alte cuvinte un punct fix.

Egalităţile dintre rapoartele anarmonice precedente se scriu explicit:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AU}} : \frac{\overline{VC}}{\overline{VU}} \quad ; \quad \frac{\overline{BN}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BU}} : \frac{\overline{VC}}{\overline{VU}} ;$$

sau, divizând membru cu membru şi ţinând seamă că $\overline{AC} = -\overline{BC}$:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} = -\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}} : \frac{\overline{AU}}{\overline{BU}} = \text{Const.}$$

Am demonstrat deci că M şi N descriu două deviziuni asemenea, în care A şi B se corespund. Fie acum $M_0$ şi $N_0$ punctele unde perpendiculara ridicată pe mijlocul C al lui AB taie respectiv pe AL şi BL. Rămâne să verificăm că

$$\frac{\overline{AM_0}}{\overline{BN_0}} = -\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}} : \frac{\overline{AU}}{\overline{BU}} .$$

Avem însă, din triunghiuri asemenea uşor de recunoscut,

$$\frac{\overline{AM_0}}{\overline{AU}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{AC}} \quad , \quad \frac{\overline{BN_0}}{\overline{BU}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{BC}} .$$

De unde prin împărţire, şi observând că $\overline{AC} = -\overline{BC}$, obţinem tocmai relaţia precedentă.

Conchidem întocmai ca la punctul 1, că înfăşurata lui MN este parabola tangentă laturilor triunghiului ALB şi mediatoarei Δ a laturei AB.

D. B.

# CHESTIUNI DE EXAMEN

## EXAMENUL PENTRU ŞCOALA SUPERIOARĂ DE AERONAUTICĂ (PARIS)

*20 — 30 Iunie 1931*

### MATEMATICI GENERALE

Propuse de E. ABASON

I.

1. Să se scrie ecuaţia dreptei D care trece prin origina axelor $Ox$, $Oy$ şi face cu *axa pozitivă* $Ox$ un unghiu de $30^0$.

2. Să se scrie ecuaţia cercurilor $(c)$ care au centrul pe dreapta D şi sunt tangente la axa $Ox$.

3. Să se scrie ecuaţiile tangentelor ce se pot duce din origina O, la cercurile $(c)$.

Să se explice geometric rezultatul.

II.

1. Să se reprezinte arcul AB reprezentat prin ecuaţia :

$$y = 2e^{2x}$$

pentru $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ , $\alpha$ fiind un număr pozitiv oarecare.

2. Să se afle aria cuprinsă între arcul AB, axele $Ox$, $Oy$ şi dreapta $x - \alpha = 0$.

3. Presupunând că arcul AB se roteşte în jurul axei O, se cere să se calculeze volumul astfel născut.

III.

Să se integreze ecuaţia diferenţială:

$$y'' - 5\,y' + 6\,y = e^{3x}.$$

### ELECTRICITATE INDUSTRIALĂ

Propuse de E. ABASON

I.

O pilă de forţă electro-motrice E = 10 volţi, debitează pe un circuit format din: 1. rezistenţa AB egală cu 1 ohm în serie cu rezistenţele BC = FD formate fiecare dintr'un fir de aramă de 240 metri lungime şi 4 mm² secţiune. 2. din trei rezistenţe în derivaţie $r_1 = r_3 = 0{,}5$ ohmi şi $r_2 = 1$ ohm.

Se cere să se afle : *a)* intensitatea curentului I (se neglijează rezistenţa interioară a pilei ; rezistivitatea aramei se va luă : $\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ ohmi. cm.) ; *b)* cantitatea de căldură absorbită într'o oră de rezistenţele $r_1$, $r_2$, $r_3$.

II.

La capetele AB ale unui circuit format din rezistența ohmică R și rezistența de self L se aplică tensiunea alternativă $u = U \sin \omega t$; se cere să se calculeze: 1. reactanța și impedența circuitului; 2. Constanta de timp a circuitului; 3. Intensitatea curentului *i*.

*Aplicație.* U = 50 volți, R = 1,5 ohmi, L = 0,8 Henry, frecvența tensiunii alternative este de 50 *perioade* secundă.

III.

Principiul de funcționare al mașinei dinamo și al alternatorului.

## CALCUL LOGARITMIC

Propuse de E. ABASON

Să se calculeze expresiunea:

$$E = 14{,}3284 \sqrt[4]{\frac{1 - \cos 131^0\ 15'}{1 + \cos 131^0\ 15'}}.$$

Se va încercà în prealabil să se pună radicalul sub o formă mai simplă, transformând expresiunea de sub radical.

ȘCOALA POLITECHNICĂ «REGELE CAROL II» BUCUREȘTI

## GEOMETRIE ANALITICĂ

### (Aplicațiuni geometrice)

SECȚIA DE MINE (Ciclul I)

*Examenul dela 22 Iunie 1930 (8 — 11 a. m.)*

**Toate chestiunile obligatorii**

Propuse de Conf. E. ABASON

I. Ce este raza de curbură medie și raza de curbură într'un punct, la o curbă plană?

Se consideră curba plană:

$$y^2 = 2px$$

și se cere:

1. Expresia razei de curbură în punctul de abscisă $\alpha$.
2. Valoarea razei de curbură în punctul $x = 0$, $y = 0$.

II. Se dă curba strâmbă:

$$x = r \cos t,\ y = r \sin t,\ Z = Kt$$

în care *r* și K sunt constante, iar *t* un parametru variabil.

Insemnând cu R şi T, respectiv raza de curbură şi de torsiune într'un punct oarecare al curbei, să se demonstreze relaţiunea:

$$\frac{T}{R} = \frac{r}{K}.$$

III. Cum se poate dovedi în mod intuitiv că o curbă strâmbă este determinată ca *formă* când se cunoaşte raza de curbură şi de torsiune în fiecare din punctele ei?

## GEOMETRIE ANALITICĂ

*Examenul dela 20 Iunie 1931 (8 — 11 a. m.)*

(ANUL I SECŢIA CONSTRUCŢII)

*Lucrare scrisă*

### Chestiuni obligatorii

Propuse de Conf. E. Abason

I. Se consideră curba, definită prin ecuaţia:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

şi se cere să se arate că raza de curbură într'un punct oarecare este egală cu lungimea normalei din acel punct.

Să se deducă o construcţiune geometrică a centrului de curbură.

II. Definiţia planului osculator la o curbă strâmbă şi ecuaţia sa. Să se determine planul osculator într'un punct, la curba:

$$x = 1 - t \quad , \quad y = t^2 \quad , \quad z = 1 + t$$

şi să se arate care este poziţia acestui plan faţă de axele de coordonate. Să se explice, geometric, rezultatul.

III. Se consideră suprafaţa, definită prin ecuaţia:

(1) $$z = (\alpha - 1)x + (\beta - 2)y + \alpha x^2 + 2xy + \beta y^2 + x^3 + y^3$$

şi se cere:

1°. Ecuaţia planului tangent la suprafaţa în origina axelor coordonate.

2°. Să se determine $\alpha$ şi $\beta$ astfel ca suprafaţa (1) să admită în origină un paraboloid osculator şi în acest caz să se determine natura acestui paraboloid.

### Chestiune facultativă

Să se arate că dacă raza de curbură într'un punct oarecare al unei curbe plane este egală cu lungimea normalei din acel punct, — atunci curba este un lănţuşor.

(Reciproca problemei dela Nr. 1).

## EXAMEN GENERAL DE MATEMATICI GENERALE

### SECŢIA INDUSTRIALĂ ŞI SILVICĂ (Ciclul I)

*31 Maiu 1931*

**Chestiuni comune pentru Secţia Industrială şi Silvică**

Propuse de Conf. E. ABASON

I. Se consideră funcţiunea:

$$y = \frac{x^4}{24} + \alpha\,(x - \sin x) + \beta\,(e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1)$$

şi se cere:

1. Să se arate că $y$ este un infinit mic.

2. Să se determine coeficienţii $\alpha$ şi $\beta$ astfel ca ordinul infinitului mic $y$ să fie cel mai înalt posibil; $\alpha$ şi $\beta$ astfel determinaţi, să se afle valoarea principală a lui $y$.

II. Se dă funcţiunea:

$$y\,(x) = e^{kx} \qquad (k > 0)$$

şi se cere:

1. Să se construiască arcul AB, care reprezintă această funcţiune între $x = 0$ şi $x = a$, $a$ fiind un număr pozitiv oarecare.

2. Însemnând cu $\mathcal{A}_0$, aria mărginită de arcul AB, axele $Ox$, $Oy$ şi de dreapta $x - a = 0$, să se demonstreze relaţia:

$$\mathcal{A}_0 = \frac{1}{k}\,[y\,(a) - y\,(0)].$$

3. Să se calculeze volumul născut prin rotirea arcului AB în jurul *axei* $Oy$.

III. Să se afle curbele din plan, care au proprietatea că raportul dintre *subnormala* şi *subtangenta* într'un punct oarecare, este constant şi egal cu K.

Să se verifice apoi rezultatul pe curbele astfel aflate.

**(Toate chestiunile de mai sus sunt obligatorii)**

**Chestiune obligatorie numai pentru Secţia Industrială**

Să se desvolte în serie FOURIER, funcţiunea periodică de perioadă $2\pi$, definită prin diagrama alăturată:

$y = \frac{\pi}{2}$, pentru $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $y = -\,(x - \pi)$ pentru $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

şi $y = -\frac{\pi}{2}$ pentru $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

Care este amplitudinea armonicei de ordinul 5?

(Timpul acordat $8\frac{1}{2} - 11\frac{1}{2}$ pentru Secţia Silvică; $8\frac{1}{2} - 12$ pentru Secţia Industrială).

## GEOMETRIE ANALITICĂ

### (Aplicaţiuni geometrice)

SECŢIA ELECTROMECANICĂ (Ciclul I)

*Examenul dela 21 Iunie 1931 (8 — 11 a. m.)*

**Toate chestiunile obligatorii**

Propuse de Conf. E. ABASON

I. Se consideră curba plană:

$$y = A \cdot e^{kx}$$

fie N proecţia pe axa $Ox$ a unui punct oarecare M al curbei, iar P punctul unde normala în M la curbă întâlneşte axa $Ox$; însemnând cu R raza de curbură în M, să se demonstreze relaţiunea:

$$R = \frac{\overline{MP}^3}{\overline{NP}^2} .$$

II. Se dă curba strâmbă, definitivă de ecuaţiile:

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ \sqrt{2} \cdot z = xy \end{cases}$$

şi se cere:

1. Să se calculeze coordonatele punctului M de pe curba (1), ştiind că $x = z$, $y = \sqrt{2}$.

2. Să se scrie ecuaţiile tangentei la curbă în punctul M, aflat în diedrul pozitiv al axelor de coordonate şi să se afle cosinusurile directoare ale tangentei.

3. Ecuaţia planului normal în M; să se explice geometric rezultatul.

4. Ecuaţia planului osculator în M.

## ȘCOLILE MILITARE, PREGĂTITOARE ȘI SPECIALE ALE AERONAUTICEI «REGELE CAROL II»

*Examenul de admitere din August 1931*

### A) Secția Naviganți

### ALGEBRA

Se dă ecuația următoare (de gr. III):

$$x^3 + (m-4)\,x^2 + (3-2\,m)\,x + 2 = 0.$$

Una din rădăcini fiind 2, să se afle condiția ca celelalte două rădăcini ale ei să fie egale și de sens contrariu.

Să se afle acele rădăcini.

2. Să se afle *suprafața maximă* a unui triunghiu ABM știind că vârful M al său se plimbă pe semicercul AMB.

Să se aplice pentru cazul când Raza = 5 m.

3. Să se afle derivata expresiei

$$y = \frac{a}{x} + \sqrt{x^2 - 1}.$$

### TRIGONOMETRIE

1. Să se demonstreze identitatea:

$$\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4 \cos A \cos B \sin C.$$

2. Care sunt arcele $x$ ce satisfac ecuației

$$\sin x - \sin 4x = 0.$$

3. Să se culculeze distanța orizontală dela un punct A pânăla un turn T, presupunând că între A și T există un obstacol așezat astfel, încât nu se poate vedeà decât vârful turnului și nici nu se poate măsurà distanța cerută direct pe teren din A la vârful turnului.

### GEOMETRIE

1. Prin punctul M din interiorul cercului O se duce coarda AB, astfel încât AM = 9 cm. și BM = 4 cm. — Să se afle lungimea unei coarde CD dusă tot prin punctul M, astfel încât CM să fie egal cu MD.

2. Se dă un trunchiu de con plin de înălțime $h$ și având respectiv $4r$ și $2r$ diametrele celor 2 baze. Se consideră conul având drept bază, baza mică a trunchiului de con, iar vârful conului în centrul celeilalte baze. Scoțând conul din trunchiul de con se cere să se calculeze:

suprafața totală și volumul corpului solid rămas.

Aplicație pentru $r = 30$ cm., $h = 40$ cm.

Timp de lucru 4 ore.

B) **Secția Mecanici**

## ALGEBRĂ

1. Să se găsească valoarea lui $p$ din ecuația

$$x^2 + px + 3 = 0$$

știind că una din rădăcini este de două ori mai mare ca cealaltă.

Să se descompună apoi trinomul din membrul întâiu în factori.

2. Să se afle valoarea fracției:

$$\frac{\sqrt[3]{1 + x^2} + \sqrt[3]{1 - x^2}}{\sqrt[3]{1 + x^2} - \sqrt[3]{1 - x^2}}$$

pentru $x = \sqrt{\frac{b\,(3a^2 + b^2)}{a\,(a^2 + 3b^2)}}$.

3. Suma celor trei laturi ale unui triunghiu dreptunghiu este de 208 metri, iar suma celor 2 catete este cu 30 metri mai mare ca ipotenuza. Să se calculeze lungimea celor 3 laturi.

## TRIGONOMETRIE

1. Să se demonstreze identitatea

$$\cos 2x = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}.$$

2. Să se calculeze $\cos 2x$ în funcție de $\operatorname{tg} x$.

Aplicație pentru $x = 30^0$.

## GEOMETRIE

1. Fie coarda AMB în cercul O, astfel încât AM = 9 cm. și MB = 4 cm. Se duce prin punctul M o altă coardă CD, așa încât CM = MD. Se cere lungimea corzei CD.

2. Să se afle greutatea unui obuz de $420^{m}/_{m}$ diametru, care are forma unui cilindru terminat cu un con — Cilindrul are lungimea de 80 cm., iar lungimea totală a obuzului este de 1,25 m. — Obuzul e făcut din fontă oțelită de densitatea 6,5, iar în interior are o cavitate de formă cilindrică lungă de 60 cm. și diametrul de $220\ ^{m}/_{m}$, plină cu exploziv (densitatea explozivului fiind 1,5).

Timp de lucru 4 ore.

# BIBLIOGRAFIE

**Exercices de Mecanique** par H. BEGHIN et G. JULIA. Tome I. Fascicule II. Ed. Gauthiers — Villars & C-nie, Paris.

Este continuarea lucrărei despre care am făcut o dare de seamă în G. M. Anul 36 Nr. 7. Cuprinde următoarele capitole :

I. *Legile fundamentale ale Mecanicei. Acţiuni de contact. Schimbarea sistemului de referinţă. Mecanica Terestră.* Şi în acest capitol, ca şi în cele următoare, la început se face un rezumat al cunoştinţelor teoretice necesare pentru urmărirea problemelor tratate. Introduce dela început forţele de inerţie, astfel că problemele de dinamică le reduce la statică ; deasemenea în loc de noţiunea de axe fixe introduce sistemele galileene, menţinându-se însă în domeniul mecanicei clasice. Cuprinde 8 probleme tratate, bine alese.

II. *Generalităţi asupra rezoluţiunii problemelor de mecanică. Teoremele generale.* Este capitolul cel mai dezvoltat, cuprinde 18 probleme foarte variate şi complet tratate.

III. *Lucru şi puterea mecanică.* E mai puţin desvoltat, insistând mai mult asupra chestiunelor mai delicate; cuprinde 8 probleme tratate.

IV. *Teorema lucrului virtual şi Teorema energei cinetice.* In partea introductivă examinează amănunţit condiţiile în care se aplică aceste teoreme, în special în ce priveşte legăturile ; cuprinde 16 probleme tratate, referindu-se în cea mai mare parte la chestiuni de echilibru şi determinări de forţe de legături.

V. *Ciogniri şi percusiuni.* Analizează amănunţit natura problemei şi dificultăţile ce ea prezintă în mod general; examinează deasemenea cazul ciognirilor cu frecări ; cuprinde 8 probleme complet tratate.

VI. *Ecuaţiile lui* LAGRANGE. *Aplicarea la ciogniri şi percusiuni.* In partea introductivă pune în evidenţă condiţiunele în care ecuaţiile lui LAGRANGE sunt aplicabile, arătând pentru ce în cazul legăturilor neholonoame ele nu se aplică ; tot în acest capitol se examinează şi cazul oscilaţiilor foarte mici precum şi cazul când intervin percusiuni. Cuprinde numai 6 probleme tratate.

Această lucrare, nu e o simplă carte de probleme de mecanică ; în părţile introductive ale fiecărui capitol dă o vedere completă asupra materii respective, cuprinzând multe idei noui şi originale. Ea poate fi utilizată cu folos nu numai de studenţii universitari dar şi de elevii şcolilor speciale, în special capitolele menţionate mai sus sub numerile I — IV.

A. G. I.

**Bulletin of the American Mathematical Society.** Vol. XXXVII. No. 6 iunie 1931. New-York. Ecuaţiuni lineare cu diferenţe $q$, de C. R. ADAMS. Reminiscenţe despre GIBBS la un student şi la colegi, de E. B. WILSON. Despre legătura a două complexe, de A. B. BROWN Asupra numărului de puncte duble aparente pe curbele din spaţiul $r$, de B. C. WONG. Echivalenţa tripleurilor de forme biliniare, de O. E. BROWN. Generalizarea unei teoreme a lui KRONECKER, de B. L. VAN DER WAERDEN. (Extras din o scrisoare a lui J. F. RITT). Asupra

teoremei conectivităţii ciclice, de G. T. WHYBURN. Inmulţirea ideală în o algebră lineară, de G. SHOVER & C. C. MACDUFFEE. O desvoltare anumită multiparametrică, de H. P. DOOLE. Invarianţi integrali proiectivi ataşaţi la traiectoriile sistemelor diferenţiale, de A. D. MICHAL. O notă asupra seriilor factoriale geometrice, de G. W. STARCHER. Notă asupra formelor funcţionale cuadratice în o funcţiune şi primele ei $p$ derivate, de R. S. MARTIN. Proprietăţile operatorului $z-\nu \log z$, unde $z = d/dx$, de H. T. DAVIS. Teoria deducţiunii a lui WHITEHEAD şi RUSSEL ca ştiinţă matematică, de B. A. BERNSTEIN.

**Idem.** No. 7. Iulie 1931. Adunarea din lunie din Seattle, de T. M. PUTNAM. MOULTON asupra ecuaţiilor diferenţiale, de W. B. FIFE. DIRAC despre Mecanica quantelor, de B. O. KOOPMAN. Comentariile lui PAPPUS asupra lui EUCLIDE, de D. E. SMITH. YOUNG despre geometria proiectivă, de W. B. CARVER. DUNHAM JACKSON despre aproximaţiuni, de J. SHOHAT. Sumare de comunicări.

**Idem.** No. 8. August 1931. Câteva desvoltări recente în algebra abstractă, de O. ORE. Demonstraţie a teoremei lui WARING relativă la puterile a cincea, de L. E. DICKSON. O teoremă de existenţă pentru constantele caracteristice ale sămburilor de tip pozitiv, de C. E. SEELY. Unele teoreme asupra curbelor plane, de W. V. P. PARKER. O demonstraţie asupra identităţii integralei lui RIESZ, cu integrala lui LEBESGUE, de W. M. WHYBURN. Fracţii continui ternare inverse, de D. N. LEHMER. Un sistem complect sub unele grupe finite, de C. W. SROM. Criterii de convergenţă pentru fracţii continui, de H. S. WALL. Limita soluţiunilor aproximative a problemei torsiunii, de D. L. HOLL & E. W. ANDERSON. Rădăcinile latente ale unei matrice de tip special, de J. WILLIAMSON. Notă asupra unei teoreme a lui BÖCHER şi KOEBE, de J. J. GERGEN. Metode complexe de sumabilitate, de R. P. AGNEW. Relaţiuni în armonicele sferice, de J. H. WEBB. Criteriu pentru rezolvarea unei anumite ecuaţiuni patratice diofantine, de R. C. ARCHIBALD. O suprafaţă chintică raţională neavând nici o curbă dublă, de A. R. WILLIAMS. Spacii satisfăcând prima axiomă de enumerabilitate, de S. ROBINSON. Adaos la funcţiunile numerice de factorizare, de E. T. BELL. O observare privitoare la condiţiunile necesare ale lui WEIERSTASS, de E. J. MCSHANE. O corecţiune şi un adaos, de G. E. RAYNOR.

**Anales de la Sociedad Cientifica Argentina.** Tomul CXII. Fascicola 1 Iulie 1931. Buenos-Aires. Determinarea unei legi de probabilitate pe baza momentelor sale, de C. DIEULEFAIT. Metodele de sumare a seriilor duble divergente, de J. C. VIGNAUX. Asupra unei critice a lui DARBOUX relativă la o teoremă a lui PONCELET, de C. C. DASSEN.

**Idem.** Fascicola I. August 1931. Munca depusă la observatorul astronomic din Paris, de B. H. DAWSON. Perspectiva centrală a figurilor plane fără linii de construcţii şi fără usagiul imaginarelor, de C. C. DASSEN.

**Boletin Matematico.** Anul IV. No. 4. lunie 1931. Buenos-Aires. Asupra teoremei medii în calculul integral, de C. E. DIEULEFAIT. Asupra teoremei D-lui POMPEIU, de ION B. FLORESCU.

**Journal de mathématiques élémentaires,** publié par H. VUIBERT. Anul 56. No. 1. Octomvrie 1931. Paris.

**Universitatea din Cluj, Facultatea de ştiinţe, Seminarul de matematici.** Activitatea didactică şi ştiinţifică, pe anul şcolar 1929/1930.

P. SERGESCU. Note din activitatea *Societăţii matematice* în anul 1921 Bucureşti 1931.

P. SERGESCU. Sur le module des zéros des dérivées des fonctions bornées. (Extras din *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des sciences. Congrès d'Alger.* 1930). Paris 1830.

P. SERGESCU. Discours fait à la séance inaugurale du Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences à Alger, en 1930.

## CERERI

210. In o comunicare făcută de curând la Academia Română, D-l N. IORGA a spus că pe valea Topologului se măsoară locurile cu *chinga*. Să se stabilească mărimea acestei unităţi. Procedeul se mai utilizează prin alte părţi ?

I. I.

## DIVERSE

Societatea Română de Ştiinţe, Secţia matematică, şi-a reluat activitatea în seara zilei de 5 Octomvrie, când au făcut comunicări, D-l G. VÂLCEANU asupra unor sisteme mecanice, D-l GR. MOISIL despre mişcarea sferică a unui fluid incompresibil şi D-l N. TEODORESCU despre integrarea sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale ale micilor mişcări staţionare ale unui fluid vâscos.

Intre 23 şi 26 Septemvrie anul acesta a avut loc la Vilna al doilea Congres al matematicianilor Polonezi, sub preşedinţia D-lui S. DICKSTEIN. Au fost aleşi ca Preşedinţi de onoare D-nii A. DENJOY şi P. SERGESCU. Printre comunicări, cea făcută de D-l L. GODEAUX din Liège a avut ca titlu „Suprafeţele lui ŢIŢEICA şi teoria generală a suprafeţelor". D-l P. MONTEL din Paris a trimis o comunicare intitulată „Extinderea rezultatelor D-lui P. SERGESCU". D-l P. SERGESCU a făcut o conferinţă cu titlul „Caracterele generale ale matematicii în antichitate" şi o comunicare : „Câteva proprietăţi ale polinoamelor". Au participat vre-o 200 congresişti. Viitorul Congres al matematicianilor poloni va avea loc, probabil, în Cracovia, în anul 1935.

# PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1482. *Să însemnăm cu* $N_n$ *un număr compus din* n *cifre toate egale cu* 1. *Să se arate că dacă* n *este cuprins între* 3 *şi* 11, *cel mai mic multiplu al lui* $N_n$, *care nu are* 2 *cifre alăturate indentice, este* $N_n\,(N_{n-1} + N_2 - n)$.

*Să se găsească expresiuni analoage pentru* n *mai mare ca* 11.

GH. EM. FILIPESCU.

Deoarece enunţul nu este exact decât în parte, după cum se va vedeà mai jos, îmi propun să găsesc, în cele ce urmează, cel mai mic număr al cărui produs cu $N_n$ să nu aibă 2 cifre alăturate indentice.

Fie $M = a_p\, a_{p-1}\, a_{p-2} \ldots a_1$ un număr de $p$ cifre. Să vedem ce condiţiuni trebuie să îndeplinească cifrele lui pentru ca produsul $M \times N_n$ să nu aibă 2 cifre alăturate indentice. Cum pentru soluţionarea problemei ce ne-am propus, interesează valorile cele mai mici ale lui M, vom presupune la început că $p < n$, iar numai dacă în acest caz nu vom găsì valori pentru M, vom presupune şi $p \geqslant n$.

Scrim desvoltat produsul $M \times N_n$

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & 111 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 11 \\
 & & & & a_p & a_{p-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_1 \\
\hline
 & & & & a_1 & \ldots & a_1 & a_1 & \ldots & a_1 & a_1 & \\
 & & & a_2 & a_2 & \ldots & a_2 & a_2 & \ldots & a_2 & & \\
 & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \\
 & a_{p-1} & \ldots & a_{p-1} & a_{p-1} & \ldots & a_{p-1} & a_{p-1} & & & & \\
a_p & a_p & \ldots & a_p & a_p & \ldots & a_p & & & & & \\
\hline
b_{n+p-1} & & \ldots & b_{n+1} & b_n & \ldots & b_p & b_{p-1} & \ldots & b_2 & b_1 &
\end{array}
$$

Din operaţia de mai sus, se vede că cea mai mare probabilitate să obţinem cifre alăturate indentice este la coloana $p$, $(p+1) \ldots n$, de aceea vom studià mai deaproape aceste coloane. Fie $c_p$ cifra zecilor ce o obţinem sumând coloana $p$; avem:

$$c_{p-2} + a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} = 10\, c_{p-1} + b_{p-1}$$

$$c_{p-1} + a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} + a_p = 10\, c_p + b_p$$

$$(1)\quad c_p + a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} + a_p = 10\,c_{p+1} + b_{p+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_{n-1} + a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} + a_p = 10\,c_n + b_n .$$

Pentru ca $b_p$ să fie diferit de $b_{p+1}$ este necesar şi suficient ca $c_p$ să fie diferit de $c_{p-1}$, şi cum $c_i$ nu poate diferi de $c_{i-1}$ decât cu 1, urmează că $c_p = c_{p-1} + 1$. Să vedem acum dacă $b_{p+2}$ ar puteà fi diferit de $b_p$ în ipoteza că $p + 2 \leqslant n$. După cele de mai sus ar trebuì $c_{p+1} = c_p + 1 = c_{p-1} + 2$; ori din egalităţile (1) se deduce

$$(2)\quad c_p - c_{p-1} = 10\,(c_{p+1} - c_p) + b_{p+1} - b_p$$

$$\therefore\quad 1 = 10 + b_{p+1} - b_p \qquad b_{p+1} = 0 \qquad b_p = 9.$$

Tot din (1) se deduce:

$$(3)\quad c_{p-1} - c_{p-2} + a_p = 10\,(c_p - c_{p-1}) + b_p - b_{p-1} = 10 + 9 - b_{p-1}$$

cum $b_{p-1}$ trebuie să fie diferit de $b_p$, el poate să fie maximum 8, deci cea mai mică valoare a părţi a $2^a$ din egalitatea (3) poate fi $10 + 9 - 8 = 11$, pe când partea $1^a$ nu poate aveà decât cel mult valoarea $1 + 9 = 10$. Prin urmare relaţia (3) nu poate aveà loc dacă $b_p = 9$ şi deci nici relaţia (2), ceeace înseamnă că $b_{p+2}$ nu poate fi diferit de $b_{p+1}$ dacă provine dintr'o coloană de forma:

$$c_{p+1} + a_1 + a_2 + \ldots + a_p = 10\,c_{p+2} + b_{p+2}.$$

Pentru a nu provenì dintr'o astfel de sumă, trebuie ca $p + 2 > n$. De unde concluzia:

*Pentru ca produsul* $M \times N_n$ *să nu aibă 2 cifre alăturate indentice este necesar ca* M *să aibă cel puţin* n — 1 *cifre.*

Să vedem dacă există numere M de $(n - 1)$ cifre; adică să presupunem:

$$M = a_{n-1}\,a_{n-2} \ldots a_2 a_1.$$

Cele mai mici numere de $(n - 1)$ cifre se găsesc printre cele care încep cu 1, deci vom presupune la o primă analiză că $a_{n-1}$ este 1 şi căutăm dacă există astfel de numere care să răspundă problemei noastre.

Cifrele lui M vor satisface inegalităţile:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} < 10$$

$$(4) \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_{r_1-1} + a_{r_1} \geqslant 10$$

$$1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{r_1} + \ldots + a_{r_2-1} < 20$$

$$1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{r_1} + \ldots + a_{r_2} \geqslant 20$$

. . . . . .

$$(4) \quad (q-2) + a_1 + a_2 + \ldots + a_{r_{q-1}-1} < (q-1)\,10$$

$$(q-2) + a_1 + a_2 + \ldots + a_{r_q-1} \geqslant (q-1)\,10$$

$$(q-1) + a_1 + a_2 + \ldots + a_{r_q-1} < q\,10$$

$$(q-1) + a_1 + a_2 + \ldots + a_{r_q} \geqslant q\,.\,10.$$

Deoarece $c_{n-1} = c_{n-2} + 1$ (dedusă din $c_p = c_{p-1} + 1$) înseamnă ca $a_{n-1}$ coincide cu un $a_{r_s}$, să presupunem deci

$$a_{n-1} = 1 = a_{r_q}.$$

Ultimele inegalități din (4) devin în acest caz

$$q - 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{r_q-1} < 10q$$

$$q - 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{r_q-1} + 1 \geqslant 10q.$$

Din compararea cărora rezultă că la ultima relație trebue să luăm numai semnul $=$ .

$$(5) \qquad \therefore \quad a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_{r_q-1} + 1 = 9q + 1.$$

*Dacă există numere* M *de* n — 1 *cifre, care să înceapă cu 1 , astfel încât produsul* $M \times N_n$ *să nu aibă cifre alăturate identice, suma cifrelor lui este multiplu de 9, plus 1.*

Tot din inegalitățile (4) ce deduce că $a_s$ dacă $s \leqslant r_1$ nu poate fi 0 căci în acest caz $b_s$ ar fi identic cu $b_{s-1}$; $a_{r_1+1}$ poate fi însă 0, căci în acest caz $b_{r_1+1}$ ar fi diferit de $b_{r_1}$ . Din aproape în aproape se deduce ca singurele cifre ale lui M care pot fi zero sunt cele cu indicii de forma $r_s + 1$.

Printre numerile M de $n - 1$ cifre care încep cu 1, cele mai mici trebuie căutate printre cele cari încep cu 10, iar numai dacă nu există de acestea, trebuie să-i dăm lui $a_{n-2}$ valori mai mari cu 0. Insă dacă

$$a_{n-2} = a_{r_q-1} = 0$$

urmează, după cele de mai sus, că indicele $r_q - 1$ este de forma

$r_s + 1$ deci este egal cu $r_{q-1} + 1$, ţinând seamă de aceasta şi de (5), ultimele inegalităţi din (4) devin:

$$q - 2 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-4} < 10\,(q-1)$$

$$(6)\quad q - 2 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-3} \geqslant 10\,(q-1)$$

$$q - 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-3} + 0 = 10\,q - 1$$

deoarece $a_{n-2} = 0$

$$\therefore\quad q - 2 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-3} = 10\,(q-1) + 8$$

care scăzută din prima inegalitate din (6) ne dă

$$-a_{n-3} < -8 \quad \text{sau} \quad a_{n-3} > 8$$

$a_{n-3}$ trebuie să fie neapărat 9 şi deci dacă există numere M de $n - 1$ cifre încep cu 10 ele trebuie să înceapă cu 109.

Urmând un raţionament analog ajungem la concluzia că cele mai mici numere M de $n - 1$ cifre, dacă există sunt de forma

$$10909\ldots09\,abc\ldots h.$$

Pintre cele mai mici numere M de această formă, ţinând seama şi de (5) sunt următoarele:

$$109\ldots09\ ;\ 10909\ldots099\ ;\ 10909\ldots0918$$

$$109\ldots09117 \text{ etc.}$$

Numărul 109 . . . 09 nu convine problemei căci produsul lui cu $N_n$ ne dă ultimele două cifre 9 şi 9 deci identice.

Numărul 109 . . . 099 are $2m$ cifre, în ipoteza că grupa 09 se repetă de $m - 1$ ori, deci ar puteà conveni pentru numerile $N_n$ în cari $n = 2m + 1$.

Pentru a vedeà dacă convine sau nu, efectuăm produsul:

$$N_{2m+1} \times 1\,\underbrace{09\ldots09}_{m-1}\,.9$$

Ori

$$M = \underbrace{109099}_{(m-1)} = 9+9\cdot 10+9\cdot 10^3+\ldots+9\cdot 10^{2(m-1)-1}+10^{2(m-1)+1}$$

$$= 9+9\cdot\frac{10^{2m-1}-10}{10^2-1}+10^{2m-1} = 9+\frac{10^{2m-1}-10}{11}+10^{2m-1}$$

$$M = \frac{12\cdot 10^{2m-1}+89}{11}$$

$$N_{2m+1} = 10^{2m}+10^{2m-1}+\ldots+1 = \frac{10^{2m+1}-1}{9}$$

$$\therefore\ M\times N_{2m-1} = \frac{12\cdot 10^{4m}+89\cdot 10^{2m+1}-12\cdot 10^{2m-1}-89}{99}$$

$$= \frac{12.10^{4m}-12.10^{2m+2}+12.10^{2m+2}+89.10^{2m+1}-12.10^{2m-1}-89.10^{2m-2}+89.10^{2m-2}-89}{99}$$

$$= \frac{12\cdot 10^{4m}-12\cdot 10^{2m+2}+208791\cdot 10^{2m-2}+89\cdot 10^{2m-2}-89}{99}$$

$$= 12\cdot\frac{10^{2m-2}-1}{10^2-1}\cdot 10^{2m+2}+2109\cdot 10^{2m-2}+89\cdot\frac{10^{2m-2}-1}{99}$$

$$\therefore\qquad M\times N_{2m+1} = \underbrace{12\ldots12}_{(m-1)}\ 2109\ \underbrace{89\ldots89}_{m-1}.$$

De aci se vede că numai dacă $m-1=0$, numărul $109\ldots099$ are la produsul lui cu $N_{2m+1}$ cifre alăturate neidentice, deci:

*Cel mai mic număr care înmulţit cu* $N_3 = 111$ *ne dă un produs cu cifre alăturate neidentice este 19.*

Numărul $\underbrace{109\ldots0918}_{m-1}$ are $2m+1$ cifre, deci ar puteà co n-

veni pentru numere $N_n$ în care $n = 2m+2$.

Ori, repetând procedeul se găseşte:

$$M = \underbrace{109\ldots0918}_{m-1} = \frac{12\cdot 10^{2m}+98}{11}$$

$$N_{2m+2} = \frac{10^{2m+2}-1}{9}$$

$$N_{2m+2}\times M = \underbrace{12\ldots12}_{m-1}\ 1310\ \underbrace{98\ldots98}_{m}.$$

Acest produs nu are cifre alăturate identice, de unde schimbând puţin notaţiile, propoziţiunea :

*Cel mai mic număr care înmulţit cu* $N_{2n}$ *pentru* $n \geqslant 2$ *, dă un produs cu cifre alăturate neidentice este* $M = \underbrace{109\ldots0918}_{(n-2)}$ .

Exemplu pentru $n = 2$ $\quad M = 118$

$n = 3$ $\quad M = 10918$ etc.

Numărul $\underbrace{109\ldots09}_{m-1}117$ are $2m + 2$ cifre deci ar puteà conveni pentru numere $N_n$ în cari $2m + 3 = n$.

Ca şi mai sus găsim :

$$M = \underbrace{109\ldots09}_{m-1}117 = \frac{12 \cdot 10^{2m+1} + 287}{11}$$

$$M_{2m+3} = \frac{10^{2m+3} - 1}{9}$$

$$M \times N_{2m+3} = \underbrace{12\ldots12}_{m}4\underbrace{109898\ldots987}_{m}.$$

Deasemenea nici acest produs nu are cifre alăturate identice, de unde propoziţiunea :

*Cel mai mic număr care inmulţit cu* $N_{2n+1}$ *pentru* $n \geqslant 2$, *dă un produs care nu are 2 cifre alăturate identice este*

$$M = \underbrace{109\ldots09}_{(n-2)}117 .$$

Pentru $n = 1$ se găseşte uşor direct $M = 1$ , iar pentru $n = 2$ deasemenea se găseşte $M = 11$.

Rezumând, dacă notăm cu $M_n$ cel mai mic număr astfel încât produsul $M_n \times N_n$ să nu aibă cifre alăturate identice, avem :

$n = 1$ $\quad M_1 = 1$ ; $n = 2$ $\quad M_2 = 11$ ; $n = 3$ $\quad M_3 = 19$

$n = 2p \geqslant 4$ $\quad M_n = \underbrace{109\ldots0918}_{p-2}$

$n = 2p + 1 \geqslant 5$ $\quad M_n = \underbrace{109\ldots09}_{p-2}117$ .

Enunţul problemei 1482 nu este exact decât pentru $3 \leqslant n \leqslant 5$.

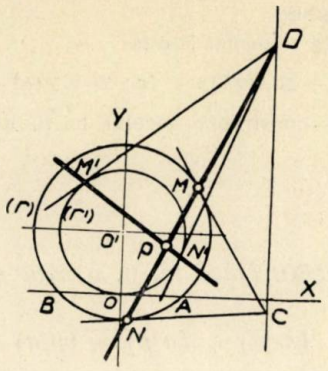
IOAN B. FLORESCU.

PROBLEMA 1968. *Se dau într'un plan trei puncte* A, B, C. *Fie* D *punctul de întâlnire al polarei lui* C *în raport cu cercurile care trec prin* A *şi* B, *cu perpendiculara coborîtă din* C *pe dreapta* AB. *Se cere locul punctelor de contact al tangentelor duse din* D *la cercurile concentrice cercurilor ce trec prin* A *şi* B *şi care sunt tangente dreptei* AB.

P. I. DIDICESCU.

*Soluţie* dată de D-l I. C. VASILIU (Şc. Politecnică, Bucureşti).

Fie O mijlocul lui BC; O$y$ perpendiculară pe BC; ($\Gamma$) unul din cercurile variabile care trec prin B şi C; O' centrul lui ($\Gamma$); ($\Gamma'$) un cerc cu centrul în O' şi cu raza OO'; MN polara lui C faţă de ($\Gamma$); M'N' polara lui D faţă de ($\Gamma'$) şi P intersecţia lui MN cu M'N'.




lau ca axe de coordonate pe BC şi O$y$. Fie A ($a$, 0), B ($-a$, 0), C ($p$, $q$), O' (0 $\lambda$). Ecuaţia lui ($\Gamma$) este

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y - a^2 = 0$$

iar acea a polarei lui C faţă de ($\Gamma$).

$$(1) \qquad px + (q - \lambda)\, y - q\lambda - a^2 = 0.$$

Din (1) şi ecuaţia

$$x - p = 0$$

a dreptei CD se găsesc coordonatele lui D:

$$D\left[p\ ,\ \frac{a^2 + \lambda q - p^2}{q - \lambda}\right].$$

Ecuaţia lui (Γ') este

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0 \tag{2}$$

iar polara lui D faţă de (2) este

$$p(q-\lambda)x + (a^2 + \lambda q - p^2)(y-\lambda) - \lambda(q-\lambda) = 0. \tag{3}$$

Eliminând pe $\lambda$ între (2) şi (3) se găseşte că locul cerut în enunţ este curba de ecuaţie:

$$(y-q)(x^2+y^2)^2 - 2y(px + a^2 - p^2)(x^2+y^2) + 4y^2[qx + (a^2 - p^2)y] = 0. \tag{4}$$

*Notă.* 1°. Dacă in (4) se înlocueşte $y$ prin $tx$ se obţine ecuaţia de gradul al doilea în $x$:

$$(tx-q)(1+t^2)x - 2(ptx + a^2 - p^2)t(1+t^2) + 4t^2[q + (a^2-p^2)t] = 0 \tag{5}$$

care este uşor de construit.

2°. Ecuaţia polară a locului P este

$$\rho^2 \sin\theta - (q + 2p\sin^2\theta)\rho + 4q\cos\theta + 2(a^2 - p^2)\sin\theta = 0.$$

3°. Vom publică construcţia locului lui P, dacă ni se va trimite de vre-un corespondent.

Gh. B.

---

PROBLEMA 2580. *Dacă* m, n, p *sunt numere întregi, în ce caz suma:*

$$(m/n) + (n/p) + (p/n)$$

*este un întreg?*

I. Ionescu.

E destul să ne ocupăm de cazul când cele trei numere $m, n, p$ nu au nici un divizor comun, căci odată o asemenea soluţiune găsită, echimultiplii numerelor $m, n, p$ sunt şi ei soluţiuni. In adevăr, înlocuind în suma dată pe $m, n, p$ cu $am, an, ap$, fracţiile nu-şi schimbă valoarea şi suma lor rămâne aceeaşi, oricare ar fi numărul întreg $a$.

Să punem:

$$(m/n) + (n/p) + (p/m) = t, \tag{1}$$

în care $t$ e un întreg. Gonind numitorii găsim:

$$m^2p + n^2m + p^2n = mnpt. \tag{2}$$

Să presupunem că $m$ şi $n$ au pe $d$ cel mai mare comun divizor, şi să punem:

$$m = dm' \quad , \quad n = dn'. \tag{3}$$

Inlocuind în (2) pe $m$ şi $n$ găsim:

$$d^2m'^2p + d^3m'n'^2 + dn'p^2 = d^2m'n'pt,$$

$$\therefore \quad dm'^2p + d^2m'n'^2 + n'p^2 = dm'n'pt. \tag{4}$$

Toţi termenii se divid cu $d$ afară de $n'p^2$. Acesta trebuie dar să se dividă prin $d$. Insă $d$ este prim cu $p$, căci altfel el divizând pe $m$ şi $n$ după (3), cele trei numere $m$, $n$, $p$ ar aveà un divizor comun, ceeace e contra ipotezei ce am făcut. Trebuie dar ca $n'$ să se dividă cu $d$, adică să avem:

$$n' = dn''. \tag{5}$$

Inlocuind avem:

$$dm'^2p + d^4m'n''^2 + dn''p^2 = d^2m'n''pt,$$

$$\therefore \quad m'^2p + d^3m'n''^2 + n''p^2 = dm'n''pt. \tag{6}$$

Din (3) se vede că $d$ fiind cel mai mare comun divizor al lui $m$ şi $n$, câturile acestora împărţite cu $d$, adică $m'$ şi $n'$, vor fi prime între ele. Dar după (5), numărul $n''$ este divizor al lui $n'$, deci va fi şi el prim cu $m'$. In egalitatea (6) toţi termenii au pe $n''$ ca factor afară de primul $m'^2p$. Am arătat că $m'$ este prim cu $n''$. Acesta trebuie deci să dividă pe $p$. Să punem:

$$p = n''p'. \tag{7}$$

Inlocuind în (6) găsim:

$$m'^2n''p' + d^3m'n''^2 + n''^3p'^2 = dm'n''^2p't,$$

$$\therefore \quad m'^2p' + d^3m'n'' + n''^2p'^2 = dm'n''p't. \tag{8}$$

Toţi termenii au pe $n''$ ca factor afară de primul $m'^2p'$. Pentru motivele arătate mai sus trebuie ca $n''$ să dividă pe $p'$. Să punem dar:

$$p' = n''p''. \tag{9}$$

Inlocuind în (8) găsim:

$$m'^2n''p'' + d^3m'n'' + n''^4p''^2 = dm'n''^2p''t,$$

$$\therefore \quad m'^2p'' + d^3m' + n''^3p''^2 = dm'n''p''t. \tag{10}$$

Numărul $p''$ divide toţi termenii afară de $d^3m'$. Dar $p''$, după (9), e divizor al lui $p'$ iar acesta, după (7), e divizor al lui $p$. Deci $p''$ e divizor al lui $p$ şi prin urmare e prim cu $d$, care am arătat că e prim cu $p$. Deci $p''$ divide pe $m'$. Putem dar scrie:

$$m' = m''p''. \tag{11}$$

Inlocuind în (10) avem:

$$m''^2p''^3 + d^3m''p'' + n''^3p''^2 = dm''n''p''^2t,$$

$$\therefore \quad m''^2p''^2 + d^3m'' + n''^3p'' = dm''n''p''t. \tag{12}$$

Toţi termenii au pe $p''$ ca factor afară de $d^3m''$. Pentru motivele arătate mai sus, trebuie ca $m''$ să se dividă cu $p''$. Putem dar scrie:

$$m'' = m'''p''. \tag{13}$$

Inlocuind găsim:

$$m'''^2p''^4 + d^3m'''p'' + n''^3p'' = dm'''n''p''^2t,$$

$$\therefore \quad m'''^2p''^3 + d^3m''' + n''^3 = dm'''n''p''t. \tag{14}$$

Toţi termenii conţin pe $m'''$ ca factor afară de $n''^3$. Dar $m'''$, după (13), e divizor al lui $m''$ iar acesta, după (11), e divizor al lui $m'$. Deci $m'''$ e divizor al lui $m'$. După (5) $n''$ e divizor al lui $n'$. Cum $m'$ şi $n'$ sunt primi între ei reese că divizorii lor $m'''$ şi $n''$ sunt primi între ei. Deci $n''^3$ nu se poate divide cu $m'''$. Egalitatea (14) nu poate există în numere întregi decât dacă avem:

$$m''' = 1. \tag{15}$$

Inlocuind în (14) devine:

$$p''^3 + d^3 + n''^3 = dn''p''t. \tag{16}$$

Dacă înmulţim întâi prima egalitate (3) cu egalităţile (11), (13) şi (15), apoi a doua egalitate (3) cu egalitatea (5) şi după aceea egalităţile (7) şi (9) găsim:

$$m = dp''^2 \quad , \quad n = d^2n'' \quad , \quad p = n''^2p''. \tag{17}$$

Pentru simplificarea scrierii să punem:

$$x = p' \quad , \quad y = d \quad , \quad z = n'' \tag{18}$$

Inlocuind în (17) şi (16) putem zice că soluţiunile problemei sunt:

$$m = x^2y \quad , \quad n = y^2z \quad , \quad p = z^2x, \tag{19}$$

sau în general, față de cele spuse la început:

$$m = ux^2y \quad , \quad n = uy^2z \quad , \quad p = uz^2x, \tag{20}$$

în care $u$ este un număr întreg oarecare, iar $x, y, z$ sunt soluțiuni în numere întregi ale ecuației nedeterminate:

$$x^3 + y^3 + z^3 = xyzt, \tag{21}$$

în care $t$ este un număr întreg. Totul se reduce dar la rezolvarea în numere întregi ale ecuației (21). Această chestiune formează obiectul problemei 4062 propuse în acest număr.

I. I.

Au dat soluțiunea $m = n = p = u$ și $m = u \quad , \quad n = 24 \quad , \quad p = 4u$ D-nii: A. BĂDĂRĂU, I. N. CONSTANTINESCU și N. TEODORESCU.

Au dat numai prima din aceste soluțiuni D-nii: GH. C. CONSTANTINESCU, U. M. FLORESCU, P. GHIȘOIU, N. N. MIHĂILEANU.

Problema are numeroase soluțiuni, cum se va vedeà la rezolvarea ecuației (21). Ca probă, iată o soluție, simplă care nu a fost dată:

$$(2/12) + (12/9) + (9/2) = 6.$$

Iată și alta mai complicată:

$$(1539/1369634) + (1369634/129549924) + (129549924/1539) = 84178.$$

I. I.

---

PROBLEMA 3835. *Deux droites rectangulaires menées par l'orthocentre d'un triangle* ABC, *coupent les côtes* BC, CA, AB, *l'une en* A′, B′, C′ *l'autre en* A″, B″, C″. *Démontrer la relation:*

$$(BC/A'A'') + (CA/B'B'') + (AB/C'C'') = 0.$$

R. GOORMAGHTIGH.

Proprietății de mai sus, în legătură cu dreapta lui DROZ FARNY, i se poate da o generalizare după cum urmează.

Fie $m(p, q, r)$ centrul conicei conjugată triunghiului ABC, având ecuația:

$$(\alpha^2/p) + (\beta^2/q) + (\gamma^2/r) = 0, \tag{1}$$

și o dreaptă $\Delta$ trecând prin M:

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0. \tag{2}$$

Diametrul conjugat acestei drepte este:

$$[(m - n)\,\alpha/p] + [(n - l)\,\beta/q] + [(l - m)\,\gamma/r] = 0. \tag{3}$$

Dacă A, A′ ; B, B′ ; C, C′ sunt punctele cu semnificările din enunţ, se vede uşor că:

$$A'(0, -n, m)\ ,\ A''[0, -q(l-m)\ ,\ n(n-l)]$$

$$\therefore \quad \frac{AA'}{a} = \frac{mq(l-n) - nr(n-l)}{(m-n)[r(n-l) - q(l-m)]}\ .$$

Dar, ţinând seamă de (2), avem:

$$\frac{A'A''}{a} = \frac{pl^2 + qm^2 + rn^2}{l(m-n)(p+q+r)}\ ,$$

$$\therefore \quad \Sigma \frac{BC}{A'A''} = \frac{(p+q+r)}{pl^2 + qm^2 + rn^2} \Sigma (m-n)\, l = 0,$$

ceeace erà de dovedit.

In cazul când M e în ortocentrul H al triunghiului, conica e cercul conjugat; diametrii conjugaţi sunt dreptunghiulari şi avem cazul problemei 3835.

Prin fiecare punct M trec două drepte perpendiculare care dau relaţia de mai sus; ele sunt axele conice conjugate cu centrul în M.

Mijloacele segmentelor A′A″ , B′B″ , C′C″ sunt pe dreapta:

$$\Sigma \frac{\alpha}{mn(p+q+r) - p(l-m)(n-l)} = 0.$$

Teorema lui Droz Farny este astfel generalizată.

Iperbolele echilatere conjugate trec prin centrele cercurilor înscris şi exînscrise şi au centrul pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Dacă luăm triunghiul cu vârfurile în centrele cercurilor exînscrise, ca triunghiu fundamental, deducem teorema:

*Dreptele* $D_1$, $D_2$ *reciproce şi perpendiculare trecând prin* M *şi simetricele acestora* $\Delta_1$, $\Delta_2$ *trecând prin* M, *taie laturile triunghiului ortic în şase puncte* A′, B′, C′; A″, B″, C″; *aşà că mijloacele segmentelor* A′A″, B′B″, C′C″ *sunt pe o dreaptă şi în acelaşi timp avem relaţia:*

$$\frac{BC}{A'A''}\cos A + \frac{CA}{B'B''}\cos B + \frac{AB}{C'C''}\cos C = 0.$$

Particularizările se pot continuà. Interesează însă isvorul din care vin toate acestea.

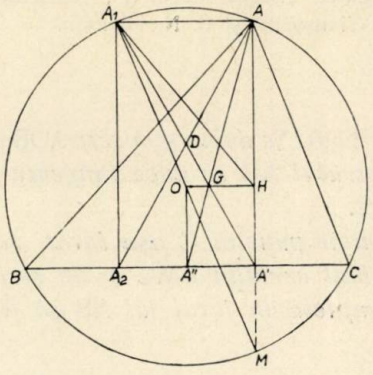
Ion C. Vasiliu
Şcoala Politecnică Bucureşti.

PROBLEMA 3882. *Fie* AA' *înălțimea triunghiului* ABC *și* $A_1$ *punctul unde cercul* ABC *este întâlnit de paralela dusă din* A *la* BC. *Să se demonstreze că dreapta* $A'A_1$ *și cu celelalte două analog obținute, trec prin centrul de greutate al triunghiului* ABC.

COL. GH. BUICLIU.

I. *Soluție* dată de D-șoara MARIANA ABRAMESCU (Studentă Cluj) și de D-nii: S.-LT. A. STAN (Cluj), P. I. GHIȘOIU, GH. OPRESCU (Șc. Politecnică «Regele Carol II», București), S.-LT. TH. N. PANAITE (Bârlad), C. N. POPESCU, M. P. CHIȚU (Lic. Giurgiu), I. BULANCEA și A. H. HALPERIN (Lic. Internat, Iași).

Fie O centrul cercului ABC; $A_2$, A'' proecțiile lui $A_1$ și O pe BC; D intersecția lui $AA_2$ cu $A_1A'$; H ortocentrul triunghiului ABC. Figura $AA_1A_2A'$ fiind dreptunghiu, punctul D este mijlocul lui $A_1A'$.




Pe de altă parte A'' este mijlocul lui $A'A_2$, deci centrul de greutate G al triunghiului $A_2AA'$ este pe mediana sa AA'' așa că

$$2\overline{A''G} = \overline{GA}.$$

Dar AA'' este mediană și în ABC, deci G este centru de greutate și în acest triunghiu și problema este demonstrată.

II. *Soluție* dată de D-l CONSTANTINESCU-BUZĂU.

Pe lângă notațiile dela soluția I, fie încă M intersecția lui O cu AH. Se știe că A' este mijlocul lui MH. Cum $MAA_1$ este drept, $A_1M$ este un diametru iar O este mijlocul lui $A_1M$. Deci centrul

de greutate al triunghiului $MA_1H$ este la întâlnirea G a dreptelor $A_1A'$ şi OH aşà că

$$2\overline{OG} = \overline{GH}.$$

Dar se ştie că centrul de greutate G' al triunghiului ABC se găseşte pe dreapta OH, a lui EULER, aşà că

$$2\overline{OG'} = \overline{G'H}.$$

Deci G' se confundă cu G şi teorema e demonstrată.

*Notă.* 1°. Soluţia I este redijată după soluţia D-şoarei M. ABRAMESCU.

2°. Au trimis soluţiuni, bazate pe teorema lui THALES, PTOLOMEU sau pe teoria triunghiurilor asemeni, D-nii: I. MURĂROIU (Şc. Politecnică „Regele Carol II", Bucureşti), N. ALDEA, AD. C. GHEORGHIU (Studenţi Bucureşti), D-şoara E. ANTONIU (Studentă, Cluj), V. VASU, I. MALOSCHI, N. GHIŞCO (Studenţi, Cluj).

3°. Au trimis bune soluţii analitice D-nii: S-LT. A. STAN (Cluj), I. MURĂROIU (Şc. Politecnică „Regele Carol II", Bucureşti), E. G. MILLEA (Şc. Militară de Artilerie, Timişoara) şi C. N. POPESCU.

---

PROBLEMA 3930. *Se dă un semicerc* AOB *cu raza* R. *Dintr'un punct* C *al diametrului* AB *se duce tangenta la semicerc. Fie* M *punctul de contact.*

*Să se determine punctul* C *aşà încât raportul volumelor născute de triunghiul curbilin* BMC *şi de sectorul circular* AOM *prin o rotaţie completă în jurul lui* AB *să fie egal cu un număr dat* m.

TH. ANGHELUŢĂ.

*Au rezolvat problema* D-şoara ELEONORA ANTONIU şi D-nii: I. C. BOIAN, CONSTANTINESCU-BUZĂU, IULIU DEAC, C. G. LUPESCU, A. NEGREA MIRCEA LEONTE, MIHAIL VELEA.

Vom luà ca necunoscută a problemei distanţa

$$BC = x.$$

Volumul născut de triunghiul curbilin BMC prin rotaţie în jurul dreptei AB, este egal cu diferenţa volumelor născute de triunghiul COM şi de sectorul circular BOM în jurul aceleiaş drepte.

Calculând volumul $V_{COM}$, născut de triunghiul COM, se găseşte

$$V_{COM} = \pi \cdot \overline{MN}^2 \cdot \frac{OC}{3} = \frac{\pi R^2 x (2R + x)}{3(R + x)} .$$

N este proecţia punctului M pe dreapta AB.

Volumul $V_{BOM}$, născut de sectorul circular BOM, este dat de formula

$$V_{BOM} = 2\pi R \times NB \times \frac{R}{3} = \frac{2\pi R^3 x}{3(R + x)} .$$

Prin urmare pentru volumul $V_{BMC}$, născut de triunghiul curbilin BMC, avem egalitatea

$$V_{BMC} = \frac{\pi R^2 x^2}{3(R + x)} .$$

Apoi volumul $V_{AOM}$, născut de sectorul circular AOM, se calculează ca şi volumul $V_{BOM}$ de mai sus.

Se găseşte astfel

$$V_{AOM} = 2\pi R \times AN \times \frac{R}{3} = \frac{2\pi R^3 (2R + x)}{3(R + x)} .$$

Deci punctul C este dat de ecuaţia

$$(1) \qquad x^2 = m \cdot 2R(2R + x).$$

Pentru cazul particular

$$m = 1$$

ecuaţia (1) revine la împărţirea segmentului AB = 2R în medie şi extremă raţie şi prin urmare punctul C exterior segmentului este dat de construcţia cunoscută. Rădăcina negativă corespunde punctul interior.

Dacă

$$m \neq 1$$

ecuaţia (1) este o generalizare a împărţirii unui segment de dreaptă în medie şi extremă raţie.

Raportul $m$ fiind pozitiv, discriminantul ecuaţiei (1) este pozitiv şi deci ecuaţia are rădăcinile reale. Rădăcina pozitivă

$$R\left[m + \sqrt{m(m + 4)}\right],$$

ne dă punctul C care convine problemei date.

Rădăcina negativă

$$R[m - \sqrt{m(m+4)}],$$

dă un punct între A şi B care corespunde punctului interior dela media şi extrema raţie.

Unii dintre corespondenţi au luat ca necunoscută distanţa ON. La discuţie trebuiă ţinut seamă că soluţia să fie pozitivă şi mai mică decât R.

Problema propusă are o soluţie oricare ar fi $m$ pozitiv, rezultat uşor de prevăzut, căci raportul $\frac{V_{BMC}}{V_{AOM}}$ creşte dela zero la infinit în acelaş timp cu $x$.

## *EXERCIŢII

2. Să se găsească valoarea lui $z$, ştiind că avem:

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{u} \quad ; \quad y^2 = z.u. \quad ; \quad \frac{1+x}{9+y} = \frac{x}{9} \ .$$

* * *

R. Se observă că:

$$x.u = y.z \qquad y^2 = z.u$$

$$\therefore \quad \frac{x}{z} = \frac{z}{y}, \quad \text{sau} \quad z^2 = xy \quad \text{şi} \quad z = \sqrt{xy}.$$

Din ultima relaţiune din enunţ, prin aplicarea unei proprietăţi a proporţiilor, obţinem:

$$\frac{1+x-x}{9+y-9} = \frac{1}{y} = \frac{x}{9} \quad \therefore \quad xy = 9.$$

Deducem deci că

$$z = \sqrt{xy} = \sqrt{9} = 3.$$

3. Dacă $\varphi$ e punctul lui FEUERBACH, A'B'C' triunghiul ortic al lui ABC, iar $A_1B_1C_1$ triunghiul median, avem relaţiile:

$$\frac{\overline{\varphi A'}\ \sin\frac{1}{2}A}{\sin\frac{C-B}{2}} = \frac{\overline{\varphi B'}\ \sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{A-C}{2}} = \frac{\overline{\varphi C'}\ \sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{A-B}{2}} \ ; \quad (a > c > b)$$

$$\frac{\overline{\varphi A_1}}{\sin\frac{1}{2}A \sin\frac{C-B}{2}} = \frac{\overline{\varphi B_1}}{\sin\frac{1}{2}B \sin\frac{A-C}{2}} = \frac{\overline{\varphi C_1}}{\sin\frac{1}{2}C \sin\frac{A-B}{2}} \ .$$

ION C. VASILIU.

R. Utilizând valorile lui $\overline{\varphi A'}$, $\overline{\varphi B'}$, $\overline{\varphi C'}$ găsite la problema 2760 G. M. XXVIII, pag. 225 şi anume $\overline{\varphi A'} = \frac{4R}{OI} \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C \sin\left(\frac{C-B}{2}\right)$; $\varphi B' = \ldots$ etc. se obţine imediat prin o relaţie.

Relaţia a doua se găseşte, întrebuinţând relaţiile

$$\overline{\varphi C_1} = \overline{\varphi A_1} + \overline{\varphi B_1}$$

$$\Sigma \sin\frac{1}{2}A \sin\frac{C-B}{2} = 0$$

aflate deasemenea la rezolvirea problemei 2760.

## PROBLEME PROPUSE

*4056 [1]). Se cunosc razele cercurilor înscris şi circumscris unui triunghiu, precum şi distanţa centrelor cercurilor. Să se construiască triunghiul, pe cale grafică.

D. Arg. Dumitrescu.

*4061. Combien y a-t-il des nombres écrits dans le système décimal avec des chiffres représentant des nombres consécutifs ?

Calculer leur somme.

V. Thébault.

*4062. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia:

$$x^3 + y^3 + z^3 = txyz.$$

I. Ionescu.

*4063. Să se calculeze suma:

$$12 + 1324 + 135246 + \ldots\ldots$$

numerele fiind scrise în un sistem de numeraţiune cu baza mai mare ca ultima cifră a ultimului termen al sumei.

H. Ionescu.

4064. Se dau două puncte A şi B şi o dreaptă $\Delta$. Să se găsească drumul cel mai scurt dela A la B cu obligaţia de a merge pe dreapta $\Delta$ o anumită lungime dată $l$.

(Se cere şi o construcţie geometrică pentru acest drum minim).

N. C.

1) Enunţ rectificat.

4065. Se dau în cercul de centru O razele OA, OB, OC, astfel ca unghiurile AOB = BOC = COA. Fie $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ proecţiile pe OA, OB, OC ale unui punct M al cercului O.

1°. Să se arate că triunghiul $\alpha\beta\gamma$ este echilateral şi de mărime constantă.

2°. Să se afle locul centrului de greutate al triunghiului $\alpha\beta\gamma$.

N. ABRAMESCU.

*4066. Fie O un punct fix pe o dreaptă. OA, raza care se roteşte în jurul punctului fix. Un punct mobil M parcurge dreapta fixă, plecând din O odată cu rotaţia razei OA, aşà fel că lungimea parcursă de M este egală cu lungimea arcului descris de A.

Din punctul M se lasă perpendiculara MP pe raza OA. Se cere locul punctului P.

D. ARG. DUMITRESCU.

4067. Să se găsească condiţia pentru ca rădăcinile ecuaţiei

(1) $$x^2 + px + q = 0,$$

să aibă acelaş modul.

Să se verifice condiţia găsită: 1°. Când $p$ şi $q$ sunt reali. 2°. Pentru ecuaţia

$$x^2 - 2ix - 2 = 0.$$

Să se deducă condiţiile ca rădăcinile ecuaţiei (1) să aibă modulul 1.

TH. ANGHELUŢĂ.

*4068. Se spune că un automobil mergând repede pe o şosea, poate să sară peste un şanţ ce ar traversa şoseaua, fără să sufere nici un fel de sdruncinătură, în anumite condiţiuni.

Cari sunt acele condiţiuni?

Să se deà şi o aplicaţie numerică.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

4069. Ce viteză iniţială are un proiectil în vid, ştiind că el parcurge în 2″ o mie de metri pe orizontală şi 20 m. pe verticală?

A. I. STAN.

4070. Excentricitatea orbitei planetei Mercur fiind $\frac{1}{5}$, se cere anomalia excentrică şi anomalia medie a planetei, cunoscând anomalia adevărată egală cu 200°.

ST. N. MIREA.

---

*ERATĂ*. La pagina 13, rândul 23 de sus, se va citi „TEODOREANU V.", în loc de „TEODORESCU V.".

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

---

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Aldea N. N.* (4038, 42, 47, 49); *Avram C.* (4054); *Bădescu Em. A.* (4037, 42, 43, 47, 49, 50); *Buţan M. A.* (4049, 50); *Curchi I.* (4047, 4049); *Deac I.* (4019, N, P); *Dumitraşcu N. R.* (4023, 49, 50, P); *Georgescu D.* (1355); *Gheorghiu C. A.* (3994, P); *Ionescu-Biss P. H.* (4016, 38, 49); *Ionescu I. Victor* (3995, 4049); *Lupescu Gh. C.* (4023, 41, 43, 49); *Mihăileanu N. N.* (1991, 3828, 82, 924, 35, 60, 89, 4008, 15, 25, 43, 49, 50, P, R); *Milea G. E.* (3995, 4023); *Parepeanu C. I.* (4016, 19, 23, 32, 41, 43, 49, P); *Patraulea N.* (4015, 23, 43, 49, 50, 54); *Petrescu I. I.* (4038); *Popescu-Stăneşti I. M.* (3935, 4043, P); *Radu F.* (4049); *Roşca St. G.* (4016, 37, 38, 49); *Rusu D. C.* (3979, 4008, 19, P); *Şova-Grigorescu C. I.* (3943, 4049); *Stoica D. Al.* (4032); *Thébault V.* (A, N, P); *Truţescu Ştefania* (4020, 49); *Vasu Vasile* (2443, 4038, 39); *Visarion C. I. V.* (4023, 49); *Weissmann M.* (4052); *Zamfirescu Gh. I.* (4039, 43, 54); *Zane D. N.* (4008, 49).

---

*Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

---

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor trată mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

---

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

# Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

**La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.**

# GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVII.

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1931.

## SUMARUL

1. Articol de geometrie . . . . . *D. Barbilian.*
2. Note matematice: 8 — 12.
3. Bibliografie.
4. Cereri: 211.
5. Diverse.
6. Probleme rezolvate: 1782, 2382, 3668, 3728, 3884, 3980, 4049.
7. Exerciţii: 4.
8. Probleme propuse: 3908, 4071 — 4080.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1931

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVII se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orăşanu**, Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 405, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 80, 84, 93, 99, 804, 08, 10, 29, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 70, 80, 96, 98, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 72, 76, 83, 87, 4000, 10, 13, 21, 24, 30, 31, 34, 35, 40, 44, 45, 46, 48, 53, 56, 57, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

# ARTICOL DE GEOMETRIE

## § 1. Definiţii, propoziţii ajutătoare.

1°. In cursul acestui articol vom întâlni două feluri de unghiuri. Să le definim în prealabil.

Numesc unghiu geometric figura formată de două semidrepte între care nu distingem, concepută în grupul total al egalităţilor plane (deplasările fără deformare şi simetriile. Evident că aceste unghiuri nu sunt susceptibile de semn).

Adoptăm pentru unghiul geometric a două semidrepte $\overline{MP}$ şi $\overline{NP}$ notaţia:

1) $\sphericalangle MPN.$

Două unghiuri geometrice sunt egale când există o transformare din grupul total al egalităţilor plane, care să aducă semidreptele lor în coincidenţă (ordinea fiind indiferentă).

Unghiul geometric rămâne identic lui însu-şi dacă schimbăm orientarea amândouor semidreptelor, totul revenind la o rotaţie de $180^0$ în jurul vârfului.

Numesc *unghiu vector* figura formată de două drepte, între care distingem, considerată în grupul egalităţilor plane directe (deplasările fără deformare).

Vom însemna unghiul vector a două drepte MP şi NP cu notaţia:

2) $\overline{MPN}.$

Un astfel de unghiu îşi schimbă semnul când schimbăm ordinea laturilor:

$$\overline{MPN} = -\overline{NPM}.$$

Două unghiuri vectoare $\overline{M_1P_1N_1}$ şi $\overline{M_2P_2N_2}$ sunt egale, dacă există o deplasare fără deformare care să aducă în coincidenţă laturile-origini, deoparte şi laturile-extremităţi, de alta. Practic, egalitatea se recunoaşte în modul următor:

Se consideră intersecţiile M şi N ale laturilor $(M_1P_1 , M_2P_2)$ şi $(N_1P_1 , N_2P_2)$ şi se cercetează dacă M, N, $P_1$ , $P_2$ se găsesc pe un cerc (propriu zis sau degenerat).

Putem defini o operație de adunare a unghiurilor vectore. Fie de adunat unghiurile $\overline{M_1P_1N_1}$ și $\overline{M_2N_2P_2}$. Aducem, printr'o deplasare, vârfurile lor în coincidență. Printr'o altă deplasare, facem ca latura-origină a unuia să se așeze peste latura-extremitate a celuilalt. De exemplu, $P_2M_2$, peste $P_1N_1$. Fie $P_1N$ poziția rezultată pentru latura $P_2N_2$.

Prin definiție:

$$\overline{M_1P_1N_1} + \overline{M_2P_2N_2} = \overline{M_1P_1N}.$$

Această operație e asociativă și comutativă.

2°. Să considerăm patru puncte A, B, C, D, din plan, și următoarea determinație a raportului lor anarmonic, definită prin operații bine cunoscute, din calculul vectorial plan *(calculul echipolentic)*:

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}.$$

Vom numi argument (semi-orientat[1]) al acestui raport anarmonic, diferența de unghiuri vectore:

$$\overline{\arg}\ (ABCD) = \overline{DAC} - \overline{DBC}.$$

Să demonstrăm acum următoarea propoziție:

*Fiind date grupele de puncte* ABCD *și* A'B'C'D' *puse în corespondență literală, să considerăm câte două determinații ale raportului anarmonic limitate prin condiția de a nu fi inverse una alteia. De exemplu determinațiile* (CABD) *și* (CBAD), *pentru care:*

$$(CABD) \cdot (CBAD) \neq 1.$$

---

1) Argumentul din teoria cantităților complexe se definește cu unghiuri vectore de altă speță decât cea introdusă de noi.

Avem, în această teorie:

$$\overline{\arg}\ (ABCD) = \overline{\overset{\frown}{DAC}} - \overline{\overset{\frown}{DBC}},$$

unde unghiul $\overset{\frown}{DAC}$ e figura formată de semidreptele $\overline{AD}$ și $\overline{AC}$, între care distingem, considerată în grupul deplasărilor fără deformare.

*In acest caz, vrem să arătăm că, dacă avem:*

3) $\overline{\arg}\,(CABD) = \overline{\arg}\,(C'A'B'D')$, $\overline{\arg}\,(CBAD) = \overline{\arg}\,(C'B'A'D')$, *există atunci o omografie vectorială care face trecerea dela o grupă, la cealaltă. Cu alte cuvinte, avem:*

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Intr'adevăr, egalitățile 3) se mai scriu:

$$\overline{DCB} - \overline{DAB} = \overline{D'C'B'} - \overline{D'A'B'}$$

$$\overline{DCA} - \overline{DBA} = \overline{D'C'A'} - \overline{D'B'A'}.$$

Vom presupune că punctele A, B, D, cât și punctele A', B', D', sunt distincte. Există atunci o omografie vectorială H, proprie, care face să se corespundă aceste puncte, în ordinea indicată de litere. Fie $\Gamma$ omologul lui C' în această omografie. Avem:

$$(\Gamma ABD) = (C'A'B'D') \ , \ (\Gamma BAD) = (C'B'A'D')$$

$$\therefore \ \overline{\arg}\,(\Gamma ABD) = \overline{\arg}\,(C'A'B'D') \ , \ \overline{\arg}\,(\Gamma BAD) = \overline{\arg}\,(C'B'A'D').$$

Sau, desvoltat:

$$\overline{D\Gamma B} - \overline{DAB} = \overline{D'C'B'} - \overline{D'A'B'}$$

$$\overline{D\Gamma A} - \overline{DBA} = \overline{D'C'A'} - \overline{D'B'A'}.$$

Comparând cu 4), conchidem:

$$\overline{D\Gamma B} = \overline{DCB}$$

$$\overline{D\Gamma A} = \overline{DCA}.$$

In virtutea definiției egalității unghiurilor vectore, (aliniatul 1°) aceste două ultime relații au, ca interpretare geometrică, faptul că punctele DBC$\Gamma$, deoparte și DAC$\Gamma$, de alta, sunt conciclice. Excludem cazul când patrupunctul ABCD e inscriptibil, deci presupunem cercurile DBC$\Gamma$ și DAC$\Gamma$ distincte. Urmează atunci sau $\Gamma \equiv D$, sau $\Gamma \equiv C$, altfel patrulaterul ABCD ar fi încă inscriptibil. In cazul $\Gamma \equiv D$ omografia proprie H ar da punctelor diferite C' și D' același omolog $\Gamma \equiv D$, ceeace e absurd. Așă dar, în mod necesar

$$\Gamma \equiv C.$$

Cu alte cuvinte grupele ABCD și A'B'C'D' sunt echivalente în raport cu omografia H, adică

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

3°. *Există un singur sistem de puncte* ABCD *așà încât cercurile determinate cu aceste puncte, luate câte trei, să aibe centrele respectiv în patru puncte date* A'B'C'D'. *Punctele* A, B, C, D *sunt tocmai isogonalele fiecăruia din punctele date* A', B', C', D' *respectiv față de triunghiurile* B'C'D', C'D'A', D'A'B', A'B'C'.

Presupunem găsită grupa ABCD. Dreptele A'D' și B'D' fiind respectiv perpendiculare pe BC și CA rezultă :

$$5) \qquad \boxed{\overline{ACB} = \overline{B'D'A'}}$$

egalitatea care subsistă, evident, când permutăm literele noastre A, B, C, D. Să considerăm acum diametralul opus C al lui A, în cercul ABC. Avem :

$$\overline{AC_1B} = \overline{ACB}.$$

Insă AD' și $AC_1$ sunt în prelungire, iar D'C' și $C_1B$ sunt paralele, ca perpendiculare amândouă pe AB. Deci

$$\overline{AD'C'} = \overline{AC_1B}$$

combinând între ele aceste trei egalități :

$$6) \qquad \boxed{\overline{AD'C'} = \overline{B'D'A'}.}$$

Se vede pe această relație că D'A și D'A' sunt ceviene isogonale față de triunghiul B'C'D'. Permutând literele B, C, D, conchidem că perechile B'A, B'A'; C'A, C'A' și D'A, D'A' sunt ceviene isogonale față de același triunghiu B'C'D'.

Deci A este isogonalul lui A' față de triunghiul B'C'D' [1]).

4°. Relațiile 5) și 6), valabile pentru toate permutările literelor A, B, C, D, pot fi interpretate ca formulând regule abstracte, după care unghiurile vectore ale configurației A, B, C, D; A', B', C', D' pot fi înlocuite unele printr'altele. Enunțarea generală a acestor regule se face fără greutate. Nu o mai reproducem aici, mulțumindu-ne cu transcrierile concise 5) și 6).

1) Această chestiune, propusă ca problemă, a fost rezolvată în „G. M.“ anul XXXVI. Din lipsa de spațiu, soluția publicată acolo nu e completă și se sprijină încă pe unele intuiții topologice.

La regulele 5) şi 6) e potrivit să adăugăm o a treia, cuprinsă în identitatea uşor de verificat, care dă legătura dintre unghiurile vectore formate circular cu vârfurile unui poligon:

$$7) \quad \overline{P_1P_2P_3} + \overline{P_2P_3P_4} + \overline{P_3P_4P_5} + \ldots + \overline{P_iP_1P_2} = 0.$$

## § 2. Configuraţii analagmatic-involutive.

5⁰. *Intre punctele* A, B, C, D *şi centrele* A', B', C', D' *ale cercurilor formate cu aceste puncte luate câte trei, există o involuţie vectorială, adică o transformare analagmatică directă* (produsul unui număr par de inversiuni) *şi simetrică.*

Dela început, se introduce o simplificare. Să observăm că, pentru a demonstrà existenţa unei involuţii între punctele tabloului:

$$8) \quad \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix},$$

e deajuns să limităm demonstraţia la tabloul

$$9) \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}.$$

Intr'adevăr, permutarea literelor A, B, C, D ne permite să extindem proprietatea la oricare tablou analog cu 9), tras din 8). Insă două astfel de tablouri au două perechi de puncte comune. Deci involuţiile corespunzătoare se confundă cu una şi aceeaşi involuţie, valabilă pentru tabloul general 8).

Ca să existe o involuţie vectorială între punctele tabloului 9) se ştie că e necesar şi suficient să avem:

$$10) \quad (ABCC') = (A'B'C'C).$$

Pentru demonstrarea acestei egalităţi ne vom servì de lemma 2⁰. Să alegem deci două determinaţii ale raportului anarmonic, în condiţiile prevăzute în enunţul acelei propoziţii. Determinaţiile (ACBC') şi (BCAC') împlinesc condiţia cerută:

$$(ACBC') \cdot (BCAC') \neq 1.$$

Prin urmare, conform lemmei 2⁰, egalitatea 10) e verificată când vom arătà că avem:

$$\overline{\arg}\,(ACBC') = \overline{\arg}\,(A'C'B'C);\ \overline{\arg}\,(BCAC') = \overline{\arg}\,(B'C'A'C).$$

Dar aceste două relații se deduc una, din alta, prin permutarea literelor A și B. Deci ne vom mărgini la verificarea uneia singure dintre ele, — de exemplu cea dintâiu. Scrisă explicit, această relație devine:

$$\overline{C'AB} - \overline{C'CB} = \overline{CA'B'} - \overline{CC'B'}$$

$$\therefore \quad \overline{C'AB} + \overline{BCC'} + \overline{CC'B'} + \overline{B'A'C} = 0.$$

In virtutea regulei 7) (aliniatul 4°) aplicată punctelor A, B, C, C', în ordinea indicată de litere, primele două unghiuri se înlocuesc prin alte două și egalitatea devine:

$$\overline{CBA} + \overline{AC'C} + \overline{CC'B'} + \overline{B'A'C} = 0$$

$$\therefore \quad \overline{CBA} + \overline{AC'B'} + \overline{B'A'C} = 0.$$

Conform regulei 6), ultimele două unghiuri se pot înlocui prin unghiuri cu toate literile accentuate; avem:

$$\overline{CBA} + \overline{D'C'A'} + \overline{C'A'D'} = 0.$$

Aplicând acum regula 7) punctelor D', C', A', aceeaș relație se reduce la:

$$\overline{CBA} + \overline{C'D'A'} = 0$$

care, prin aplicarea regulei 5), ne duce la identitatea:

$$\overline{CBA} + \overline{ABC} = 0.$$

Q. E. D.

6°. Putem da propoziției din aliniatul precedent o demonstrație mai scurtă, dar mai puțin elementară.

Considerăm punctele absolute I și J ale planului. Cubicile care trec prin A, B, C, D, J și au în I un punct dublu, formează un fascicol linear. Se știe că, în aceste condiții, tangentele în I la ramurele curbei se corespund involutiv.

Intre elementele fascicolului precedent intră și cubica descompusă în cercul BCD și isotropa IA. Centrul cercului BCD fiind însemnat, ca mai sus, cu A', e clar că tangentele nodale în I ale acestei cubice particulare sunt IA și IA'.

Din combinarea acestor două rezultate vedem că există o involuție, cu coeficienți complexi, care transformă parametrii isotropelor IA, IB, IC, ID, respectiv în parametrii isotropelor IA', IB', IC', ID'.

Insă parametrii de poziţie ai tuturor acestor raze isotrope pot fi aleşi astfel încât să coincidă cu numerele complexe corespunzătoare afixelor A, B, C, D; A', B', C', D'.

Există deci o involuţie vectorială (complexă) care să facă trecerea dela o grupă de puncte, la cealaltă.

7°. *Fie* T *involuţia vectorială în care se corespund punctele tabloului 8). Insemn cu* E *punctul care are ca transformat, faţă de* T, *punctul lui* Möbius ∞. *Formăm tabloul complet:*

$$11) \qquad \left| \begin{matrix} A & B & C & D & E \\ A' & B' & C' & D' & \infty \end{matrix} \right| .$$

*El se bucură de proprietatea generală următoare: două puncte luate la întâmplare din aceeaş linie a tabloului, sunt inverse faţă de cercul format cu cele trei puncte, neomoloage, din cealaltă linie.*

Pentru demonstraţia completă a propoziţiei, avem de examinat patru cazuri:

1. Unul din punctele perechii este punctul ∞.
2. Perechea cuprinde numai puncte ale grupei ABCD.
3. Unul din punctele perechii este punctul E.
4. Perechea cuprinde numai puncte ale grupei A'B'C'D'.

Să considerăm pe rând fiecare din aceste cazuri:

1. Proprietatea este evidentă: punctele A', ∞, de exemplu, sunt inverse faţă de cercul BCD, întrucât A' e tocmai centrul cercului BCD.

2. Să argumentăm pentru perechea A, B. Cercurile ABC şi ABD (de centre D' şi C') se taie în A şi B. Cu alte cuvinte A şi B sunt simetrice faţă de linia C'D'; sau, în termeni analagmatici, punctele A şi B sunt inverse faţă de cercul C'D' ∞.

3. Proprietatea apare ca transformata, prin involuţia vectorială T, a proprietăţii dela cazul 1. şi deci e adevărată odată cu aceasta.

4. La fel, avem de a face cu transformata prin mijlocirea lui T, a proprietăţii 2°.

Deci punctele tabloului 11) se bucură de proprietatea simetrică enunţată.

8. *Fiind luate în mod arbitrar punctele* A', B', C', D' *şi complecte cu punctul lui* Möbius ∞ *există un tablou 11) şi numai unul singur, care să se bucure de proprietatea* 7°.

Intr'adevăr punctele A, B, C, D apar, din proprietatea 7⁰, ca determinând trei, câte trei, cercuri de centre A', B', C', D'.

Conform lemmei 3⁰, există însă *o singură grupă* ABCD cu această însuşire. Aceeaş proprietate 7⁰ ne înfăţişează punctul E, între altele, ca inversul lui D faţă de cercul A'B'C'. Deci punctul E *este unic determinat.* Nu putem însă întrebà, cu drept cuvânt, dacă figura ABCDE, aşa constituită, e compatibilă şi cu celelalte proprietăţi, cuprinse în enunţul 7⁰ şi nefolosite în construcţia precedentă (de exemplu, proprietatea lui E şi A de a fi inverse faţă de cercul B'C D', etc.).

Dar am văzut că putem determinà cu ajutorul involuţiei T un punct $\bar{E}$, omolog al punctului $\infty$, prin adăugarea căruia tabloul:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D & \bar{E} \\ A' & B' & C' & D' & \infty \end{vmatrix}$$

întruneşte toate proprietăţile rezumate în enunţul 7⁰. In special, proprietatea ca $\bar{E}$, D să fie inverse faţă de cercul A'B'C'. Deci $\bar{E}$ şi E coincid şi propoziţia e demonstrată.

9⁰. *Fiind date cinci puncte oarecare* a', b', c', d', e', *putem determinà, într'un singur fel, alte cinci puncte* a, b, c, d, e *aşà încât două puncte luate dintr'una din liniile tabloului:*

$$12) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ a' & b' & c' & d' & e' \end{vmatrix}$$

*să fie inverse faţă de cercul determinat cu punctele lor neomoloage din cealaltă linie. Punctele tabloului 12) formează ceeace vom numì o configuraţie analagmatic — involutivă* [1]).

---

1) Aceste configuraţii sunt extensiunea, în plan, a diviziunilor echianarmonice de pe o dreaptă. Intr'adevăr, se demonstrează că dacă *a', b', c', d',* sunt patru puncte pe o dreaptă cu un raport echianarmonic, putem determinà într'un singur chip alte patru puncte *a, b, c, d,* aşà încât în tabloul

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{vmatrix}$$

două din punctele unei linii să fie armonic conjugate faţă de punctele neomoloage din cealaltă linie.

Figuri asemănătoare pe care le-am numit *echiproiective* se pot defini şi pentru un spaţiu cu un număr oarecare de dimensiuni. Vezi „Bulletin de l'École Polytechnique de Bucarest, an. I No. 1 — 2.

*Intre punctele celor două linii există o involuție vectorială* $\tau$.

Intr'adevăr, să considerăm o transformare analagmatică (de exemplu o inversiune I de pol $e'$) care face să corespundă unuia din punctele date $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, $e'$, — de exemptu lui $e'$, — punctul lui MÖBIUS $\infty$.

Proprietatea analagmatic-invariantă care definește tabloul 12) se păstrează prin inversiunea $\mathfrak{I}$. Atunci în locul unui tablou 12) avem de construit un tablou 11), în care sunt cunoscute transformatele A', B', C', D', ale lui $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, prin inversiunea $\mathfrak{I}$. Am văzut însă, în alineatul precedent, că e posibilă construirea, în astfel de condiții, a unui tablou 11) și că soluția e unică. Tabloul 11) odată alcătuit, supus inversiunii $\mathfrak{I}$ ne duce la tabloul căutat 12), a cărui unicitate e prin urmare dovedită.

Fiindcă între punctele tabloului 11) există o involuție vectorială T, între punctele tabloului 12) există transformata acestei involuții

$$\tau = \mathfrak{I}T\mathfrak{I},$$

așà dar, o transformare analagmatică directă, care verifică egalitatea $\tau^2 = 1$, adică o involuție vectorială.

(Va urmà). D. BARBILIAN.

## NOTE MATEMATICE

8. *Curiosités arithmétiques.* Voici les carrés de *six* chiffres qui s'écrivent avec des chiffres *tous* différents, en groupant ceux qui s'écrivent avec les mêmes chiffres:

$$\begin{cases} 364^2 = 132496; \\ 463^2 = 214369; \\ 589^2 = 346921; \\ 661^2 = 436921; \end{cases} \quad \begin{cases} 405^2 = 164025; \\ 504^2 = 254016; \\ 645^2 = 416025; \\ 708^2 = 501264; \end{cases} \quad \begin{cases} 442^2 = 195364; \\ 593^2 = 351649; \\ 629^2 = 395641; \\ 737^2 = 543169; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 323^2 = 104329; \\ 352^2 = 123904; \\ 557^2 = 310249; \end{cases} \quad \begin{cases} 445^2 = 198025; \\ 509^2 = 259081; \\ 905^2 = 819025; \end{cases} \quad \begin{cases} 507^2 = 257049; \\ 705^2 = 497025; \\ 852^2 = 725904; \end{cases}$$

$508^2 = 258064$; $567^2 = 321489$; $717^2 = 514089$;
$778^2 = 605284$; $591^2 = 349281$; $741^2 = 549081$;
$805^2 = 648025$; $618^2 = 381924$; $903^2 = 815409$;

$799^2 = 638401$; $324^2 = 104976$; $353^2 = 124609$;
$902^2 = 813604$; $843^2 = 710649$; $403^2 = 162409$;
$929^2 = 863041$;

$374^2 = 139876$; $425^2 = 180625$; $487^2 = 237169$;
$626^2 = 391876$; $709^2 = 502681$; $854^2 = 729316$;

$542^2 = 293764$; $564^2 = 318096$; $625^2 = 390625$;
$574^2 = 329476$; $783^2 = 613089$; $797^2 = 635209$;

$639^2 = 408321$; $713^2 = 508369$; $839^2 = 703921$;
$651^2 = 423801$; $916^2 = 839056$; $889^2 = 790321$;

$871^2 = 758641$; $322^2 = 103684$; $328^2 = 107584$;
$884^2 = 781456$;

$367^2 = 134689$; $397^2 = 157609$; $416^2 = 173056$;
$456^2 = 207936$; $458^2 = 209764$; $529^2 = 279841$;
$571^2 = 326041$; $572^2 = 327184$; $584^2 = 341056$;
$597^2 = 356409$; $598^2 = 367604$; $616^2 = 379456$;
$621^2 = 385641$; $634^2 = 401956$; $637^2 = 405769$;
$647^2 = 418609$; $677^2 = 458329$; $686^2 = 470596$;
$695^2 = 483025$; $724^2 = 524176$; $733^2 = 537289$;
$757^2 = 573049$; $759^2 = 576081$; $763^2 = 582169$;
$777^2 = 603729$; $807^2 = 651249$; $829^2 = 687241$;
$842^2 = 708964$; $845^2 = 714025$; $855^2 = 731025$;
$867^2 = 751689$; $872^2 = 760384$; $934^2 = 872356$;
$945^2 = 893025$; $968^2 = 937024$.

2. — Les carrés suivants :

$$132496 = 364^2 \quad \text{et} \quad 214369 = 463^2,$$
$$164025 = 405^2 \quad \text{et} \quad 254016 = 504^2,$$
$$257049 = 507^2 \quad \text{et} \quad 497025 = 705^2,$$
$$259081 = 509^2 \quad \text{et} \quad 819025 = 905^2,$$

ont pour racines carrées des entiers dont les chiffres sont renversés.

3. — Les nombres :

$$321489 = 567^2 \quad \text{et} \quad 729316 = 854^2,$$

sont tels que leurs chiffres, et ceux de leurs racines, constituent l'ensemble de neuf chiffres significatifs [1]).

4. — Voici des cubes de sept et huit chiffres tous différent

$$203^3 = 8365427;$$
$$297^3 = 26198073; \quad 289^3 = 24137569;$$
$$302^3 = 27543608; \quad 319^3 = 32461759.$$

V. THÉBAULT.

9. *Numitori subînţeleşi.* Privitor la alegerea Domnitorului din Valahia, Regulamentul Organic spune la articolul 17 :

«Dacă în ziua strângerii neobicinuitei Obşteşti Adunări, unii din mădularele ei nu vor putea să se afle faţă la alegerea Domnului din pricina boalei sau veri ce altui cuvânt legiuit, o asemenea întâmplare nu va putea să întârzieze, nici să împiedice lucrările Adunării; ci ca orice întâmplare ea se va îndeletnici la Alegerea Domnului, când trei părţi din tot numărul alegătorilor se va afla faţă la Adunare».

Aci este vorba de 3/4 din tot numărul. S'ar puteà crede că e aci o omisiune, şi că nu s'a pus după *„părţi"* cuvintele *„din patru"*. Omisiunea numitorului o mai găsim şi în alte locuri. Astfel *Obşteasca extraordinară Adunare de Revizie* a Regulamentului a propus mai târziu un amendament în care găsim :

«Candidatul carele la cea din tăiu deschidere a cutiei va avea două părţi din glasurile tutulor mădularilor în partea lui, va fi ales de Domn».

Aci e vorba de fracţia 2/3.

I. IONESCU.

1) V. THÉBAULT. *Mathesis.* 1922 pag. 297.

10. *Asupra indicatorilor.*

In *Gazeta Matematică,* anul XXX, pag. 146, s'a rezolvat problema 3111.

*Să se determine numărul prim* **a** *astfel în cât:*

$$\varphi_{a+2}(a^{\alpha}) = 1,$$

*unde* $\varphi_1(\mathrm{I}) = \varphi(\mathrm{I})$ *este indicatorul lui* I; $\varphi_2(\mathrm{I}) = \varphi[\varphi_1(\mathrm{I})], \ldots$ *adică* $\varphi_l(\mathrm{I})$ *este indicatorul de ordinul* **i** *al lui* I...

Se găseşte că singura soluţie este $\varphi_4(2^4)$. Soluţia e dată pe două căi diferite; consideraţiunile pe care se bazează însă soluţiunile date nu sunt exacte şi deaceea s'a pierdut o mulţime de soluţiuni. Pentru a invederà aceasta mă voiu bazà pe rezultatele obţinute de D-l Tiberiu Popoviciu în interesantul articol *Asupra indicatorilor unui număr* publicat în *Gazeta Matematică,* anul XXXVI, pag. 86.

Pentru $a = 2$ soluţia a fost dată. Să presupunem deci $a$ nepereche. Trebuie să avem:

$$a + 2 = \mathrm{I}(2a^{\alpha}) = \mathrm{I}(2) + \alpha \cdot \mathrm{I}(a) = 1 + \alpha \mathrm{I}(a),$$

$$\therefore \qquad a = (a + 1)/\mathrm{I}(a).$$

E dar destul ca $\mathrm{I}(a)$ să fie divizor a lui $(a + 1)$. Cred că soluţia generală este greu de dat; se poate da însă o metodă pentru găsirea soluţiilor mai mici ca un număr dat. Imi propun să dau acì toate soluţiunile pentru numerele prime mai mici ca $128 = 2^7$.

Avem:

$$a = 3, \qquad \mathrm{I}(3) = 1, \qquad \alpha = (3 + 1)/4 = 4.$$

De acì rezultă soluţia:

$$\varphi_5(3^4) = 1.$$

Pentru $a = 5$ şi $a = 7$ avem $3^1 < a < 2^3$, prin urmare $\mathrm{I}(a)$ cuprins între 1 şi 3 şi deci $\mathrm{I}(a) = 2$. Prin urmare avem soluţiile:

$$\varphi_7(5^3) = 1, \qquad \varphi_9(7^4) = 1.$$

Pentru numerele 11 şi 13, $a$ e cuprins între $3^2$ şi $2^4$, deci $\mathrm{I}(a)$ între 2 şi 4 şi prin urmare $\mathrm{I}(a) = 3$. Nu avem dar soluţie de cât dacă $a = \mathfrak{M}3 + 2$, cum e cazul cu 11. De acì soluţia:

$$\varphi_{13}(11^4) = 1.$$

Pentru numerele 17, 19, 23, $a$ este cuprins între $3^3$ şi $2^5$, deci $\mathrm{I}(a)$ între 2 şi 5 adică $\mathrm{I}(a)$ este 3 sau 4. Nu am puteà aveà

soluţii decât dacă $a = \mathfrak{M}3 + 2$ sau $a = \mathfrak{M}4 + 3$. Dar $I(17) = 4$, $I(19) = 3$, $I(23) = 4$. Numai 23 convine şi dă soluţia:

$$\varphi_{25}\,(23^6) = 1.$$

Urmând aceeaş cale găsim soluţiile:

$\varphi_{33}\,(31^8) = 1$, $\varphi_{45}\,(43^1) = 1$, $\varphi_{61}\,(59^{12}) = 1$,
$\varphi_{81}\,(79^{16}) = 1$, $\varphi_{85}\,(83^{14}) = 1$, $\varphi_{91}\,(89^{15}) = 1$,
$\varphi_{103}(101^{17}) = 1$, $\varphi_{109}(107^{18}) = 1$, $\varphi_{115}(113^{19}) = 1$.

Se vede de aci, de ce utilitatea este studiul D-lui T. Popoviciu pentru rezolvarea problemelor cu indicatori de ordin superior.

Din cele ce am arătat aci nu putem conchide însă că problema are un număr finit sau infinit de soluţiuni.

In nota care urmează soluţii problemei 3111 se examinează cazul când în locul lui $a$ din indicele $\varphi$ se pune $\alpha$, adică se caută soluţii pentru:

$$\varphi_{\alpha+2}(a^\alpha) = 1.$$

Se dă ca soluţie $a = 5$ pentru orice $\alpha$, ceeace nu e adevărat decât pentru $\alpha = 1$. De fapt, după cele arătate în articolul D-lui T. Popoviciu trebuiă pus:

$$\varphi_{2\alpha+1}(5^\alpha) = 1.$$

Mai avem apoi:

$$\varphi_3(7) = 1.$$

Găsirea soluţiilor este uşoară. Se vede că $a$ nu poate fi 2, căci:

$$\varphi_\alpha(2^\alpha) = 1.$$

Trebuie dar ca $a$ să fie un număr prim impar. Deci:

$$\alpha + 2 = I(2a^\alpha) = I(2) + \alpha I(a) = 1 + \alpha I(a),$$
$$\therefore \qquad \alpha + 1 = \alpha I(a),$$

de unde reiese că $\alpha$ divide pe 1 şi deci $\alpha = 1$. Egalitatea dată se reduce la:

$$\varphi_3(a) = 1.$$

Deci:

$$I(2a) = I(a) + I(2) = I(a) + 1 = \alpha + 2 = 3,$$

şi deci $I(a)=2$. Aşa dar $3^1 < a < 2^3$ şi prin urmare $a=5$ şi $a=7$.

I. B. F.

*11. *Asupra problemei 3055.*

In soluția dată în anul XXX, pag. 350, din *Gazeta Matematică*, soluția dată ultimei părți nu este justă. Ei i se aplică întocmai soluția dată părții a doua, cu singura deosebire că aci se pot duce prin centru și punctele date o infinitate de plane și că prin urmare problema admite o infinitate de soluții.

ION C. VASILIU.

12. *Asupra problemei 3860.* Rezultatele găsite în această problemă pentru funcțiile circulare directe se pot extinde și la funcțiile hiperbolice directe.

Avem, prin definiție:

$$\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} .$$

Deci:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch}kx = \tfrac{1}{2}\left[e^x(1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(n-1)x}) + e^{-x}(1 + \right.$$

$$\left. + e^{-x} - e^{-2x} + \ldots + e^{-(n-1)x}\right] = \tfrac{1}{2}\left(e^x \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1} + e^{-x}\frac{e^{-nx} - 1}{e^{-x} - 1}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{(e^{(n+1)x} + e^{-(n+1)x} - (e^{nx} + e^{-nx}) - (e^x + e^{-x}) + 1}{\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\operatorname{ch}(n+1)x + 1 - \operatorname{ch}nx - \operatorname{ch}x}{4\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} .$$

Insemnăm acest raport cu $\Sigma_1$.

Printr'un raționament analog găsim că:

$$\sum_{1}^{n} \operatorname{sh}kx = \Sigma_2 = \frac{\operatorname{sh}(n+1)x - \operatorname{sh}nx - \operatorname{sh}x}{4\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} .$$

Apoi avem:

$$\Sigma_1 = \frac{2\operatorname{ch}^2 \frac{n+1}{2}x - 2\operatorname{ch}\frac{n+1}{2}x\operatorname{ch}\frac{n-1}{2}x}{4\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{ch}\frac{n+1}{2}x\operatorname{sh}\frac{n}{2}x}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} .$$

$$\Sigma_2 = \frac{\operatorname{sh}\frac{n+1}{2}x\operatorname{sh}\frac{n}{2}x}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} .$$

Deducem prin împărţire:

$$\frac{\sum_1^n \operatorname{sh} kx}{\sum_1^n \operatorname{ch} kx} = \operatorname{th} \frac{n+1}{2} x.$$

Mai observăm identităţile:

$$(\Sigma_1)^2 + (\Sigma_2)^2 = \left( \frac{\operatorname{sh} \frac{n}{2} x}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}} \right)^2 \left( \operatorname{ch}^2 \frac{n+1}{2} x + \operatorname{sh}^2 \frac{n+1}{2} x \right) =$$

$$= \operatorname{ch} (n+1) x \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{n}{2} x}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} .$$

$$(\Sigma_1)^2 - (\Sigma_2)^2 = \left( \frac{\operatorname{sh} \frac{n}{2} x}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}} \right)^2 \left( \operatorname{ch}^2 \frac{n+1}{2} x - \operatorname{sh}^2 \frac{n+1}{2} x \right) = \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{n}{2} x}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}$$

$$2 (\Sigma_1) (\Sigma_2) = 2 \operatorname{ch} \frac{n+1}{2} x \operatorname{sh} \frac{n+1}{2} x \left( \frac{\operatorname{sh} \frac{n}{2} x}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}} \right)^2 =$$

$$= \operatorname{sh} (n+1) x \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{n}{2} x}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} .$$

Se remarcă asemănare între rezultatele acestei note şi ale problemei 3860, nu însă analogie.

I. MURĂROIU
Şcoala Politechnică din Bucureşti
Anul I B.

# BIBLIOGRAFIE

**Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine.** XIV-ème Année, No. 3—5. Bucarest 1931. Sur le principe de D'ALEMBERT pour les liquides incompressibles, par G. MOISIL. Sur le coéfficient de $\sin^2\lambda$ dans l'accélération solaire, par C. I. ROIBANESCO.

**Mathesis.** Tomul XLV. No. 6—7. Iunie—Iulie. Gembloux. Asupra parabolelor strâmbe, de CL. SERVAIS. Asupra desvoltării unei relaţiuni de recurenţă dând soluţiuni ecuaţiunilor diofantine $x^2-5=u^2$ şi $x^2+5=v^2$, de J. D. HILL. Asupra curbelor polare succesive ale unei curbe strâmbe, de R. GOORMAGHTIGH. Observarea asupra rolului unei exponenţiale în derivarea funcţiunilor compuse, de R. H. J. GERMAY. Asupra unei familii de perspectivităţi, de P. LIBOIS. Locuri asociate echitangenţialelor unei curbe strâmbe, de R. DEAUX. Determinarea geodesicelor pe suprafaţa lui LIOUVILLE, de O. DURTON. Asupra ecuaţiilor algebrice care au toate rădăcinile reale, de R. GODEAU. Note de geometrie analitică, de AD. M. Curbe plane de al patrulea ordin posedând două puncte duble, de M. RABINOVITCH. Propietăţi relative la unele şiruri de numere intregi de W. RIVIER. Asupra teoremei lui NOVER-DROZ-FARNY, de G. ROY. Note asupra tetraedrului circomscris prin muchii, de N. ALSCHILLER-COURT.

**Mathematica.** Vol. V. 1931. Cluj 1931. Sur l'allure de la représentation conforme dans le voisinage d'un point exceptionnel, par M BIERNACKI. Sur un théorème de M. G CALUGAREANO, par TH. VAPOPOULOS. Sur les variétés totalement géodésiques d'un espace de RIEMANN, par GR. C. MOISIL. Sur la définition axiomatique de la moyenne, par LUCA TEODORIU. Ueber Simplexe in Schäflicher Lage, von E. A. WEISS. Sur les suites de polynomes, par T. POPOVICIU. Sur une classe d'opérations sur les ensembles de points, par W. SIERPINSKI. Sur la déformation le long de trajectoires ortogonales, par A. PANTAZI. Sur les lois de dépendence de l'intégrale de l'équation différentielle $y'=f(x,y)$ vis à vis de son point d'origine, par M-lle MARIE CHARPENTIER. Sur l'intégration orientée des équations différentielles non analytiques par M. NICOLESCO. Sur les fractions rationnelles à termes entrelacés, par PAUL MONTEL. Contribution à la théorie des fonctionnelles rationnelles linéaires en connexion avec la théorie de la mesure des ensembles abstraits, par OTTON NICODYN. Fonctions holomorphes dans l'espace par Gr. C. MOISIL & N. THÉODORESCO.

**Boletin del Seminario matematico Argentino,** de sub direcţia D-lui J. REY PASTOR. No. 8. Ianuarie 1931. Asupra unei proprietăţi a integralelor multiple elementare, de R. H. J. GERMAY. Observaţiuni asupra suprafeţelor riglate, de L. GODEAUX. Conţine şi o recenzie a cursului de geometrie diferenţială a D-lui N. ABRAMESCU, care se incheie cu cuvintele: „Cursul profesorului ABRAMESCU e un nou exponent al nivelului înalt pe care-l atinge gradat studiile matematice în ţara sororă".

**Boletin Matematico.** Anul IV. No. 5. Iulie 1931. Buenos Aires. Geometria analitica aplicată la triunghiu, de F. A. Berdiales. Reflexiuni asupra importanţei postulatului paralelelor. de N. O. Zaharia.

**Revista matematică din Timişoara.** Anul XI. No. 7. Septemvrie 1931. Timişoara. Asupra unor identităţi trigonometrice, de V. Alaci.

**Idem.** No. 8. Octomvrie 1931. Câteva proprietăţi ale unor triunghiuri omologice, de Cezar Coşniţă.

**Revista ştiinţifică** „V. Adamachi". Vol. XVII. No. 3. Septemvrie 1931. Iaşi.

**Natura.** Anul XX. No. 8. Octomvrie 1931. Bucureşti. Probleme matematice vestite, de G. Ţiţeica.

**Journal de mathématiques élémentaires,** publié par H. Vuibert. Anul 56. No. 2. Octomvrie 1931. Paris.

M. Ghermanesco. *Sur les fonctions n-métaharmoniques.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris). Iulie 1931. Paris.

Miron Nicolescu. *Sur les fonctions harmoniques d'ordre p.* (Extras din *Bulletin de la Société mathématique de France*). Paris 1931.

Miron Nicolescu. *Sur une équation à dérivées partielles caractérisant les moyennes de* M. Picone. (Extras din *Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei*). Roma 1931.

Miron Nicolescu. *Sulle funzioni metaarmoniche in n variabili.* (Extras din *Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei*). Roma 1930.

Miron Nicolescu. *Sur certaines transformations ponctuelles de l'espace à quatre dimensions.* (Extras din *Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi*. Cernăuţi 1930.

Miron Nicolesco. *Remarque sur l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants.* (Extras din *L'Enseignement mathématique*). Paris 1930.

Miron Nicolesco. *Sur l'intégration orientée des équations differentielles non analytiques.* (Extras din *Buletinul de Ştiinţe din Cluj*). Cluj 1931.

**Petru Bogdan.** *Opera lui* Anghel Saligny *şi învăţământul tecnic în România.* Bucureşti 1931.

## CERERI

211. Când s'au introdus la noi cuvintele *par* şi *impar* pentru *pereche* şi *nepereche* sau *cu soţ* şi *fără soţ?*

In *«Manualul Construcţiunei şi întreţinerei drumurilor»* tipărit în 1869 de S. IORGEANU se găsesc cuvintele *pariu* şi *impariu*.

I. I.

## DIVERSE

Societatea română de Ştiinţe, Secţiunea matematică, a ţinut şedinţă în seara zilei de 19 Octomvrie 1931 ora 21 în localul Facultăţii de ştiinţe din Bucureşti. La ordinea zilei au fost comunicările D-lor M. GHERMĂNESCU asupra Soluţiilor fundamentale ale ecuaţiei *n*-metaarmonice şi N. CIORĂNESCU asupra Câtorva probleme noi asupra funcţiunilor armonice.

## PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1782. *Să se construiască un trunchiu de piramidă triunghiulară cunoscând lungimea tuturor muchiilor sale.*

ST. MIREA.

*Soluţie* dată de D-nii: CRISTEA MATEESCU, N. ARVANITOPOL şi I. G. RARINCESCU.

Să luăm baza mare a trunchiului de piramidă ca plan orizontal, construind triunghiul de bază *abc* cu laturile date. Presupunem că am găsit proecţia *def* a bazei mici DEF pe planul orizontal, proecţie ce se face în adevărata mărime.

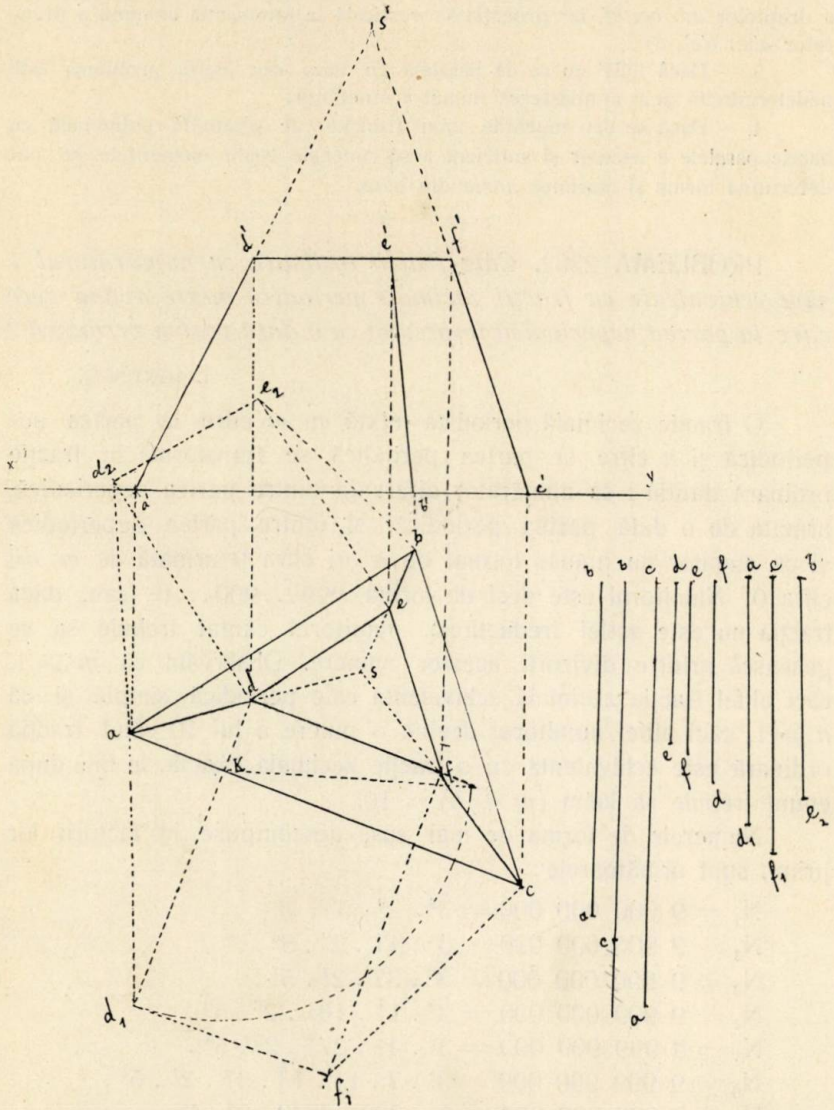
Dacă rabatem planul *ac*FD pe planul orizontal, dreptele DF, *a*D şi *c*F se aşează pe plan în adevărata lor mărime; punctele D şi F vin în $d_1$ şi $f_1$, astfel că $dd_1$ şi $ff_1$ sunt perpendiculare pe *ac*.

Deci construim trapezul $acf_1d_1$ cunoscându-i toate laturile (C. de P. VI, 28); *d* şi *f* se vor află pe perpendicularele duse din $d_1$ şi $f_1$ pe *ac*. Operând la fel şi pe baza *ab*, punctele *d* şi *e* se vor află pe perpendicularele duse din $d_2$ şi $e_2$ pe *ab*. Prin urmare *d* se află la intersecţia dreptelor $dd_2$ şi $dd_1$ şi triunghiul *def* se construeşte uşor cu elementele date.

Înălţimea trunchiului o aflăm căutând lungimea proectantei punctului D, spre ex., pe planul orizontal. Fie *k* punctul ($dd_1$, *ac*).

Dacă vom construi cu $d_1k$ de ipotenuză şi cu *kd* de catetă un triunghiu dreptunghiu, cealaltă catetă este chiar înălţimea, egală

cu cota sa, pe care (cota) o luăm pe linia de ordine a lui *d*, dela linia de pământ în sus, până în *d'*; cotele punctelor *e* şi *f*, egale cu cota lui *d*, merg până în *e'* şi *f'* şi dreapta *d'e'f'e'* proecţia



verticală a bazei mici. Trunchiul este complet construit, ducând şi proecţiile verticale *a'd'*, *b'e'*, *c'f'* ale muuchiilor laterale.

*Observări.* 1. — Pentru a obține înălțimea, se putea rabate pe planul orizontal triunghiul dreptunghiu D*da*.

2. — Dacă ne propunem a găsi și vârful piramidei din care face parte trunchiul construit, găsim proecția orizontală a vârfului la intersecția comună a dreptelor *ad, be, cf*, iar proecția sa verticală la intersecția comună a dreptelor *a'd', b'e', c'f'*.

3. — Dacă DEF nu se dă paralelă cu baza cea mare, problema este nedeterminată prin cunoașterea numai a muchiilor.

4. — Dacă se dau muchiile unui trunchiu de piramidă poligonală cu bazele paralele e necesar și suficient a se cunoaște toate elementele ce pot determină forma și mărimea *uneia* din baze.

---

PROBLEMA 2382. *Câte fracții ordinare cu numărătorul 1 sunt echivalente cu fracții zecimale periodice mixte având zece cifre la partea neperiodică împreună cu o dată partea periodică ?*

I. IONESCU.

O fracție zecimală periodică mixtă cu $m$ cifre la partea neperiodică și $n$ cifre la partea periodică se transformă în fracție ordinară dându-i ca numărător diferența dintre partea neperiodică, urmată de o dată partea periodică, și dintre partea neperiodică și ca numitor un număr format de $n$ ori cifra 9 urmată de $m$ ori cifra 0. Numitorul este deci de forma 999...900...0, sau, dacă fracția nu este astfel ireductibilă, numitorul căutat trebuie să se găsească printre divizorii acestor numere. Observăm că $m \geqslant 1$, căci altfel fracția zecimală echivalentă este periodică simplă și că $n \geqslant 1$, căci altfel numitorul devine o putere a lui 10 când fracția ordinară este echivalentă cu o fracție zecimală exactă. In fine după enunț trebuie să luăm $(m + n) = 10$.

Numerele de forma de mai sus, descompuse în factorii lor primi, sunt următoarele:

$N_1 = 9\ 000\ 000\ 000 = 3^2 . 2^9 . 5^9 .$
$N_2 = 9\ 900\ 000\ 000 = 3^2 . 11 . 2^8 . 5^8 .$
$N_3 = 9\ 990\ 000\ 000 = 3^3 . 37 . 2^7 . 5^7 .$
$N_4 = 9\ 999\ 000\ 000 = 3^2 . 11 . 101 . 2^6 . 5^6 .$
$N_5 = 9\ 999\ 900\ 000 = 3^2 . 41 . 271 . 2^5 . 5^5 .$
$N_6 = 9\ 999\ 990\ 000 = 3^2 . 7 . 11 . 13 . 37 . 2^4 . 5^4 .$
$N_7 = 9\ 999\ 999\ 000 = 3^2 . 239 . 4649 . 2^3 . 5^3 .$
$N_8 = 9\ 999\ 999\ 900 = 3^2 . 11 . 73 . 101 . 137 . 2^2 . 5^2 .$
$N_9 = 9\ 999\ 999\ 990 = 3^4 . 37 . 333667 . 2 . 5 .$

Numerele $N_i$ pot fi luate ca numitori ai fracțiilor căutate căci $1/N_i$ se transformă în zecimale conform enunțului. Numitorul căutat poate fi însă un divizor al numerelor $N_i$, afară de 1, căci $1/1 = 1$ este întreg iar nu fracție zecimală periodică mixtă. Acești divizori mai trebuie să îndeplinească și următoarele condițiuni:

*a)* Să conțină pe 2 ori 5 la puterea cea mai mare indicată în tablou, celălalt dintre acești doi factori putând lipsi sau fi la o putere mai mică, căci altfel partea neperiodică nu mai are atâtea cifre câți 0 conține $N_i$. Deci dacă $p$ este exponentul lui 2 și 5 în descompunerile de mai sus, în divizori acești doi factori pot intră astfel:

$$2^p ; 2^p . 5 ; 2^p . 5^2 ; \ldots\ldots ; 2^p . 5^{p-1} ; 2^p 5^p .$$
$$5^p ; 2 . 5^p ; 2^2 . 5^p ; \ldots\ldots ; 2^{p-1} 5^p .$$

Avem dar $[(p + 1) + p] = (2p + 1)$ combinațiuni sub care poate intră factorii 2 și 5 în divizori.

*b)* Numerele formate de ceilalți, divizori afară de 2 și 5, pot intra în combinațiune cu toți divizorii lor afară de 1. Dintre aceștia însă pentru un $N_i$ dat, trebuie să eliminăm divizorii numerelor cu un $i$ mai mic, căci acestea corespund la mai puțini 9 și deci nu ne dau $n$ cifre la partea periodică. Astfel 9 este divizor al tuturor numerelor din tabloul de mai sus, dar $1/9$ nu corespunde decât lui $N_1$, care are un singur 9, căci $1/9 = 0{,}11111\ldots$ are perioada formată de o singură cifră;

*c)* Numitorii căutați sunt produse ale divizorilor de sub *(a)* și de sub *(b)*.

Se știe că găsim câți divizori are un număr, — inclusiv numărul însuși și 1, — dacă facem produsul exponenților factorilor lui primi sporiți cu 1. Acest produs micșorat cu 1 ne dă dar numărul divizorilor diferiți de 1.

Putem trece acum la găsirea numitorilor pe care ni-i poate da fiecare din numerele din tabloul nostru.

Pentru $N_1$. Numărul $3^2$ are $(2 + 1) - 1 = 2$ divizori diferiți de 1. Aci $p = 9$, deci $(2p + 1) = 19$. Avem dar $2 \times 19 = 38$ numitori.

Pentru $N_2$. Numărul $3^2 . 11$ are $(2 + 1)(1 + 1) - 1 = 5$ divizori. Dintre aceștia înlăturăm pe cei 2 găsiți la $N_1$ și ne rămân 3. Aci $p = 8$, deci $(2p + 1) = 17$. Avem dar $3 \times 17 = 51$ numitori.

Pentru $N_3$. Numărul $3^3 . 37$ are $(3 + 1)(1 + 1) - 1 = 7$

divizori. Scădem 2 găsiţi la $N_1$ şi ne rămân 5. Aci $p = 7$, deci $(2p + 1) = 15$. Avem dar $5 \times 15 = 75$ numitori.

Pentru $N_4$. Numărul $3^2 . 11 . 101$ are $(2+1)(1+1)(1+1)-1=11$ divizori. Din aceştia scoatem pe ai lui $N_2$ în număr de 5 şi ne rămân 6. Aci $p = 6$, deci $(2p + 1) = 13$. Avem dar $6 \times 13 = 78$ numitori.

Pentru $N_5$. Numărul $3^2 . 41 . 271$ are $(2+1)(1+1)(1+1)-1=11$ divizori. Din aceştia scoatem pe cei 2 găsiţi la $N_1$ şi ne rămân 9. Aci $p = 5$, deci $(2p + 1) = 11$. Avem dar $9 \times 11 = 99$ numitori.

Pentru $N_6$. Numărul $3^3 . 7 . 11 . 13 . 37$ are $(3 + 1)(1 + 1) \times (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) - 1 = 63$ divizori. Din aceştia scoatem pe cei 2 dela $N_1$, pe cei 3 dela $N_2$ şi pe cei 5 dela $N_3$ şi ne rămân 53. Aci $p = 4$, deci $(2p + 1) = 9$. Avem dar $53 \times 9 = 477$ numitori.

Pentru $N_7$. Numărul $3^2 . 239 . 4649$ are $(2 + 1)(1 + 1) \times (1 + 1) - 1 = 11$ divizori. Din aceştia scoatem pe cei 2 dela $N_1$ şi rămân 9. Aci $p = 3$, deci $(2p + 1) = 7$. Avem dar $9 \times 7 = 63$ numitori.

Pentru $N_8$. Numărul $3^2 . 11 . 101 . 73$ are $(2 + 1)(1 + 1) \times (1 + 1)(1 + 1) - 1 = 23$ divizori. Din aceştia scoatem pe cei dela $N_1$ şi $N_4$ adică 2 şi 9 şi ne rămân 12. Aci $p=2$, deci $(2p+1)=5$. Avem dar $12 \times 5 = 60$ divizori ca numitori căutaţi.

Pentru $N_9$. Numărul $3^4 . 37 . 333667$ are $(4 + 1)(1 + 1) \times (1 + 1) - 1 = 19$ divizori diferiţi de 1. Scoatem divizorii lui $N_1$ în număr de 2 şi pe ai lui $N_3$ în număr de 5 şi ne rămân 12. Aci $p = 1$, deci $(2p + 1) = 3$. Avem dar $12 \times 3 = 36$ numitori.

Problema admite dar soluţiuni în număr de:

$$38 + 51 + 75 + 78 + 99 + 477 + 63 + 60 + 36 = 977.$$

I. I.

*Notă.* Problema a fost cercetată superficial de mulţi corespondenţi. Dificultatea ei constă numai în descompunerea numerelor $N_i$ în factori primi, căci restul e chestiune de discernământ făcut cu atenţie.

I. I.

---

PROBLEMA 3668. *Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu oarecare avem relaţia*

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{p^2 - r_a^2} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{p^2 - r_b^2} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{p^2 - r_c^2} = 2.$$

CONST. I. GEORGESCU.

*Soluţie* dată de D-nii: Ad. C. Gheorghiu, P. I. Ghişoiu, Haralamb P. Ionescu-Biss, Th. N. Panaite, Crist. I. Râmniceanu, I. C. Savin şi Aurelian I. Stan.

Vom porni dela relaţii cunoscute pentru a *stabili* relaţia din enunţ. Astfel relaţiile

$$(1)\quad \cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{p(p-a)}{bc}, \cos^2\tfrac{1}{2}B = \frac{p(p-b)}{ac}, \cos^2\tfrac{1}{2}C = \frac{p(p-c)}{ab}$$

se pot scrie

$$bc\cos^2\tfrac{1}{2}A = p(p-a), \text{ etc...}$$

De unde

$$\Sigma bc\cos^2\tfrac{1}{2}A = \Sigma p(p-a) = p^2$$

sau

$$\sum \frac{bc\cos^2\tfrac{1}{2}A\,.\cos A}{\cos A} = \sum \frac{bc\cos A}{\cos^2\tfrac{1}{2}A - \sin^2\tfrac{1}{2}A} = p^2.$$

Prin urmare

$$\sum \frac{2bc\cos A}{1-\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A} = 2p^2.$$

Deci

$$\sum \frac{b^2+c^2-a^2}{p^2-p^2\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A} = 2 \quad \text{sau} \quad \sum \frac{b^2+c^2-a^2}{p^2-r_a^2} = 2$$

relaţia ce trebuiă să stabilim, deoarece

$$(2)\qquad p\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = r_a, \text{ etc....}$$

$$(3)\qquad 2bc\cos A = b^2+c^2-a^2, \text{ etc....}$$

*Notă.* 1) Au rezolvat în mod invers problema verificând relaţia din enunţ, servindu-se de relaţiile (1), (2) şi (3) de mai sus, Domnii: Barbu V. Gataianţu, Aureliu V. Angelescu, Gh. I. Balaban, Eug. N. Burlacu, Cezar Coşniţă, C. Dan, V. Gh. Drăguţ, C. D. Ionescu-Ţiu, Gh. Mihai şi Gh. C. Sprinceană.

2) Domnii: N. Aldea, P. I. Ghişoiu, Grigore Grubenmann, C. I. Istinie-Brezuica, M. A. Negrea, I. N. Vâlceanu, N. Velicescu, I. O. Zaharia şi N. O. Zaharia au întrebuinţat în locul relaţiilor (1) unele din relaţiile

$$\Sigma\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = 1;\ \Sigma\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A = \frac{p}{r} = \frac{p^2}{s};\ \Sigma\frac{1}{r_a} = \frac{1}{r};\ \Sigma\frac{r_b r_c - r r_a}{p^2 - r_a^2} = 1;$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

pentru a verifică relaţia din enunţ; iar Domnii: C. V. Costăchescu, Petru-Almăjan, V. C. Gavrilescu şi N. Pavel-Onizaba au utilizat relaţiile

$$r_a = \frac{s}{p-a} \text{ etc... în locul relaţiilor (2).}$$

3. Au mai demonstrat că relaţia din enunţ e adevărată.

*a)* Domnii: Vl. I. Crivăţ, I. Z. Panţu şi Eug. P. Popescu, arătând că

$$p^2 - r_a^2 = p^2 - \frac{p(p-b)(p-c)}{(p-a)} = p\,\frac{b^2+c^2-a^2}{2(p-a)},$$

de unde reiese imediat relaţia din enunţ.

*b)* Domnii: I. N. Craiu, Oprea C. Diaconu şi I. O. Zaharia, servindu-se de relaţiile

$$r_a = \frac{s}{p-a}, \text{ etc...} \quad \text{şi} \quad s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

*c)* Domnii: A. Buricovici, N. I. Dinulescu, N. Donciu, Gh. Th. Gheorghiu, Almé Gurău, I. Murăroiu şi I. O. Zaharia servindu-se de relaţiile (3) precum şi de relaţiile

$$p = 4R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\ , \quad r_a = 4R\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C, \text{ etc.}$$

$$\Sigma \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = 1 \quad \text{sau} \quad \cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{p(p-a)}{b-c}, \text{ etc.}$$

Colonel G. I. Liteanu.

---

PROBLEMA 3728. *Intre elementele unui triunghiu oarecare avem relaţiunea*

$$S = \frac{R}{4}[a\cos(B-C) + b\cos(C-A) + c\cos(A-B)].$$

*Care este semnificaţia geometrică a acestei relaţiuni?*

Cezar Coşniţă.

*Soluţie* dată de D-nii: Ad. C. Gheorghiu, Corneliu N. Popescu şi P. I. Ghişoiu & M. V. Raţiu.

Fie ABC un triunghiu oarecare, iar $A_1$, $B_1$, $C_1$, $A'$, $B'$, $C'$ respectiv picioarele înălţimilor şi ale medianelor lui; fie deasemenea $M_a$, $M_b$, $M_c$ mijloacele segmentelor $A_1A'$, $B_1B'$, $C_1C'$, iar H, O şi $\omega$ respectiv ortocentrul, centrul cercului circumscris şi centrul cercului lui Euler.

Se observă că:

$$(1)\quad S_{(ABC)} = S_{(\omega BC)} + S_{(\omega CA)} + S_{(\omega AB)} = \tfrac{1}{2}(a.\omega\overline{M_a} + b.\omega\overline{M_b} + c.\omega\overline{M_c}).$$

Dar figura $OHA_1A'$ este un trapez, iar $\omega$ şi $M_a$ sunt mijloacele laturilor neparalele; se ştie deasemenea că:

$$HA_1 = 2R\cos B\cos C \text{ etc...} \quad \text{şi} \quad OA' = R\cos A \text{ etc...}$$

Prin urmare avem :

$$\overline{\omega M_a} = \frac{HA_1 + OA'}{2} = \frac{R(2\cos B\cos C + \cos A)}{2} =$$

$$\frac{R[2\cos B\cos C - \cos(B + C)]}{2} =$$

$$\frac{R}{2}(\cos B\cos C + \sin B\sin C) = \frac{R}{2}\cos(B - C).$$

In mod analog se găseşte

$$\overline{\omega M_b} = \frac{R}{2}\cos(C - A) \quad \text{şi} \quad \overline{\omega M_c} = \frac{R}{2}\cos(A - B).$$

Inlocuind aceste valori în (1) se obţine relaţia din enunţ, căreia i se poate da semnificaţia geometrică că *reprezintă suprafaţa triunghiului* ABC *egală cu suma suprafeţelor triunghiurilor* $\omega BC$, $\omega CA$, $\omega AB$, *unde* $\omega$ *este centrul cercului lui* EULER.

*Observaţii.*

1. Domnii: N. ALDEA, N. T. DONCIU, P. I. GHIŞOIU, N. N. MIHĂILEANU şi I. C. SAVIN, au transformat expresia din enunţ în relaţia

$$S = \tfrac{1}{2}R(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$$

arătând că această relaţie exprimă suprafaţa triunghiului ABC prin descompunerea în triunghiurile AOB, BOC şi COA, unde O este centrul cercului circumscris.

2. Domnii: N. O ZAHARIA, I. C. VONICA şi JUSTIN N. VÂLCEANU au stabilit relaţia din enunţ, considerând suprafaţa triunghiului ABC formată din triunghiurile AHB, BHC şi CHA, unde H este ortocentrul triunghiului ABC.

3. O altă interpretare geometrică a fost dată de D-l N. N. VELICESCU.

4. Au stabilit sau verificat relaţia din enunţ Domnii: OV. I. BIRCEANU, I. C. BOIAN, C. D. IONESCU-ŢIU, I. MURĂROIU, I. C SAVIN şi JUSTIN N. VÂLCEANU.

5. D-l N. ALDEA a remarcat că relaţia din enunţ se poate transformă şi în $S = Rp'$, unde $p'$ este semiperimetrul triunghiului ortic şi că această ultimă relaţie face obiectul problemei 343 din R M. T.

COLONEL GH. I. LITEANU.

---

PROBLEMA 3884. *Pe una din laturile unui unghiu dat* A *se iau lungimile* $AB = a$, $BC = b$. *Să se determine pe cealaltă latură a unghiului un punct* M, *aşa încât unghiul* $\sphericalangle BMC$ *să fie egal cu unghiul dat* $\alpha$.

*Din discuţie să se deducă valoarea maximă a unghiului* $\alpha$.

TH. ANGHELUŢĂ.

*Au rezolvat problema,* D-şoara ELEONORA ANTONIU şi D-nii: AUREL C. CONSTANTINESCU, CONSTANTIN GH. LUPESCU, MIHAIL VELEA.

Vom determină punctul M, formând ecuaţia care ne va da distanţa

$$AM = x.$$

Punem încă pentru prescurtare

$$\sphericalangle AMB = \beta.$$

Aşà fiind, din triunghiul ABM avem egalitatea

$$\frac{x}{\sin(A+\beta)} = \frac{a}{\sin\beta},$$

din care deducem

$$(1) \qquad \operatorname{cotg}\beta = \frac{x - a\cos A}{a\sin A}.$$

De asemenea din triunghiul ACM avem ecuaţia

$$\frac{x}{\sin(A+\alpha+\beta)} = \frac{a+b}{\sin(\alpha+\beta)},$$

care se poate încă pune sub forma

$$(2) \qquad \operatorname{cotg}\beta = \frac{x\cos\alpha - (a+b)\cos(A+\alpha)}{(a+b)\sin(A+\alpha) - x\sin\alpha}.$$

Din egalităţile (1) şi (2) se deduce ecuaţia

$$(3) \qquad x^2 - [mb\sin A + (2a+b)\cos A]\,x + a(a+b) = 0,$$

unde s'a pus

$$m = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Această ecuaţie de gradul al doilea determină în general două puncte M ca soluţie a problemei propuse. Rezultat ce se puteà prevede, căci problema revine a duce un cerc prin punctele B, C aşà ca arcul BC să fie capabil de unghiul $\alpha$. In general acest cerc va tăià dreapta AM în două puncte.

Ne rămâne deci să discutăm ecuaţia (3). Pentru aceasta considerăm descriminantul $\delta$.

$$(4) \qquad \delta = m^2b^2\sin^2 A + mb(2a+b)\sin 2A + (2a+b)^2\cos^2 A - 4a(a+b).$$

După cum se observă, $\delta$ este un trinom de gradul al doilea în raport cu $m$. Rădăcinile acestui trinom sunt reale, căci discriminantul lui

$$4ab^2 (a + b) \sin^2 A$$

este pozitiv. De altfel aceste rădăcini sunt

$$m_1 = \frac{-(2a + b)\cos A - 2\sqrt{a(a + b)}}{b \sin A}$$

$$m_2 = \frac{-(2a + b)\cos A + 2\sqrt{a(a + b)}}{b \sin A}.$$

Prin urmare, ca ecuația (3) să aibă rădăcinile reale trebuie să avem sau inegalitatea

$$m \geqq m_2$$

sau inegalitatea

$$m \leqq m_1.$$

Dar ecuația (3) trebuie să ne deà pentru $x$ un număr pozitiv. Se observă că această ecuație, dacă are rădăcinile reale, ele sunt de acelaş semn. Suma acestor rădăcini

$$mb \sin A + (2a + b)\cos A$$

se anulează pentru

$$m = -\frac{(2a + b)\cos A}{b \sin A} \tag{5}$$

Această valoare a lui $m$ este cuprinsă între rădăcinile $m_1$ şi $m_2$ ale lui $\delta$,

$$m_1 < \frac{-(2a + b)\cos A}{b \sin A} < m_2.$$

In adevăr, substituind valoarea lui $m$ dată de egalitatea (5) în expresia lui $\delta$ din (4), avem

$$-4a(a + b) < 0.$$

Prin urmare, ca ecuația (3) să deà pentru $x$ o valoare pozitivă, trebuie să avem

$$m \geqq m_2$$

sau

$$\operatorname{cotg}\alpha \geqq \frac{-(2a + b)\cos A + 2\sqrt{a(a + b)}}{b \sin A}.$$

Dacă avem semnul inegalității, ecuația (3) dă două valori pozitive pentru $x$ şi deci problema propusă are două soluții.

Dacă avem semnul egalității, cele două rădăcini ale ecuației (3) sunt egale și cercul ce trece prin B, C este tangent în M la dreapta AM.

Fie $\omega$ unghiul cuprins între 0 și $\pi$ dat de ecuația

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{-(2a+b)\cos A + 2\sqrt{a(a+b)}}{b\sin A}.$$

Pentruca problema să fie posibilă, urmează să avem

$$\alpha \leqq \omega.$$

Deci valoarea maximă a lui $\alpha$ este $\omega$.

*Interpretarea soluțiilor negative.* Am văzut că dacă $m$ satisface inegalitatea

$$m \leqq m_1$$

atunci rădăcinile ecuației (3) sunt negative.

Pentru a interpretà aceste rădăcini, să găsim soluția problemei propuse luând în loc de unghiurile A și $\alpha$ unghiurile $A' = \pi - A$ și $\alpha' = \pi - \alpha$, lungimile $a$ și $b$ rămânând aceleași.

Cu aceste date avem ecuație analoagă ecuației (3).

$$(6) \quad x^2 - [m'b\sin A' + (2a+b)\cos A']x + a(a+b) = 0$$

unde am notat

$$m' = \operatorname{cotg}\alpha'.$$

Pentruca ecuația (6) să ne deà rădăcini reale și pozitive, am văzut că trebuie să avem

$$(7) \qquad m' \geqq \frac{-(2a+b)\cos A' - 2\sqrt{a(a+b)}}{b\sin A'}.$$

Dacă ținem însă seamă de relațiile dintre A și A' și dintre $\alpha$ și $\alpha'$, ecuația (6) și condiția (7) devin

$$x^2 + [mb\sin A + (2a+b)\cos A]x + a(a+b) = 0$$

$$m \leqq \frac{-(2a+b)\cos A - 2\sqrt{a(a+b)}}{b\sin A} = m_1.$$

In rezumat, dacă avem

$$m \leqq m_1$$

rădăcinile negative ale ecuației (3) schimbate de semn, reprezintă soluția problemei pentru unghiurile $\pi - A$ și $\pi - \alpha$.

In acest caz unghiul $\alpha$ are un minimum. Harnicii noștri corespondenți au rezolvat problema pe cale algebrică și geometrică. Totuși n'au discutat complet ecuația (3). Scopul urmărit acesta erà.

PROBLEMA 3980. *In triunghiul* ABC *se cunoaşte latura* BC = a, *diferenţa laturilor* $b - c = \frac{a}{2}$ *şi se ştie că medianele* CC', BB' *corespunzătoare laturilor* b *şi* c *verifică relaţia* CC' = k . BB', k *fiind un parametru variabil. Să se rezolve triunghiul* ABC. *Discuţie. Să se afle unghiurile triunghiului* ABC *pentru cea mai mare valoare posibilă a lui* k.

N. ABRAMESCU.

*Soluţie* dată de D-ra MARIANA ABRAMESCU şi D-nii : TR. PUTA, SUB-LT. AURELIAN STAN, VASU VASILE (Studenţi, Cluj), N. Mihăileanu, Şt. Olteanu.

Ştim că

$$BB' = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} \quad , \quad CC' = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

Valorile lui $b$ şi $c$ sunt date de ecuaţiile

$$b - c = \frac{a}{2} \quad , \quad BB' = k \,.\, CC',$$

sau

$$b - c = \frac{a}{2} \; , \; (2k^2 + 1)\, c^2 - (k^2 + 2)\, b^2 + 2(k^2 - 1)\, a^2 = 0.$$

Inlocuind pe $b = c + \frac{a}{2}$, ecuaţia care dă pe $c$ este

$$(1) \qquad (k^2 - 1)\, c^2 - (k^2 + 2)\, ac + \frac{7k^2 - 10}{4}\, a^2 = 0.$$

Ca valorile lui $c$ să fie acceptabile, trebuie mai întâiu să fie reale şi pozitive. Realizantul ecuaţiei (1) este

$$(2) \qquad \Delta = [(k^2 + 2)^2 - (k^2 - 1)(7k^2 - 10)]\, a^2 = 3a^2 (\, 2k^4 + 7k^2 - 2).$$

Rădăcinile sunt reale dacă $-2k^4 + 7k^2 - 2 > 0$. Ecuaţia $2k^4 - 7k^2 + 2 = 0$ are rădăcinile date de $k^2 = \frac{1}{4}(7 \pm \sqrt{49 - 16})$; deci cele patru rădăcini sunt $k = \pm \frac{1}{2}\sqrt{7 \pm \sqrt{33}}$. Aceste rădăcini fiind de forma $\sqrt{A + \sqrt{B}}$, pentru uşurinţa calculelor, este bine a le transformă în $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{u} + \sqrt{v}$, $u$ şi $v$ fiind numere raţionale. Pentru a găsi pe $u$ şi $v$, ridicăm relaţia precedentă la pătrat şi avem :

$$A + \sqrt{B} = u + v + 2\sqrt{uv}\,.$$

Egalând părțile raționale și cele iraționale (cu radicali), obținem

$$A = u + v \quad , \quad \sqrt{B} = 2\sqrt{u.v} \, ,$$

și deci ecuațiile ce dau pe $u$ și $v$ sunt

$$u + v = A \quad , \quad uv = \frac{B}{4} \, ,$$

astfel că $u$ și $v$ sunt rădăcinile ecuației la gradul al doilea în $z$,

$$z^2 - Az + \frac{B}{4} = 0 \, .$$

Rezolvând, avem:

$$u \, , \, v = z = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2} \, .$$

Insă $u$ și $v$ trebuind să fie raționale (fără radicali), trebuie ca $A^2 - B$ să fie pătrat perfect, $A^2 - B = C^2$. In acest caz, $u = \frac{A + C}{2}$ , $v = \frac{A - C}{2}$. In exemplul considerat, $\sqrt{7 \pm \sqrt{33}}$, avem: $A = 7$, $B = 33$, $A^2 - B = 49 - 33 = 16 = 4^2$.

Deci

$$\sqrt{7 \pm \sqrt{33}} = \sqrt{u} \pm \sqrt{v} = \sqrt{\frac{11}{2}} \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{22} \pm \sqrt{6}) \, .$$

$$k = \pm \tfrac{1}{4}(\sqrt{22} \pm \sqrt{6}) \, .$$

Realizantul $\Delta$ dat de (2) se poate deci scrie sub forma

$$\Delta = -6a^2\left(k + \frac{\sqrt{22} + \sqrt{6}}{4}\right)\left(k + \frac{\sqrt{22} - \sqrt{6}}{4}\right)\left(k - \frac{\sqrt{22} - \sqrt{6}}{4}\right)\left(k - \frac{\sqrt{22} + \sqrt{6}}{4}\right) .$$

Insemnând cu

$$M = \left(k + \frac{\sqrt{22} + \sqrt{6}}{4}\right)\left(k + \frac{\sqrt{22} - \sqrt{6}}{4}\right), \; N = \left(k - \frac{\sqrt{22} - \sqrt{6}}{4}\right)\left(k - \frac{\sqrt{22} + \sqrt{6}}{4}\right),$$

avem: $\Delta = -6a^2 M \cdot N$ şi deci tabloul:

| $k$ | M | N | $\Delta$ |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | + | + | − |
| $-\frac{\sqrt{22}+\sqrt{6}}{4}$ | − | + | + |
| $-\frac{\sqrt{22}-\sqrt{6}}{4}$ | + | + | − |
| $\frac{\sqrt{22}-\sqrt{6}}{4}$ | + | − | + |
| $\frac{\sqrt{22}+\sqrt{6}}{4}$ | + | + | − |
| $\infty$ | | | |

Dar $k$ fiind pozitiv, realizantul este pozitiv numai dacă

$$\tfrac{1}{4}(\sqrt{22}-\sqrt{6}) < k < \tfrac{1}{4}(\sqrt{22}+\sqrt{6}).$$

Pentru a discută semnul rădăcinilor $c$ ale ecuaţiei (1), formăm suma $S = \frac{k^2+2}{k^2-1}a$ şi produsul $P = \frac{7k^2-10}{4(k^2-1)}a^2$, al căror semn e dat de $k^2-1$ şi $(7k^2-10)(k^2-1)$. Aceste expresii având rădăcinile $k = \pm 1$ şi $k = \pm\sqrt{\frac{10}{7}}$, $k = \pm 1$, avem tabloul:

| $k$ | S / $k^2-1$ | P / $(7k^2-10)(k^2-1)$ | Semnul rădăc. $c$ |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | + | + + + | două pozitive |
| $-\sqrt{\frac{10}{7}}$ | + | − + − | una poz., una neg. |
| $-1$ | − | − − + | două negative |
| $1$ | + | − + − | una poz., una neg. |
| $\sqrt{\frac{10}{7}}$ | + | + + + | două pozitive |
| $\infty$ | | | |

Cum $k > 0$, urmează că dacă $1 < k < \sqrt{\frac{10}{7}}$, avem pentru $c$ o valoare pozitivă şi una negativă, deci cea pozitivă acceptabilă; dacă $k > \sqrt{\frac{10}{7}}$ avem două valori pozitive pentru $c$, deci acceptabile; adică, pentru $\sqrt{\frac{10}{7}} < k < \frac{\sqrt{22}+\sqrt{6}}{4}$ avem două valori pentru $c$ [1]).

Dar $a$, $b$, $c$ fiind laturile unui triunghiu, trebuie să avem $b + c > a$ şi cum este dat $b - c = \frac{a}{2}$, înlocuind pe $b = \frac{a}{2} + c$, urmează să avem $\frac{a}{2} + c + c > a$, $c > \frac{a}{4}$. Deci rădăcinile ecuaţiei (1) în $c$ mai mari ca $\frac{a}{4}$. Pentru a vedeà condiţiile să facem transformarea $u = c - \frac{a}{4}$ şi vedem că dacă $c > \frac{a}{4}$, atunci $u > 0$, şi deci în loc de a pune condiţia ca rădăcinile ecuaţiei (1) să fie mai mari ca $\frac{a}{4}$, este tot una a scrie că rădăcinile $u$ ale ecuaţiei transformate din (1) să fie pozitive. Inlocuim deci o condiţie de mărime pentru rădăcinile unei ecuaţii cu o condiţie de semn pentru ecuaţia transformată, care se exprimă mai uşor.

Pentru a găsì aceasta, să înlocuim în (1) pe $c = u + \frac{a}{4}$ şi avem:

$$(k^2-1)\left(u+\frac{a}{4}\right)^2 - (k^2+2)\,a\left(u+\frac{a}{4}\right) + \frac{7k^2-10}{4}a^2 = 0,$$

sau

$$(3) \qquad u^2(k^2-1) - \frac{a}{2}(k^2+5)\,u + \frac{a^2}{16}(25k^2-49) = 0.$$

Trebuie să scrim că această ecuaţie în $u$ are rădăcini pozitive. Realizantul acestei ecuaţii este:

$$\frac{a^2(k^2+5)^2}{4} - \frac{a^2}{4}(k^2-1)(25k^2-49) = 3a^2(-2k^4+7k^2-2),$$

adică acelaş ca al ecuaţiei (1), ceeace trebuià, căci prin transformarea

1) Pentru discuţii generale, a se vedeà *Curs complimentar de Algebră* de MANICATIDE revăzut şi adăugit de N. ABRAMESCU.

lineară (de gradul întâiu în raport cu $u$ şi $c$) $u = c - \frac{a}{4}$ se vede că dacă $c$ este real, atunci şi $u$ este real. Produsul şi suma rădăcinilor ecuaţiei (3) fiind

$$P_1 = \frac{a^2(25k^2 - 49)}{16(k^2 - 1)} \quad , \quad S_1 = \frac{a(k^2 + 5)}{2(k^2 - 1)} ,$$

vedem că semnele lor depind de factorii expresiilor $25k^2 - 49$ şi $k^2 - 1$ şi avem deci tabloul

| $k$ | $P_1$ | $S_1$ | rădăc. $u$ | rădăc. $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | | | | |
| | $+ + \quad +$ | $+$ | două pozitive | două accept. |
| $-\frac{7}{5}$ | | | | |
| | $- + \quad -$ | $+$ | una neg., una poz. | una accept. |
| $-1$ | | | | |
| | $- - \quad +$ | $-$ | două negative | nici una |
| $1$ | | | | |
| | $- + \quad -$ | $+$ | una neg., una poz. | una accept. |
| $\frac{7}{5}$ | | | | |
| | $+ + \quad +$ | $+$ | două pozitive | două accept. |
| $\infty$ | | | | |

Avem deci tabloul general:

| $k$ | Realiz. | Semnul răd. $c$ | $c > \frac{a}{4}$ | Soluţii accept. |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{\sqrt{22} - \sqrt{6}}{4}$ | 0 | | | |
| | $+$ | | | |
| $1$ | $+$ | una pozitivă | una | una |
| $\sqrt{\frac{10}{7}}$ | $+$ | două pozitive | una | una |
| $\frac{7}{5}$ | $+$ | două pozitive | două | două |
| $\frac{\sqrt{22} + \sqrt{6}}{4}$ | 0 | | | |

Se vede că cea mai mare valoare posibilă a lui $k$ este $\frac{1}{2}\sqrt{7+\sqrt{33}} = \frac{1}{4}(\sqrt{22}+\sqrt{6})$. Laturile $b$ şi $c$ sunt date de ecuaţiile (1) şi $b - c = \frac{a}{2}$. Inlocuind pe $k$ cu valoarea aceasta, avem:

$$k^2 - 1 = \frac{7+\sqrt{33}}{4} - 1 = \frac{3+\sqrt{33}}{4},$$

$$k^2 + 2 = \frac{15+\sqrt{33}}{4}, \quad \frac{7k^2-10}{4} = \frac{9+7\sqrt{33}}{16}.$$

Ecuaţia (1) devine:

$$\frac{3+\sqrt{33}}{4}c^2 - \frac{15+\sqrt{33}}{4}ac + \frac{9+7\sqrt{33}}{16}a^2 = 0,$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{11})c^2 - (5\sqrt{3}+\sqrt{11})ac + \frac{3\sqrt{3}+7\sqrt{11}}{4}a^2 = 0,$$

al cărei realizant este nul, valoarea considerată pentru $k$ fiind tocmai o rădăcină a acestuia. Rezultă deci rădăcina dublă

$$c = \frac{5\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2(\sqrt{3}+\sqrt{11})}a = \frac{(5\sqrt{3}+\sqrt{11})(\sqrt{3}-\sqrt{11})}{2(-8)}a = \frac{\sqrt{33}-1}{4}a.$$

Deci laturile triunghiului sunt:

$$c = \frac{\sqrt{33}-1}{4}a \ , \quad b = \frac{\sqrt{33}+1}{4}a \ , \quad a.$$

Avem $2p = a + b + c = \frac{2+\sqrt{33}}{2}a$ , $p = \frac{2+\sqrt{33}}{4}a$,

$$p - a = \frac{\sqrt{33}-2}{4}a \ , \quad p - b = \frac{a}{4} \ , \quad p - c = \frac{3a}{4}.$$

Deci

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{3}{29}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} = (\sqrt{33}-2)\sqrt{\frac{3}{29}}.$$

Aplicând logaritmi, avem:

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\log 3 - \log 29}{2} = \frac{0{,}47712 - 1{,}46240}{2} = \frac{0{,}47712 + \bar{2}{,}53760}{2}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\bar{1}{,}01472}{2} = \frac{\bar{2} + 1{,}01472}{2} = \bar{1}{,}50736.$$

50703 . . . . . $17^0 49'$
50736
50746 . . . . . $17^0 50'$
43 . . . . . 60
33 . . . . . $\frac{60 \times 33}{43} = 46''$ aproximativ.

$$\frac{A}{2} = 17^0 49' 46'',$$
$$A = 35^0 39' 32''.$$

Pentru calculul lui B, luăm $\sqrt{33} = 5{,}74456$ şi avem:

$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \log 3{,}74456 + \log \sqrt{\frac{3}{29}} = 0{,}57340 + \bar{1}{,}50736,$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 0{,}08076.$$

Cum logaritmul tangentei este pozitiv, arcul e mai mare ca $45^0$, a cărui tangentă e 1 şi al cărei logaritm este zero; deci căutăm de jos în sus arcele şi minutele pe dreapta, şi avem:

08055 . . . . . $50^0 17'$
08076
08081 . . . . . $50^0 18'$
26 . . . . . 60″
21 . . . . . $\frac{60 \times 21}{26} = 48''$ aprox.

$$\frac{B}{2} = 50^0 17' 48''$$
$$B = 100^0 35' 36''.$$

Pentru calculul lui $C = 180^0 - (A + B) = 43^0 44' 52''$.

*Soluţie* dată de D-nii Adrian Gheorghiu şi Vasu Vasile.

Presupunând BC fixă în mărime şi poziţie, din relaţia $b - c = \frac{a}{2}$, $AC - AB = \frac{a}{2}$, rezultă că vârful A al triunghiului ABC descrie o iperbolă cu focarele B şi C, cu semiaxa transversă egală cu $\frac{a}{4}$, centrul fiind A′ mijlocul lui BC. Semiaxa netransversă este dată de

$$\beta^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16} = \frac{3a}{4}, \quad \beta = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Asimptotele se construesc uşor şi fac cu BC unghiuri de $60^0$.

Din relația $CC' = k.BB'$ înmulțind cu $\frac{2}{3}$, și însemnând cu G centrul de greutate (baricentrul) triunghiului ABC, avem:

$$\frac{2}{3} CC' = k \frac{2}{3}.BB', \qquad CG = k.BG.$$

Luând pe BC punctele D și E, astfel ca $DC : DB = -k$ (D între C și B), $EC : EB = k$ ($k > 0$), locul punctului G este cercul descris pe DE ca diametru.

Dar, din punctul G se obține punctul A, cu relația $A'G : A'A = \frac{1}{3}$. Deci, luând pe BC punctele F și H astfel ca $A'D : A'F = \frac{1}{3}$ ($A'F = 3A'D$), $A'H = 3A'E$, punctul A descrie cercul de diametru FH, omoteticul celui de diametru DE, în raportul $\frac{1}{3}$.

Vârful A al triunghiului ABC este la intersecția iperbolei cu cercul FH, adică în general patru soluții, pozițiile punctelor A fiind două câte două simetrice în raport cu BC. Considerând numai pe cele deasupra lui BC, se vede că avem o soluție, două, sau nici una, după cum semicercul FH taie în unul, două puncte, sau nu o taie.

Ca să taie numai într'un punct, trebuie ca A'F să fie mai mică decât semiaxa transversă, $A'F < \frac{a}{4}$. Notând cu $B\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $C\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ coordonatele punctelor B și C în raport cu origina A', BC ca axa $x$ și perpendiculara în A' ca axa $y$, abscisa punctului D este dată de $DC : DB = k$, și este $\frac{-\frac{a}{2} + k\frac{a}{2}}{1+k} = \frac{a}{2}\frac{k-1}{k+1}$; aceea a lui F este $\frac{3a}{2}\frac{k-1}{k+1}$. Condiția ca să avem o soluție este ca $\frac{3a}{2}\frac{k-1}{k+1} < \frac{a}{4}$, $k < \frac{7}{5}$.

Discuția se face complet, scriind ecuațiile iperbolei și cercului. Coordonatele punctelor D și E sunt date de $DC : DB = -k$, $EC : EB = k$ și sunt (origina în A')

$$D\left(A'D = \frac{a}{2}\frac{k-1}{k+1}, 0\right), \quad E\left(A'E = \frac{-\frac{a}{2} - k\frac{a}{2}}{1-k} = \frac{a}{2}\frac{k+1}{k-1}, 0\right).$$

Acelea ale punctelor F şi H sunt $A'F = 3A'D = \frac{3a}{2}\frac{k-1}{k+1}, 0$; $A'H = 3AE = \frac{3a}{2}\frac{k+1}{k-1}$. Abscisa centrului cercului de diametru FH este $\frac{3a}{4}\left(\frac{k-1}{k+1}+\frac{k+1}{k-1}\right) = \frac{3a}{2}\frac{k^2+1}{k^2-1}$, raza $\frac{3a}{2}\frac{k^2+1}{k^2-1} - \frac{3a}{2}\frac{k-1}{k+1} = \frac{3ak}{k^2-1}$, iar ecuaţia cercului de diametru FH este:

$$\left(x-\frac{3a}{2}\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2+y^2=\frac{9a^2k^2}{(k^2-1)^2},\quad x^2+y^2-\frac{3a(k^2+1)}{k^2-1}x+\frac{9a^2}{4}=0.$$

Ecuaţia iperbolei fiind $48x^2 - 16y^2 = 3a^2$, eliminând pe $y$, obţinem:

$$y^2 = 3x^2 - \frac{3a^2}{16},\quad 4x^2 - \frac{3a(k^2+1)}{k^2-1}x + \frac{33a^2}{16} = 0,$$

al cărei realizant este $\frac{12a^2}{(k^2-1)^2}(-2k^4+7k^2-2)$; deci aceeaş discuţie ca şi în prima soluţie, $\frac{1}{4}(\sqrt{22}-\sqrt{6}) < k < \frac{1}{4}(\sqrt{22}+\sqrt{6})$. Cum $k > 1$, rezultă că $1 < k < \frac{1}{4}(\sqrt{22}+\sqrt{6})$. Punctele D şi E se află la dreapta lui A', unul în interior, altul în exterior. Avem o soluţie când F este între A' şi vârful din dreapta al iperbolei, $\frac{3a}{2}\frac{k-1}{k+1} < \frac{a}{4}$, $k < \frac{7}{5}$; deci $1 < k < \frac{7}{5}$ o soluţie şi două soluţii când $\frac{7}{5} < k < \frac{1}{4}(\sqrt{22}+\sqrt{6})$. Cea mai mare valoare a lui $k$ este $k = \frac{1}{4}(\sqrt{22}+\sqrt{6})$ când cercul, după cum ne arată ecuaţia, este tangent iperbolei.

---

PROBLEMA 4049. *Să se rezolve trigonometriceşte ecuaţia:*

$$\operatorname{tg}2x = 2\cos x.$$

I. Ionescu.

*Soluţie* dată de D-nii N. N. Aldea (student, Bucureşti) şi H. P. Ionescu (Oltenita).

Inlocuind $\operatorname{tg}2x$ prin $\sin 2x/\cos 2x$, gonind numitorul şi desfăcând pe $\sin 2x$, găsim:

$$2\sin x\cos x = 2\cos x\cos 2x,$$

$$\therefore\quad \cos x(\sin x - \cos 2x) = 0, \qquad (1)$$

şi înlocuind $\cos 2x$ prin egalul său $(1 - 2\sin^2 x)$ găsim:

$$\cos x\,(2\sin^2 x + \sin x - 1) = 0.$$

$$\therefore\ \cos x\,(2\sin x - 1)\,(\sin x + 1) = 0,$$

$$\therefore\ \cos x = 0, \qquad \sin x = \tfrac{1}{2}, \qquad \sin x = -1,$$

$$\therefore\ x = k\pi + \tfrac{1}{2}\pi\,;\ x = 2k\pi + (\pi/6)\,,\ x = (2k+1)\pi - (\pi/6)\,;\ x = 2k\pi - \tfrac{1}{2}\pi.$$

Ultima formulă e cuprinsă în prima. Rămân dar soluţiile:

$$x = k\pi + \tfrac{1}{2}\pi, \qquad x = 2k\pi + (\pi/6), \qquad x = 2k\pi + (5\pi/6).$$

In primul cerc, soluţiile sunt: $30^0$, $90^0$, $150^0$, $270^0$.

Soluţie dată de D-nii V. I. Ionescu (Bacalaureat, Bucureşti) şi I. C. Parepeanu (Bacalaureat, Braşov).

Egalând cu 0 paranteza dela (1), se găseşte:

$$\sin x = \cos 2x = \sin\,(\tfrac{1}{2}\pi - 2x),$$

$$\therefore\ x = 2k\pi + (\tfrac{1}{2}\pi - 2x) \quad \text{şi} \quad x = (2k+1)\,\pi - (\tfrac{1}{2}\pi - 2x),$$

$$\therefore\ 3x = 2k\pi + (\pi/2) \qquad \text{şi} \quad x = -2k\pi - (\pi/2)$$

$$\therefore\ x = k\,(2\pi/3) + (\pi/6) \quad , \quad x = 2k\pi - \tfrac{1}{2}\pi.$$

Ultima este şi soluţia lui $\cos x = 0$, cuprinsă în soluţia generală:

$$x = k\pi + \tfrac{1}{2}\pi.$$

Au rezolvat această problemă parţial, sau prin ajutorul ecuaţiilor de gradul al doilea şi D-na Ştefania Căpitan Truţescu (Cluj), N. D. Zane, V. I. C. Visarion, M. I. Popescu-Stăneşti, D V. Romeo (Roman), I. Curchi (Chişinău), A. M. Buţan (Liceul militar, Monastirea Dealului), A. Em. Bădescu, C. Gh. Lupescu (Roman), N. N. Mihăileanu (Constanţa), R. M. Patraulea, G. St. Roşca, Fl. Radu, I. C. Şova-Grigorescu, V. Crivăţ, E. Mereuţă, N. Popescu.

*Notă.* Nici un corespondent nu a examinat dacă este permis a goni numitorul.

I. I.

## *EXERCIŢII

4. Dacă $m$ este prim cu 5555 şi $3m + n$ este impar, atunci expresia:

$$5557^{15551,2n} - 30858024^{3m+n} - 2.30880249^{3887,8n} + m^{2222.10^4} - 1$$

se divide cu $5555^2$.

Haralamb P. Ionescu-Biss.

R. Se observă că:

$$E \equiv 5557^{15551,2n} - 2.30880249^{3887,8n} - 30858024^{3m+n} =$$

$$E \equiv 5557^{2.5554\frac{7n}{5}} - 2.5557^{5554\frac{7n}{5}} - (5555^2 - 1)^{3m+n}.$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

Când $3m + n = 2p + 1$ avem:

(1) $E \equiv \left(5557^{5557^{\frac{7n}{5}}} - 1\right)^2 = \mathcal{M}.\ 5555^2$.

(A se vedeà exercițiul 21 — G. M. — XXXVI — 157).

Pe de altă parte avem:

$$2222 \cdot 10^4 = 4000 \cdot 5555 = 5555 \cdot \varphi(5555)$$

unde $\varphi(5555)$ este indicatorul lui 5555, și atunci $m$ prim cu 5555 dă:

(2) $m^{2222.10^4} - 1 = \mathcal{M}.\ 5555^2$.

(A se vedeà G. M. XXVII. O aplicație a teoremei lui FERMAT).

Din (1) și (2) reiese că expresia e divizibilă cu $5555^2$.

## PROBLEME PROPUSE

*3908 [1]). O corabie în mers se găsește la un moment dat pe aceiaș linie cu două faruri, cel mai apropiat fiind la 3 km. depărtare de corabie. După o oră de mers, pe o direcție ce face unghiul $\alpha$ cu linia farurilor, razele vizuale, duse dela pilotul corăbiei la cele două faruri, fac cu direcția de mers unghiurile $\beta$ și $\gamma$. Să se afle iuțeala corăbiei și depărtarea dintre faruri.

M. GHERMĂNESCU.

4071. Si l'on ajoute le nombre 117 au quadruple du reste de la racine cubique entière à une unité près, du produit de six entiers consécutifs, on obtient un carré.

V. THÉBAULT.

4072. Să se demonstreze că $(a^3 + b^3)$ nu se poate divide cu 11 decât dacă $(a + b)$ se divide cu 11.

I. IONESCU.

4073. Suma a patru fracții de forma $(a - 1)/a$ este un întreg; care sunt acele fracții?

I. B. FLORESCU.

4074. Să se demonstreze că oricare ar fi valorile atribuite numerelor întregi M și N, expresiunea:

$$E \equiv 2M(M^2 + 3N^2)$$

nu poate fi cub perfect.

CĂPITAN GR. ZAPAN.

1) Problema propusă la pag. 400, Vol. XXXV, se înlocueşte cu prezenta, întrucât este identică cu problema No. 3630, propusă la pag. 240, Vol. XXXIII.

4075. $p$, $q$, $r$, $s$ fiind distanțele dela punctul de întâlnire a diagonalelor, la laturile AB, BC, CD, DA ale patrulaterului ABCD, să se demonstreze relația:

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DA} = \frac{qs}{pr}.$$

GH. ZAPAN.

*4076. Două sfere goale în interior, una de fer și alta de aluminium, au razele exterioare egale. Introduse într'un vas cu apă, ambele se scufundă pânăla jumătate.

Știind că densitatea ferului este *7,8* și a aluminiumului *2,9* se cere grosimea pereților fiecărei sfere.

CĂP. I. LINTEȘ.

*4077. Să se elimine $x$ între relațiile:

$$a \sin(\alpha + x) + b \sin(\beta + x) = c$$
$$a' \cos(\alpha + x) + b' \cos(\beta + x) = c'.$$

N. C.

*4078. Să se rezolve ecuația

$$x^3 - p(r_a + r_b + r_c)\, x^2 + p^4 x - Sp^4 = 0$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu oarecare.

CEZAR COȘNIȚĂ.

4079. Se consideră un cerc (C) de rază variabilă și cu centrul în centrul elipsei:

$$a(x^2 + y^2) - bxy + (b^2 - 2a^2)\, x - aby + a^3 - 1 = 0.$$

Se cere ecuația fascicolului de drepte care unesc centrul elipsei cu punctele ei de intersecție cu cercul (C) și să se deducă apoi suprafața elipsei.

V. C. POPESCU.

4080. Să se construiască curba

$$\rho = \frac{2\sin^2\omega - 1}{a\cos\omega + b\sin\omega} ab$$

știind că $a$ și $b$ sunt pozitive.

COL. GH. BUICLIU.

---

*Notă.* Soluția problemei No. 3918, publicată la pag. 35, Vol. XXXVI, fiind eronată, această problemă se consideră nerezolvată.

*ERATĂ.* La problema No. 4058 propusă la pag. 40, Vol. XXXVII, se va citi $\lambda = -3$, în loc de $\lambda = 3$.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

---

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Abramescu Mariana* (4058, 65); *Aldea N. N.* (2394, 3365, 4019, 54, 61); *Arsavschi Alexe* (4017); *Burlacu Eug.* (3770, 936); *Coşniţă Cezar* (3210, 902, 4015, 36, 43, P); *Crivăţ Vladimir* (3935, 79, 4008, 14, 23, 54); *Curchi I.* (P); *Deac Iuliu* (4027); *Dumitraşcu N. Romeo* (4027); *Georgescu-Piteşti D.* (A, P); *Gheorghiu C. Adr.* (3857, 969, 4009); *Ionescu-Biss P. H.* (2861, 3365, 961, 84, 4054, R); *Ionescu I. V.* (4015, 32); *Mereuţă E.* (4038, 51, 54); *Mihăileanu N. N.* (2063, 108, 3814, 15, 23, 24, 26, 37, 54, 55, 72, 905, 73, 4036); *Olteanu E. Şt.* (4017, 19, 27, 28, 29, 38, 47, 58); *Parapeanu C. I.* (4014, 26); *Patraulea N.* (3936, 68, 74, 95, 4036, 65); *Petrescu I.* (3968, 4054); *Popescu I. M.* (4026); *Popescu N.* (4054); *Popescu Petre* (4051, 52, 54, 65); *Roşca St. G.* (4007, 27, 28); *Rusu D. Const.* (3932, 4014, 27); *Savin C. I.* (4069); *Truţescu Ştefania* (4006) *Vasiliu C. I.* (1892, 911, 34, 73, 94, 2552, 850, 3108, 50, 80, 356, 65, 660, 75, 749); *Vasu Vasile* (P); *Velicescu* N. (3935, 36, 4008, 14, 23, 54, 65); *Visarion V.* (4026, 37); *Zamfirescu I.* (4055, P); *Zane D. N.* (4026).

---

*Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

---

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

---

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

# Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

**La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călugărei 23, Bucureşti 4.**

# GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVII.

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1931.

## SUMARUL

1. Sur les points isotomiques dans le triangle . *V. Thébault.*
2. Divizibilitatea determinanţilor numerici . . . *I. Ionescu.*
3. Ecuaţiuni cu rădăcinile subunitare . . . . . *Petre Sergescu.*
4. Note matematice: 13 — 15.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 212.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 3532, 3679, 3758, 3870, 3888, 3907, 3910, 3938, 3971, 4026.
9. Exerciţii: 5 — 11.
10. Probleme propuse: 4081 — 4090.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1931

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVII se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orăşanu**, Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

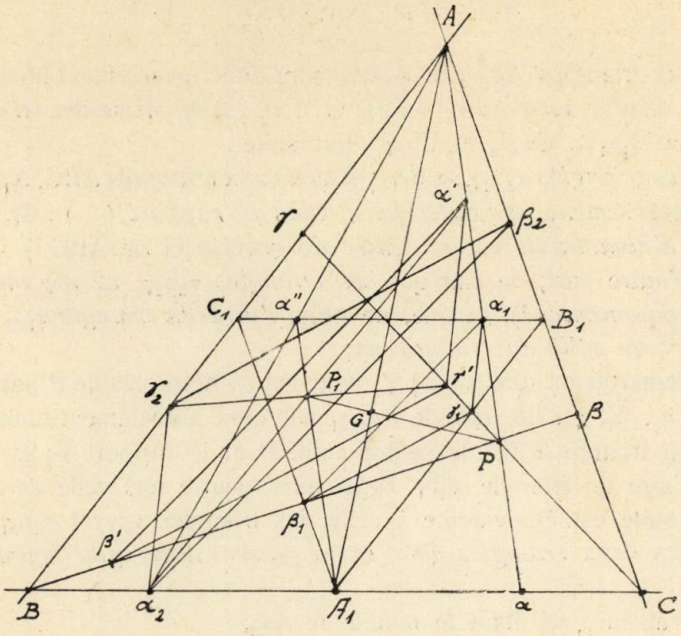
Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 405, 22, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 80, 84, 93, 99, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 80, 96, 98, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 72, 76, 83, 87, 4010, 13, 21, 24, 30, 31, 34, 35, 40, 44, 45, 46, 48, 53, 56, 57, 59, 62, 63, 66, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

# SUR LES POINTS ISOTOMIQUES DANS LE TRIANGLE

**Notations.** — Soient un triangle ABC inscrit dans un cercle (O); (I), ($I_a$), ($I_b$), ($I_c$), les cercles tritangents; ($O_a$) celui des neuf points; H l'orthocentre, G le centre de gravité, K le point de LEMOINE, Γ, V, ceux de GERGONNE et de NAGEL, $A_1$, $B_1$, $C_1$, les milieux des côtés, A′, B′, C′, les pieds des hauteurs; D, E, F, $D_a$,




$E_b$, $F_c$, les contacts des cercles tritangents sur les côtés et entre les sommets.

**Théorème.** — *Soient un triangle* ABC *et un point* P *quelconque de son plan. Les droites* AP, BP, CP, *rencontrent les côtés opposés en* α, β, γ. *Marquons sur* Aα, Bβ, Cγ, *des points* α′, β′, γ′, *tels que*

$$\overline{A\alpha'} = \overline{P\alpha}\ ,\ \overline{B\beta'} = \overline{P\beta}\ ,\ \overline{C\gamma'} = \overline{P\gamma}.$$

*Les droites qui joignent* $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, *aux isotomiques* $\alpha_2$, $\beta_2$ $\gamma_2$, *de* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, *se coupent au complémentaire* $P_1$ *de* P.

En effet, plaçons des axes orientés dans le sens de circulation ABC sur les côtés du triangle, et soient $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, les milieux de $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$, les isotomiques de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, c'est-à-dire leurs symétriques par rapport aux milieux des côtés. On a, en grandeur et en signe,

$$A_1\beta_1 : C\beta = A_1\gamma_1 : B\gamma = 1 : 2,$$

ou

$$A_1\beta_1 : A\beta_2 = A_1\gamma_1 : A\gamma_2 = -1 : 2.$$

Les triangles $A\beta_2\gamma_2$ et $A_1\beta_1\gamma_1$ sont donc inversement homothétiques, dans le rapport $(-1 : 2)$, et il en est de même des triangles $B\alpha_2\gamma_2$ et $B_1\alpha_1\gamma_1$, $C\alpha_2\beta_2$ et $C\alpha_1\gamma_1$. Par suite :

*Les triangles* $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, *inscrits aux triangles* ABC, $A_1B_1C_1$, *sont inversement homothétiques, dans le rapport* $(-1 : 2)$, *et le centre d'homothétie est le centre de gravité* G *de* ABC [1]).

D'autre part, on sait que *les triangles* $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ *et* $\alpha\beta\gamma$, *ont des aires équivalentes* [2]), et que, de plus, *l'aire du triangle* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ *est le quart de celle du triangle* $\alpha\beta\gamma$ [3]).

Remarquons que $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, sont les symétriques de P par rapport à $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$. Le triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ est donc directement homothétique au triangle $\alpha'\beta'\gamma'$, le centre étant P et le rapport 1 : 2.

L'aire du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ égale ainsi quatre fois celle de $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et par suite est équivalente à celle des triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2$.

*Les deux triangles* $\alpha'\beta'\gamma'$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ *sont donc symétriquement égaux.*

D'ailleurs, $\alpha''$ étant le milieu de $A\alpha_2$,

$$\alpha_2A_1 : \alpha_2\alpha = 1 : 2 = \alpha_2\alpha'' : \alpha_2A.$$

La droite $A_1\alpha''$ passe au milieu de $\alpha_2\alpha'$, c'est-à-dire au centre de symétrie des triangles $\alpha'\beta'\gamma'$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2$.

---

1) V. Thébault, *Mathesis* 1931 — 195.

2) Cesaro, *Nouvelle Correspondance* 1880 — 472.

3) E. N. Barisien, *Bulletin de Mathématiques Elémentaires*, 1898—317.

Comme

$$1 : 2 = \alpha''P_1 : A\alpha = -\alpha''P_1 : P\alpha,$$

$P_1$ est l'homologue de P dans l'homothétie (ABC, $A_1B_1C_1$), autrement dit le *complémentaire* de P par rapport à ABC.

2. Voici l'application de ce théorème à divers points remarquables du triangle.

*a)* $P \equiv H$.

*Les droites qui joignent* $\alpha', \beta', \gamma'$, *aux isotomiques des pieds des hauteurs se coupent au centre du cercle circonscrit.*

*b)* $P \equiv O$.

*Les droites qui unissent* $\alpha', \beta', \gamma'$, *aux isotomiques des intersections des diamètres* AO, BO, CO, *avec les côtés, se coupent au centre du cercle des neuf points.*

*c)* P *est le réciproque de l'orthocentre.*

Les droites qui joignent $\alpha', \beta', \gamma'$, aux pieds des hauteurs passent au point de LEMOINE.

*d)* $P \equiv \Gamma$.

*Les droites qui joignent* $\alpha', \beta', \gamma'$ *aux contacts* $D_a$, $E_b$, $F_c$, *des cercles exinscrits se coupent au point de* LEMOINE *du triangle* $I_a\ I_b\ I_c$.

*e)* $P \equiv V$.

*Les droites qui unissent* $\alpha', \beta', \gamma'$ *aux contacts du cercle inscrit se coupent au centre du cercle inscrit.*

Comme $\alpha', \beta', \gamma'$, sont les symétriques de D, E, F, par rapport à I, $\alpha', \beta', \gamma'$, se confondent avec les extrémités D', E', F', des diamètres DI, EI, FI, du cercle inscrit.

On a ainsi ces relations

$$\overline{D_aV} = \overline{AD'}\ ,\ \overline{E_bV} = \overline{BE'}\ ,\ \overline{F_cV} = \overline{CF'};$$

$$\overline{AV} = \overline{D_aD'}\ ,\ \overline{BV} = \overline{E_bE'}\ ,\ \overline{CV} = \overline{F_cF'}.$$

*f)* $P \equiv I$.

*Les droites qui joignent* $\alpha', \beta', \gamma'$, *aux isotomiques des pieds de bissectrices interieures se coupent au centre du cercle inscrit au triangle* $A_1B_1C_1$, autrement dit, *au centre du cercle de* TAYLOR *de* ABC.

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

# DIVIZIBILITATEA DETERMINANȚILOR NUMERICI

Să presupunem că avem un determinant numeric ale cărui elemente sunt numere întregi și că am voi să știm, înainte de a-l desvoltă, dacă el este divizibil prin un număr dat $m$.

Se știe că dacă elementele unei linii, sau coloane, ale unui determinant sunt sume de câte două elemente, determinantul este suma altor două analoage cu primul în care înlocuim aceà linie, sau coloană, odată cu primele ei elemente compunătoare și altă dată cu celelalte. Avem de exemplu:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 + \alpha_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n + \alpha_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix}.$$

Să presupunem aci că toate numerele $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ sunt $\mathfrak{M}m$ și că $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ sunt mai mici ca $m$, putând fi unii din ei și nuli. Primul determinant din partea a doua, având toate elementele primei coloane $\mathfrak{M}m$, se va divide cu $m$. De aci reese că restul împărțirii prin $m$ a determinantului din prima parte a egalității este același ca restul împărțirii prin $m$ a ultimului determinant. Ceeace am făcut cu prima coloană putem face și cu celelalte, adică să le înlocuim cu cei mai mari multipli ai lui $m$ conținute în ele și cu resturile împărțirii lor cu $m$. Desfăcând determinanții în alții, ca mai sus, ajungem la concluzia:

*Restul împărțirii unui determinant ale cărui elemente sunt numere întregi prin un număr dat este același cu restul care se obține împărțind cu același număr determinantul format înlocuind elementele primului prin resturile împărțirii lor prin acel număr.*

Acest determinant îl vom numi, pentru prescurtare, *determinantul resturilor*. Putem dar enunță următoarea teoremă:

*Un determinant ale cărui elemente sunt numere întregi e divizibil printr'un număr dacă determinantul resturilor se divide cu acel număr.*

Ca exemplu să considerăm determinantul următor, care este cel dat în problema 1778, în care am înmulțit cu 10 toate elementele, spre a le face întregi:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 134 & 167 & 160 & 169 \\ 110 & 127 & 98 & 128 \\ 100 & 150 & 159 & 134 \\ 78 & 102 & 111 & 104 \end{vmatrix}.$$

Să cercetăm dacă acest determinant se divide cu primele 10 numere.

Divizibilitatea cu 2 este evidentă, întrucât elementele primei coloane sunt numere perechi.

Pentru divizorii 3, 4 și 5 determinanții resturilor sunt:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

La primul, desvoltăm după ultima linie și apoi minorul corespondent lui 2, după ultima linie. Se vede imediat că determinantul are valoarea $2(2 \times 2 - 1) = 6 = \mathfrak{M}3$. Deci determinantul dat se divide cu 3. La al doilea putem divide cu 2 prima coloană și rămâne de văzut dacă noul determinant este pereche. Desvoltând după linia treia numai termenul ce corespunde lui 3 ar puteà fi nepereche. Rămâne de cercetat dacă minorul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

este pereche. Scăzând a doua linie din prima el se reduce la $(1 \times 2 - 1 \times 3) = -1$. Deci determinantul dat nu se divide

cu 4. Dacă la ultimul determinant scădem coloana treia din a patra şi desvoltăm după linia patra găsim :

$$4 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Determinantul este nul deoarece coloanele extreme sunt identice. Deci determinantul dat se divide cu 5.

Din cele expuse reese că determinantul dat se divide $6 = 2 \times 3$ şi cu $10 = 2 \times 5$ şi că nu se divide cu 8, căci nu se divide cu 4. Rămâne să cercetăm dacă se divide cu 7 şi cu 9. Să ne propunem, de data aceasta, să găsim chiar resturile împărţirii dacă divisibilitatea nu are loc. Determinanţii resturilor sunt :

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 6 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 8 & 5 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

La primul determinant din prima linie scădem pe a treia, din a doua dublul celei de a treia, iar la a patra adunăm pe a treia. Din sume scoatem toţi $\mathfrak{M}7$, iar la scăderile imposibile adunăm un $\mathfrak{M}7$. Determinantul astfel transformat are nule pe ultima coloană afară de 1 dela linia patra şi se reduce astfel la minorul :

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Adunăm la linia intâia pe a doua şi din a treia scoatem de trei ori pe a doua. Prima coloană capătă două elemente nule afară de 1 dela linia mijlocie şi se reduce la determinantul minor :

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

a cărui valoare este $(-1)\,(-1)\,(5 \times 6 - 5 \times 1) = 25$. Restul împărţirei prin 7 este 4. Deci determinantul dat este $\mathfrak{M}7 + 4$.

La al doilea determinant scoatem din prima şi ultima coloană dublul celei de a doua, iar la a treia adunăm pe a doua, şi suprimăm sau adunăm $\mathfrak{M}9$. Determinantul capătă pe linia a doua elemente nule afară de 1 dela coloana doua. El se reduce la minorul:

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix}.$$

Scădem linia a doua din prima şi se vede că determinantul se reduce la minorul:

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$$

a cărui valoare este $6(7 - 3) = 24$. Restul împărţirei prin 9 este deci 6. Determinantul dat este $\mathfrak{M}9 + 6$. El nu se divide deci cu 9.

E de observat că dacă valorile determinanţilor sunt negative, atunci şi rezultatele precedente trebuiesc socotite ca negative, adică el ar fi $(\mathfrak{M}7 + 4)$ şi $-(\mathfrak{M}9 + 6)$, ceeace revine că valoarea lor absolută devine $\mathfrak{M}7 + 3$ şi $\mathfrak{M}9 + 3$. Resturile valorilor absolute ar fi deci respectiv 3 şi 3.

Chestiunea tratată aci nu are importanţă pentru teoria numerelor; ea însă poate folosi la controlul calculelor numerice pentru desvoltarea determinanţilor. Astfel putem aplică acelor calcule proba prin 9. Dacă după desvoltarea determinantului dat (2) facem proba cu 9 şi nu găsim restul 3, calculul este eronat, dacă restul, a fost determinat exact, ceeace e mai uşor de verificat, căci al doilea determinant (4) se poate calculă repede pe multe căi. Pentru determinanţii cu termeni zecimali, cum a fost dat cel din problema 1778, proba cu 9 este aplicabilă. Corespondenţii care s'au muncit ca să scoată nul acel determinant s'ar fi convins repede că urmăresc o imposibilitate. Dacă un determinant este nul el este divizibil cu orice număr, şi prin urmare restul împărţirii cu 9 trebuie să fie 0. Neobţinându-se acest rezultat trebuiă să se conchidă nenulitatea determinantului.

Sper dar că de acest mijloc de control se vor folosi cei ce vor voi să-şi controleze rezultatele desvoltării unui determinant, nu numai la fine, dar şi in cursul operaţiunilor.

I. Ionescu.

# ECUAȚIUNI CU RĂDĂCINILE SUBUNITARE

La Universitatea din Cluj s'a întemeiat de câțiva ani un *Institut pentru Invățământul Matematicei.* Scopul lui e să familiarizeze pe studenți cu cercetarea științifică, să le arate cum se pot face memorii originale de matematici. Ședințele sunt săptămânale și aproape regulat se analizează — de către studenți, asistenți, sau profesori diferite articole matematice. Directorul acestui Institut e D-l Th. Angheluță, iar secretar D-l D. V. Ionescu. Dar toți profesorii și asistenții, precum și studenți din toți anii de studiu, iau parte la lucrări.

La una din ședințele acestui Institut, D-l M. Velea, însărcinat cu facerea unei comunicări, s'a îmbolnăvit subit și a trebuit găsit, în câteva minute, un alt program. D-l D. V. Ionescu a propus să se analizeze o problemă din *Revue de Mathématiques Spéciales.* Ședința a fost foarte animată, căci aproape toți profesorii prezenți au luat cuvântul. De aci au urmat generalizări succesive ale problemei. E cel mai bun mijloc de a arătà, pe un caz simplu, cum se poate găsi un lucru nou. M'am gândit că expunerea rapidă a discuțiilor din ședință poate fi de folos pentru cititorii *Gazetei Matematice* și de aceea rezumez, în cele ce urmează, desbaterile.

D. V. Ionescu. Problema ce avem de rezolvat e următoarea: *Ecuația*

$$(1)\quad (1+n)\,x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0$$

*are toate rădăcinile cu modulul subunitar.*

Fie $x_0$, de afix $M_1$ o rădăcină oarecare a ecuației (1). Problema revine la a dovedi că segmentul $\overline{OM_1}$ e subunitar. Să însemnăm cu $M_i$ afixul lui $x_0^i$, unde $i$ ia succesiv valorile 1, 2, ... $n$. Problema se reduce la a arătà că suma geometrică a vectorilor

$$(2)\qquad 1 + OM_1 + OM_2 + \ldots + OM_{n-1}$$

nu poate echilibrà vectorul $(n+1)\,OM_n$, dacă $|x_0| \geqslant 1$. Ori în acest caz lungimea $OM_i$ e mai mare sau egală cu lungimea $OM_k$ dacă $i > k$ și, ca atare, modulul sumei (2) e inferior sumei a $n$ termeni egali cu cel cu modulul cel mai mare, adică $OM_{n-1}$. (Egalitatea nu poate aveà loc decât dacă $x_0 = 1$, care nu verifică ecuația (1) în mod evident). Deci, suma geometrică (2) e reprezentată printr'un vector a cărui lungime e *mai mică* decât $nOM_{n-1}$.

Atunci, devine evident că acect vector nu poate echilibrà pe $(n + 1)\,OM_n$, căci avem, evident:

$$n < n + 1 \qquad \text{lung. } OM_{n-1} \leqslant \text{lung. } OM_n .$$

Rezultă că ecuația (1) nu are decât rădăcini subunitare în modul.

De altfel, raționamentul precedent arată că și rădăcinile ecuației

$$(3) \qquad nx^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = 0$$

au toate modulul subunitar.

N. Abramescu. E ușor de văzut că ecuațiile (1) sau (3) au câte o singură rădăcină reală cel mult. In adevăr, ecuația (1) se poate scrie

$$(n + 1)\,x^n + \frac{x^n - 1}{x - 1} = 0.$$

Dacă înmulțim cu $(x - 1)$, noua ecuație are rădăcinile ecuației (1) și, în plus, rădăcina 1. Or, noua ecuație este =

$$(4) \qquad (n + 1)\,x^{n+1} - nx^n - 1 = 0.$$

In baza teoremei lui Descartes, ecuația (4) are o rădăcină pozitivă și, dacă $n$ e impar, o rădăcină negativă. Dar rădăcina pozitivă e 1, care nu aparține ecuației (1). Urmează că, dacă $n$ e impar, ecuația (1) are o singură rădăcină reală. Dacă $n$ e par, ecuația (1) nu are nici o rădăcină reală, în baza unui raționament analog.

E probabil că teorema despre modulul rădăcinilor se poate demonstrà și cu ajutorul formei (4).

G. Bratu. In adevăr, putem pune ecuația (4) sub forma

$$(n + 1)\,x^{n+1} = 1 + nx^n .$$

Dacă însemnăm cu $\rho$ modulul lui $x$, avem:

$$|(n + 1)\,x^{n+1}| = (n + 1)\,\rho^{n+1}$$

$$|1 + nx^n| \leqslant 1 + |nx^n| = 1 + n\rho^n .$$

Deci ecuația (4) atrage

$$(n + 1)\,\rho^{n+1} \leqslant 1 + n\rho^n .$$

Dacă studiul variației funcțiilor de $\rho$ din cei doi membri, când $\rho$ variază dela 0 la $\infty$ arată imediat că inegalitatea nu poate avea loc decât când $\rho < 1$, iar egalitatea are loc pentru $\rho = 1$. Rădăcina $\rho = 1$, corespunde lui $x = 1$, pe care l-am introdus noi când am înmulțit cu $(x-1)$. Rezultă că ecuația (4) nu admite, în afară de $x = 1$, decât rădăcini pentru care $\rho < 1$, adică rădăcini cu modulul subunitar. c. c. t. d.

P. SERGESCU. Ecuațiile (1) și (3) pot fi generalizate.

*Fie ecuația, cu coeficienți reali sau complexi:*

$$(5) \qquad Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + K = 0$$

*în care*

$$|A| \geqslant |B| + |C| + \ldots + |K| .$$

*Toate rădăcinile acestei ecuații au modulul subunitar, sau cel mult 1 în unele cazuri particulare când inegalitatea precedentă e transformată în egalitate.*

Fie $\rho$ modulul unei rădăcini a ecuației (5). Dacă $\rho$ ar fi supraunitar, am avea, pentru rădăcina considerată:

$$\begin{aligned} |Bx^{n-1}| &< |Bx^n| = |B|\rho^n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |K| &< |Kx^n| = |K|\rho^n \end{aligned}$$

Deci:

$$|Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + K| \leqslant |Bx^{n-1}| + |Cx^{n-2}| + \ldots + |K|$$

$$< |B|\rho^n + |C|\rho^n + \ldots + |K|\rho^n = [|B| + |C| + \ldots + |K|]\rho^n \leqslant |A|\rho^n .$$

Din acest șir de inegalități și egalități succesive se deduce:

$$(6) \qquad |Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + K| < |Ax^n| .$$

Deci ecuația (5) nu poate fi verificată. Ipoteza $\rho > 1$ a fost absurdă. Rezultă deci că $\rho$ nu poate fi decât subunitar, sau cel mult 1. Teorema e demonstrată. E însă evident că pentru $|A| > |B| + \ldots + |K|$, ajungem tot la inegalitatea (6) și pentru $\rho = 1$.

Dacă însă

$$|A| = |B| + |C| + \ldots |K|$$

se poate întâmplà, în unele cazuri particulare, ca ecuația (5) să aibă și rădăcini de modùl 1. Un astfel de caz particular îl constitue în mod evident toate ecuațiile binome. Alt exemplu:

Ecuația

$$2x^6 + x^4 + 1 = 0 \tag{7}$$

satisface la condiția [2 = 1 + 1] și admite soluția *i*.

Se poate defini cu precizie clasa de ecuații (5) care pot avea rădăcini de modùl 1. Trebue, mai întâi, ca $|A| = |B| + |C| + \ldots + |K|$. După aceea, trebue ca toți termenii $Bx^{n-1}$, $Cx^{n-2}, \ldots K$ să fie reprezentați pe *aceeaș direcție* pornită din 0 și care să fie direct opusă lui $Ax^n$. Cu alte cuvinte, trebue să existe un argument $\theta$, care să satisfacă la congruențele următoare:

$$\arg B + (n-1)\theta \equiv \arg C + (n-2)\theta \equiv \ldots \equiv \arg K \pmod{2\pi}$$

$$\arg A + n\theta \equiv \arg K + \pi \pmod{2\pi}.$$

*Caz particular.* Dacă ecuația (5) are toți coeficienții reali, argumentele sunt 0 sau $\pi$. Pentru fixarea ideilor, să luăm cazul simplu când toți coeficienții *sunt pozitivi*. (Se pot face considerații analoage pentru coeficienții de semne oarecare). Argumentele coeficienților sunt zero. Pentru ca congruențele precedente să fie satisfăcute, $\theta$ trebue să fie comensurabil cu $\pi$, în baza ultimei congruențe. Fie $\theta = \frac{p\pi}{q}$. Atunci numai exponenții *multipli de* $2q$ pot verifică primele congruențe, rezultă că coeficienții puterilor diferite de multiplii lui $2q$ ale lui $x$ sunt nuli (Fracția $\frac{p}{q}$ e presupusă ireductibilă). In fine, ultima congruență impune ca exponentul $n$ să fie un *multiplu impar de* $q$. Ecuațiile care satisfac la aceste condiții pot avea rădăcini de modùl *unu*. Exemplul (7) satisface la aceste condiții, căci $q = 2$ și $n = 3 \times 2 = 6$. Odată ce aceste lucruri au fost stabilite, se pot formà ori câte exemple analoage. Pentru $q = 3$ putem pune:

$$2x^9 + x^6 + 1 = 0$$

$$3x^{15} + x^{12} + x^6 + 1 = 0 \quad \text{etc.}$$

Ele admit ca rădăcini, rădăcinile cubice ale lui — 1. ș. a. m. d.

Th. Angheluță. Problema comportă și generalizări de altă natură.

Să considerăm că în ecuația (5), avem condiția că A e coeficientul cu modulul cel mai mare. Ce se poate spune despre rà-

dăcinile ecuației? De data aceasta, modulul lor nu mai e limitat de 1. In adevăr, în ecuația

$$16x^2 + 8x - 15 = 0$$

cel mai mare coeficient, în modul, e 16. Dar rădăcinile ecuației sunt $-\frac{5}{4}$ și $\frac{3}{5}$, din care prima are modulul supraunitar.

Totuși, se poate stabili teorema:

*Dacă într'o ecuație, coeficientul celei mai înalte puteri a lui x e coeficientul cel mai mare în modul, toate rădăcinile ecuației sunt cuprinse în cercul de centru* 0 *și de rază* 2.

Să reluăm ecuația (5) în care să presupunem:

$$|A| > |B|, |A| > |C|, \ldots |A| > |K|.$$

Fie $\rho$ modulul unei rădăcini $x$ oarecare, pe care-l presupunem supraunitar. Avem:

$$|Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + K| \leqslant |B|\rho^{n-1} + |C|\rho^{n-2} + \ldots + |K| < |A|[\rho^{n-1} + \ldots + 1].$$

Pentru ca ecuația (5) să poată fi satisfăcută, trebuie deci:

$$|A|\rho^n < |A|[\rho^{n-1} + \rho^{n-2} + \ldots + 1]$$

$$\rho^n < \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}$$

$$\rho^{n+1} - 2\rho^n + 1 < 0.$$

Or, ecuația $\rho^{n+1} - 2\rho^n + 1 = 0$ are două rădăcini pozitive, dintre care uua e $\varphi$ iar cea de a doua e inferioară lui 2. In adevăr, studiul variației funcției de $\rho$ din primul membru, arată că ea are un minimum negativ pentru $\rho = \frac{2n}{n+1}$ și că e pozitivă (egală cu 1) pentru $\rho = 2$. Ca atare, a doua rădăcină pozitivă a ecuației în $\rho$ e inferioară lui 2. Aceasta demonstrează teorema.

Ar fi interesant de văzut dacă limita dată, 2, poate fi coborâtă sau nu, dacă e funcțiune de gradul $n$, etc.

De asemeni, cazul ecuației cu toți coeficienții reali și pozitivi, ar puteà da vre-o limită mai mică, eventual 1.

Problemele precedente pot fi studiate în legătură cu teorema cunoscută a lui Kakeya asupra ecuațiilor algebrice.

Ședința Institutului a luat sfârșit cu aceste indicații de cercetări originale pentru studenți.

Petre Sergescu.

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

# NOTE MATEMATICE

13. *Asupra problemei 3652.* Se cereà patratul perfect de forma *aabbbca* şi s'a găsit 9966649.

Cercetând şi celelalte forme *bbbacaa, acabbba,* etc. se găsesc patratele:

$$1490^2 = 2220100 \quad (bbbacaa)$$

$$2335^2 = 5452225 \quad (acabbba)$$

$$2980^2 = 8880400 \quad (bbbacaa).$$

Celelalte forme nu au soluţii.

VIRGILIU C. POPESCU.

14. *O demonstraţie trigonometrică a teoremei lui* CEVA.

Imi propun să dau teoremei lui CEVA, o demonstraţie trigonometrică, după cum cred că i s'au mai dat şi altele.

Considerăm cevienele $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ concurente în punctul M, a cărui poziţie este determinată de unghiurile $MAB = \alpha$, $MBC = \beta$; $MCA = \gamma$.

Se vede însă imediat, că pentru precizarea lui M, sunt de ajuns două din aceste unghiuri.

Există deci, între $\alpha$, $\beta$ şi $\gamma$, o relaţie, pe care ne propunem s'o aflăm.

Pentru aceasta, privim figura.

Din triunghiul BMC, putem scrie:

$$(1) \qquad \frac{BM}{\sin(C-\gamma)} = \frac{MC}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(\beta+C-\gamma)}.$$

Trecem la triunghiul AMC, unde avem, la fel:

$$(2) \qquad \frac{AM}{\sin\gamma} = \frac{MC}{\sin(A-\alpha)}$$

sau, ţinând seamă de (1), (2) devine:

$$(3) \qquad AM = \frac{a\sin\beta\,\sin\gamma}{\sin(\beta+C-\gamma)\sin(A-\alpha)}.$$

In fine, triunghiul AMB, ţinând seamă de (1) şi (3), dă:

$$\frac{MB}{\sin\alpha} = \frac{AM}{\sin(B-\beta)}$$

$$\therefore \quad \frac{a\sin(C-\gamma)}{\sin(\beta+C-\gamma)\sin\alpha} = \frac{a\sin\beta\,\sin\gamma}{\sin(\beta+C-\gamma)\sin(A-\alpha)\sin(B-\beta)}$$

sau

$$(4) \quad \sin\alpha\,.\,\sin\beta\,.\,\sin\gamma = \sin(A-\alpha)\,.\,\sin(B-\beta)\,.\,\sin(C-\gamma).$$

De aci putem află unul din unghiurile $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, două fiind date. Avem într'adevăr:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin\beta\,\sin\gamma}{\sin A\,\sin(B-\beta)\,\sin(C-\gamma)} + \operatorname{cotg}A$$

şi analoagele.

* * *

Considerăm acum triunghiurile $ABA_1$ şi $ACA_1$.
Avem astfel:

$$\frac{A_1B}{\sin\alpha} = \frac{AA_1}{\sin B} \quad ; \quad \frac{CA_1}{\sin(A-\alpha)} = \frac{AA_1}{\sin C}$$

de unde, prin împărţire, obţinem

$$(5) \qquad \frac{A_1B}{A_1C} = -\frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}\,\frac{\sin C}{\sin B}\,.$$

Analog, avem:

$$(6) \qquad \frac{B_1C}{B_1A} = -\frac{\sin\beta\,\sin A}{\sin(B-\beta)\,\sin C}\,.$$

$$(7) \qquad \frac{C_1A}{C_1B} = -\frac{\sin\gamma\,\sin B}{\sin(C-\gamma)\,\sin A}\,.$$

Inmulţind între ele relaţiile (5), (6) şi (7), avem:

$$(8) \qquad \frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B} = -\frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(B-\beta)}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin(C-\gamma)}$$

sau, având în vedere (4), (8) devine:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B} = -1.$$

Adică tocmai relaţia lui Ceva.

Nicolae N. Mihăileanu.

15. *O definiție a cercurilor directoare.*

1. Problemă generală. Se dă o conică ($\Gamma$), două tangente fixe *ab*, *ac* în punctele *m*, *n*; *b*, *c* fiind două punte fixe oarecare. O tangentă mobilă ($t$) taie pe *ab* în *c'* pe *ac* în b'. Locul punctului $I \equiv (bb', cc')$ e o conică (C). In adevăr, între *b'* și *c'* există o corespondență omografică, atunci razele *bb'*, *cc'* fiind în omografie, intersecția lor I descrie o conică (C) trecând prin *b*, *c*. La poziția *ab* a tangentei ($t$) *c'* vine în *m*, *b'* în *a*, intersecția I devine punctul *m*. Analog *n* e un punct I. Deci conica (C) trece prin *m*, *n*. Determin polul lui *bc* față de (C). Raza omoloagă în fascicolul (*b*) a razei *cb* considerată în fascicolul (*c*) e a doua tangentă din *b* la ($\Gamma$), ea e tangenta în *b* la (C). In mod analog tangenta în *c* la (C) e a doua tangentă din *c* la ($\Gamma$). Intersecția lor *p* este polul lui *bc* față de (C).

2. Particularizare. Fie *b*, *c* punctele ciclice, atunci *a* e un focar $F_1$ al conicei ($\Gamma$), conica (C) devine un cerc ce trece prin intersecțiile lui ($\Gamma$) cu directoarea corespunzătoare focarului $F_1$. Punctul *p* devine centrul său și e focarul $F_2$ conjugat lui $F_1$ al conicei ($\Gamma$).

3. Pe de altă parte consider două puncte O și O' ca cercuri de rază nulă, coarda lor de intersecție la distanță finită e perpendiculara pe mijlocul lui OO' ea conținând deci intersecțiile $\omega$, $\omega'$ ale dreptelor izotrope duse din O și O'. Sau, având un punct O, dreptele sale izotrope taie o dreaptă reală oarecare $\Delta$ în punctele imaginare $\omega$ și $\omega'$ celelate drepte izotrope duse prin $\omega$, $\omega'$, se taie în un punct real O' simetric lui O față de $\Delta$. (Prin calcul se găsește relația de distanțe $\overline{\omega\omega'} = i.\ \overline{OO'}$).

4. Ținând seama de observația dela (3), cercul dela (2) se identifică cu cercul director, căci un punct $I \equiv (bb', cc')$ e intersecția dreptelor ce unesc punctele ciclice *b*, *c* respectiv cu punctele *b'*, *c'* unde o tangentă ($t$) la ($\Gamma$) taie dreptele izotrope duse prin punctele imaginare *b'*, *c'* în care dreptele izotrope ale lui $F_1$ taie o tangentă ($t$) la conica ($\Gamma$), deci I e simetricul lui $F_1$ față de ($t$). De unde acest enunț:

Fie conica ($\Gamma$) focarul $F_1$ și o tangentă ($t$) mobilă tăind dreptele izotrope ale lui $F_1$ în $\omega$ și $\omega'$, celelalte drepte izotrope duse prin $\omega$ și $\omega'$ se taie în punctul real I ce descrie cercul director cu centrul în $F_2$, focarul conjugat lui $F_1$ în ($\Gamma$). ($F_1$ și $F_2$, focarele reale).

Am fost condus la aceste observațiuni cu ocazia rezolvării problemei 3906 propusă în *Gazeta Matematică* Vol. XXXV pagina 399.

ADRIAN C. GHEORGHIU.

# BIBLIOGRAFIE

**Bulletin of the American Mathematical Society.** Vol. XXXVII, No. 9, Partea I, New-York. Septemvrie 1931. Adunarea de vară din Mineapolis, de M. H. INGRAHAM. Adunarea din Pasadena a unei secțiuni a Asociațiunii pentru înaintarea științelor, de A. D. MICHAL. *Lefschetz* asupra topologiei, de P. A. SMITH. *Fubini* și *Cech*, de E. P. LANE. Extras din comunicări prezentate Societății.

**Mathesis.** Tomul XLV, No. 8. Octomvrie 1931. Gembloux. Asupra fascicolelor conjugate, de J. DIEUDONNÉ. Asupra conicelor care au contact de ordinul al treilea cu o curbă plană, de R. GOORMAGHTIGH. Involuții asociate unei proiectivități, de P. LIBOIS. Varia de D-ra LYDIE GANASSINI. Notă asupra formulei de derivațiune în raport cu un parametru sub semnul integralei, de R. J. H. GERMAY.

**Anales de la Sociedad Cientifica Argentina.** Tomul CXII, Fascicola III. Septemvrie 1931. Buenos-Aires. Observatorul național din Cordoba, de L. C. GUERIN. Profesorul P. BARBARIN, ales membru al Academiei de Științe din Buenos-Aires. Centenarul geometriei neeuclidiene, de P. BARBARIN.

**Boletin Matematico.** Anul IV, No. 6. August 1931. Buenos-Aires. Asupra suprafețelor elementare de al treilea ordin ale geometriei, de A. BLOCH. Chestiuni remarcabile de geometria triunghiului în legătură cu cercurile tritangente, de M. GRÜNBAUM.

**Idem.** No. 7. Septemvrie 1931. Buenos-Aires. Asupra triunghiurilor lui PITAGORA, V. THÉBAULT. Chestiuni remarcabile ale geometrii triunghiului în relațiune cu cercurile tritangente, de M. GRÜNBAUM.

**Boletin Matematico Elemental.** Ano II, No. 8. 1931. Buenos-Aires. Dreptunghii remarcabile ale cercului celor nouă puncte, de B. I. BAIDAFF.

**Journal de mathématiques élémentaires,** publié par H. VUIBERT. Anul 56, No. 3. Noemvrie 1931, Paris.

**Idem.** No. 4. Noemvrie, 1931.

**Revista Matematică din Timișoara.** Anul XI, No. 9. Noemvrie 1931. Timișoara. Asupra unor identități, de CESAR COȘNIȚĂ.

D. GERMANI. *Sur la structure des formules et la synthèse des lois de similitude en physique. Considération sur les grandeurs et leurs unités.* (Broșura No. 28 a *Institutului național român pentru studiul amenajării și utilizării izvoarelor de energie*, București 1931).

Cl. Servais. *Sur la géométrie du tetraédre.* Supliment la *Mathesis*, 1931. (Extras din *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, Iunie 1931). Bruxelles.

E. Heuchamps. *Sur des suites très générales qui se dévelopent conformément à la loi de formation des réduites d'une fraction continue.* (Supliment la *Mathesis.* Gembloux 1931).

Capitaine ingénieur G. Niculescu. *Sur une famille spéciale de tolérances appliquée aux moteurs d'aviation.* (Extras din *«Bulletin scientifique de l'École polytechnique de Timişoara»*). Timişoara, 1931.

Căpitan inginer G. Niculescu. *Studiu critic asupra Challenge-ului internaţional de turism din 1929.* (Extras din *România aeriană*). Bucureşti, 1931.

## CERERI

212. De când s'a introdus la noi notaţiunea „No." pentru a indică un număr de ordine ?

Cercetările trebuiesc făcute înainte de 28 Februarie 1847 căci am întâlnit această notaţie în *«Legiuire pentru adăogirea şi reformarea primirii tacsii de înfăţişare în judecată»* dela data de mai sus.

I. I.

## DIVERSE

Secţiunea matematică a Societăţii române de ştiinţe a ţinut şedinţă în seara zilei de 2 Noemvrie, la care au făcut comunicări D-nii: O. Onicescu, asupra unei teoreme de unicitate şi D-l Gr Moisil asupra unei definiţiuni a turbilonului.

In şedinţa dela 16 Noemvrie a făcut comunicări D-l I. Ionescu despre Aritmetica lui Gheorghe Lazăr, D-l P. Sergescu asupra limitelor modulelor rădăcinilor ecuaţiilor algebrice şi D-l M. Ghermănescu asupra unor ecuaţii cu derivate parţiale.

## PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3532. *Să se arate că funcţia*

$$y = -\frac{x^2}{2} + 4x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{5}{4}$$

*are un singur maximum. Să se calculeze valoarea lui* x, *care face pe* y *maximum, cu o aproximaţie mai mică ca* $\frac{1}{10}$.

TH. ANGHELUŢĂ.

*A rezolvat problema* D-l SAULEA N. EMIL.

Derivata funcţiei propuse fiind

$$y' = -x + 4 - \frac{1}{2}\sin 2x,$$

trebuie să arătăm că ecuaţia

$$2x - 8 + \sin 2x = 0$$

are o singură rădăcină reală.

Pentru simplificare punem

$$2x = u$$

şi

$$f(u) = u - 8 + \sin u.$$

Funcţia $f(u)$ este crescătoare $u$ variind dela $-\infty$ la $+\infty$, căci derivata

$$f'(u) = 1 + \cos u,$$

se anulează fără să schimbe semnul şi deci ecuaţia

$$f(u) = 0 \tag{1}$$

are cel mult o rădăcină reală.

Dar se observă că avem

$$f(2\pi) = 2\pi - 8 < 0$$

şi

$$f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{2} - 8 + 1 > 0.$$

Prin urmare, ecuaţia (1) are o singură rădăcină reală cuprinsă în intervalul

$$\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right).$$

Acest rezultat se mai puteà obține căutând intersecția sinusoidei

$$v = \sin u$$

cu dreapta

$$v = 8 - u.$$

Să calculăm acum rădăcina ecuației (1) cu aproximația cerută.

Servindu-ne de tablele de logaritmi, se găsește că rădăcina este cuprinsă între arcele de $360^0 + 52^0$ și $360^0 + 53^0$, sau în radiani între

$$a = 7{,}19075 \; ; \; b = 7{,}20820,$$

căci avem

$$f(a) = 7{,}19075 - 8 + 0{,}78801 < 0,$$

$$f(b) = 7{,}20820 - 8 + 0{,}79864 > 0.$$

Restrângând intervalul și mai mult, rădăcina căutată este cuprinsă între arcele

$$360^0 + 52^0\ 40' \quad \text{și} \quad 360^0 + 53^0$$

sau în intervalul

$$c = 7{,}20238 \; ; \; b = 7{,}20820$$

căci avem

$$f(c) = 7{,}20238 - 8 + 0{,}7951 < 0.$$

Prin urmare, rădăcina ecuației (1) este cuprinsă între

$$7{,}20 \quad \text{și} \quad 7{,}21.$$

Valoarea $x_1$ care face maximum pe $y$ este cuprinsă între arcele

$$180^0 + 26^0\ 20' \; ; \; 180^0\ 26^0\ 30'$$

sau în intervalul (3,60; 3,61).

Valoarea $y_1$ maximă a lui $y$ este aproximativ 6,82.

Când $x$ crește dela $-\infty$ la $x_1$ funcția $y$ crește dela $-\infty$ la $y_1$; când $x$ crește dela $x_1$ la $+\infty$ atunci $y$ descrește dela $y_1$ la $-\infty$.

Ecuația

$$y = 0$$

are deci două rădăcini reale. Curba care reprezintă funcția $y$, are aspectul unei parabole cu concavitatea în jos.

PROBLEMA 3679. *Extremităţile* A *şi* B *ale unui segment* AB *de mărime constantă se mişcă pe curbele plane date* (A) *şi* (B). *Normalele în* A *şi* B *la curbele* (A) *şi* (B) *se taie în* I. *Să se găsească tangenta în* I *la curba* (I) *descrisă de acest punct, când segmentul* AB *variază ca poziţie.*

N. ABRAMESCU.

*Soluţie* de D-l ION C. VASILIU (Şcoala Politechnică „Regele Carol II"). Fiind date două drepte $Tx$ şi $Ty$ şi două puncte variabile A pe $Tx$ şi B pe $Ty$, astfel ca AB să fie constantă, însemnând cu I punctul de intersecţie al perpendicularelor în A pe $Tx$ şi în B pe $Ty$, locul lui I este un cerc cu centrul în T. In adevăr, fie $\theta$ unghiul ATB, $\lambda = TA$, $\mu = TB$, $AB = l = \text{const.}$ Din patrulaterul inscriptibil TAIB, notând $TI = \rho$, avem

$$\rho l = \lambda \sqrt{\rho^2 - \mu^2} + \mu \sqrt{\rho^2 - \lambda^2},$$

unde

$$\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu \cos\theta = l^2.$$

Ridicând prima relaţie la pătrat şi ţinând seamă de a doua, obţinem

$$\rho^2 l^2 = \rho^2 (\lambda^2 + \mu^2) - 2\lambda^2\mu^2 + 2\lambda\mu \sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \lambda^2},$$

$$\rho^2 l^2 = \rho^2 (l^2 + 2\lambda\mu \cos\theta) - 2\lambda^2\mu^2 + 2\lambda\mu \sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \lambda^2},$$

$$\sqrt{\rho^2 - \lambda^2}\sqrt{\rho^2 - \mu^2} = \lambda\mu - \rho^2 \cos\theta,$$

$$(\rho^2 - \lambda^2)(\rho^2 - \mu^2) = (\lambda\mu - \rho^2 \cos\theta)^2,$$

$$\rho^4 - \rho^2(\lambda^2 + \mu^2) + \lambda^2\mu^2 = \lambda^2\mu^2 - 2\rho^2\lambda\mu \cos\theta + \rho^4 \cos^2\theta,$$

$$\rho^4 \sin^2\theta - \rho^2 l^2 = 0 \quad , \quad \rho \neq 0 \quad , \quad \rho^2 = \frac{l^2}{\sin^2\theta} \quad , \quad \rho = \frac{l}{\sin\theta}$$

Deci I descrie cercul cu centrul în T şi raza $\frac{l}{\sin\theta}$.

Acestea fiind stabilite, să însemnăm cu T punctul de intersecţie al tangentelor în A şi B la curbele (A) şi (B) şi cu I punctul de intersecţie al normalelor în A şi B. Considerând că AB aparţine unei figuri de formă invariabilă (căci AB = const.), cum extremi-

tăţile segmentului AB descriu curbele (A) şi (B), I este centrul instantaneu de rotaţie [1]) al acestei figuri la momentul considerat. Presupunând că planul figurei mobile la care aparţine segmentul AB se mişcă pe planul fix al celor două curbe date, locul lui pe planul fix este *baza* (I), iar pe planul mobil acest punct I descrie *rulanta*. Aceste două curbe, baza şi rulanta, sunt tangente în centrul instantaneu I şi deci, pentru a găsi tangenta în I la baza (I), trebuie să ştim a construi tangenta în I la rulantă. Acesta este folosul Geometriei Cinematice, cu ajutorul căreia putem face aceste construcţii.

Dar rulanta este locul lui I pe planul mobil al figurei AB şi, pentru o deplasare infinitezimală, se poate presupune că A şi B se mişcă pe tangentele TA şi TB în A şi B la curbele (A) şi (B). Insă acest loc am văzut că este un cerc cu centrul în T, şi deci tangenta în I este perpendiculara în I la IT.

*Observare.*

I fiind centrul instantaneu de rotaţie al figurei mobile la care aparţine AB, punctul de contact al dreptei AB cu înfăşurătoarea sa este piciorul perpendicularei din I pe AB.

---

PROBLEMA 3758. *Să se găsească arcele* x *cuprinse între* 0 *şi* $\frac{1}{2}\pi$, *cari satisfac ecuaţiei*

$$\cos nx - \cos(n+3)x + \cos(n+6)x = 0,$$

*nedepinzând de* n.

DAVID ROTBERG.

*Soluţie* dată de Domnii: I. MURĂROIU, P. I. GHIŞOIU şi N. ZAHARIA.

Vom rezolvà problema cu ecuaţia din enunţ, pusă sub o formă mai generală şi anume:

$$\cos nx - \cos(n+a)x + \cos(n+2a)x = 0.$$

---

1) A se vedeà N. ABRAMESCU, *Lecţiuni de Geometrie pură Infinitezimală*, p. 35 şi următoarele.

Putem scrie, transformând suma termenului întâi și termenului al treilea în produs:

$$2\cos(n+a)\,x\cos ax = \cos(n+a)\,x.$$

Simplificând cu factorul $\cos(n+a)\,x$, ce depinde de $n$, rămâne numai

$$\cos ax = \frac{1}{2},$$

care ne dă

$$x = \frac{(6k+1)\,\pi}{3a}.$$

Pentru primul cadran se obține ($a$ fiind mai mare ca $\frac{2}{3}$ sau întreg și pozitiv)

$$x = \frac{\pi}{3a}$$

care pentru problema așà cum a fost propusă ($a = 3$) se obține arcul $\frac{\pi}{9}$, adică exprimat în grade egal cu $20^0$.

Domnul Murăroiu observă și ecuația pusă sub o formă mai generală

$$\cos nx - m\cos(n+a)\,z + \cos(n+2a)\,x = 0.$$

care dă ecuația

$$\cos ax = \frac{m}{2}$$

ce nu depinde de $n$.

Au rezolvat problema în condițiile enunțului Domnii: N. Aldea, I. Boian, N. Bumbulici, C. V. Costăchescu, Vl. I. Crivăț, Fl. Dinoci-Argeș, Gh. T. Gheorghiu-Gladiș, M. I. Grossu, H. P. Ionescu-Biss, Gh. Lupescu, I. V. Măties, N. N. Mihăileanu, Em. I. Mihalcea, Negrea A. Mircea-Leonte, Cr. I. Râmniceanu, Justin Vâlceanu și N. N. Velicescu.

Col. Gh. I. L.

PROBLEMA 3870. *Fie* a *şi* b *două numere complexe cu modulul supraunitar. Să se demonstreze că e imposibil să avem*

$$3(a + b) = 2 + 6ab.$$

P. SERGESCU.

*Soluţie* dată de D-l N. VELEA (Student, Cluj).

In baza teoremei lui GRÂCE şi HEYWOOD, dacă relaţia din enunţ e verificată pentru $|a| > 1$ şi $|b| > 1$, ar trebui ca cel puţin una din rădăcinile ecuaţiei

$$3(z + z) = 2 + 6zz$$

să aibă modulul supraunitar. Dar rădăcinile acestei ecuaţii de gradul al doilea sunt $\frac{3 \pm \sqrt{3}\, i}{6}$, de modul subunitar. Deci $|a|$ şi $|b|$ nu pot fi supraunitari în acelaş timp, dacă relaţia e satisfăcută. Aceasta demonstrează proprietatea din enunţ.

*Altă soluţie.* Să presupunem, că avem:

$$(1) \qquad a + b = \tfrac{2}{3}(1 + 3ab)$$

şi să considerăm ecuaţia de gradul al doilea cu rădăcinile $a$ şi $b$. In baza presupunerii, ecuaţia se scrie:

$$3x^2 - 2(1 + 3ab)\, x + 3ab = 0.$$

Această ecuaţie e derivata ecuaţiei

$$x^3 - (1 + 3ab)\, x^2 + 3abx = 0$$

care are rădăcinile 0,1 şi $3ab$. In baza unei teoreme a D-lui SERGESCU *(Sur le module des zéros du polynôme du troisième degré,* C. R. Premier Congrès des Mathématiciens Polonais. Lwow, 1927), derivata are o rădăcină de modul inferior lui $\frac{1}{\sqrt{3}}$, deci lui 1. Ca atare, relaţia (1) implică faptul că sau $|a|$ sau $|b|$ e subunitar.

c. c. t. d.

PROBLEMA 3888. *Dintr'un punct* A *situat pe pământ, o porţiune de 14 m. din înălţimea foişorului de foc se vede sub un unghiu de* $12^0 22'$. *Din acelaş punct dacă s'ar înlătură obstacolele, restul de înălţime s'ar vedeà sub un unghiu de* $25^0 5'$.

*La o distanţă de foişor cu 5290,998 m., mai mare decât distanţa lui* A *la foişor se găseşte o casă care arde.*

*Pentru a ajunge la această casă, sacalele plecate dela foişor, au făcut 24 minute, parcurgând din cauza ocolului făcut pe străzile oraşului, un drum ce este cu* $20^0/_0$ *mai mare decât distanţa dintre casă şi foişor, roţile sacalelor făcând 85 învârtituri pe minut.*

*Se cere :*

— *înălţimea foişorului*

— *raza roatelor sacalelor.*

RENÉ I. SPATHY.

*Soluţie* dată de Domnişoara SYLVIA PRUNCU şi de Domnii: AUREL EM. BĂDESCU, RUBIN F. BANDEL, I. BULANCEA, AUREL C. CONSTANTINESCU, VL. I. CRIVĂŢ, MĂRGĂRIT FAŢE, AL. H. HALPERIN, EUG. P. HARALAMB, HARALAMB P. IONESCU-BISS, T. JOVMIR, C. GH. LUPESCU, I. MURĂROIU, N. N. MIHĂILEANU, E. G. MILLEA, GH. OPRESCU, GH. M. PĂUN, I. C. SAVIN, VIRGILIU C. POPESCU.

Notăm cu B piciorul şi cu C vârful foişorului, iar cu D punctul care împarte în două porţiuni înălţimea foişorului.

Insemnăm

$$AB = a \quad , \quad BD = b \quad , \quad 12^0 22' = \alpha \quad \text{şi} \quad 25^0 5' = \beta.$$

Triunghiurile dreptunghice ABD şi ABC ne dau

$$b = a \operatorname{tg}\beta \quad \text{şi} \quad b + 14 = a \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

De unde

$$b = 14 \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\beta} = 14 \frac{\operatorname{tg}\beta \cos(\alpha+\beta)\cos\beta}{\sin\alpha} = 14 \frac{\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$$

$$a = 14 \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\beta} = 14 \frac{\cos\beta\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} .$$

*Aflarea înălţimei foişorului.*

Calculând pe $b$ avem:

$$b = 14 \frac{\sin 25^0 5' \cos 37^0 27'}{\sin 12^0 22'} .$$

Aplicând logaritmii rezultă

$$\log b = 1{,}34244$$

care dă

$$b = 22^{m},001$$

şi deci înălţimea cerută este

$$14 + 22{,}001 = 36{,}001 \text{ m},$$

adică sensibil egală cu **36 m.**

*Aflarea razei roţilor sacalelor.*

Calculând mai întâiu pe $a$, avem

$$a = 14 \frac{\cos 25^{0}5' \cos 37^{0}27'}{\sin 12^{0}22'} .$$

Aplicând logaritmii rezultă

$$\log a = 1{,}67212$$

care dă

$$a = 47{,}002 \text{ m}.$$

Raza R a roatei sacalelor este dată de egalitatea următoare, uşor de stabilit în baza enunţului:

$$85 \times 24 \times 2\pi R = \frac{6}{5} (5290{,}998 + 47{,}002)$$

$$\therefore \quad R = \frac{5338}{5 \times 85 \times 8 \times 3{,}14} = \frac{5338}{10676} = \mathbf{0{,}50 \text{ m.}},$$

adică o jumătate de metru.

*Observaţii.*

1. Soluţiunile primite dela unii din corespondenţi, ale căror nume au fost anunţate pe coperta revistei, prezintă calcule greşite asupra determinărei înălţimei foişorului şi razei roţilor sacalelor. E de citat că un corespondent găseşte înălţimea foişorului de 29,888 m., iar raza roatei de 31,612984 m. şi încheie prin cuvintele *«roata este enormă»*, în loc de a'şi verifică calculele când se obţin astfel de rezultate.

2. D-l V. C. Popescu (Toulouse) apreciază că iuţeala sacalelor de aprox. 16 km. pe oră, cât rezultă din datele problemei, e prea mică, ceeace ar face să se ajungă la locul incendiului după ce casa a fost mistuită de flăcări.

Trebuie ştiut însă, că nu se dispun de către toate posturile de pompieri de sacale automobile cu iuţeli mai mari (ca de ex. 30 — 40 km.) iar cu sacalele hipomobile iuţeala de 16 km. este un maxim, ce se obţine cu caii în galop sau marş — marş pe străzile oraşelor.

Colonel G. I. Liteanu.

*PROBLEMA 3907. *Cu inversele laturilor unui triunghiu dat se poate construi un triunghiu?*

CĂPITAN GH. NICULESCU.

*Rezolvare.* Triunghiul fiind dat, înseamnă că fiecare din cele trei laturi $a, b, c,$ îndeplinesc în mod sigur condiţiunile de construcţie cunoscute.

Pentru a putea construi triunghiul având ca laturi inversele laturilor triunghiului dat, trebuie ca fiecare din laturile acestui nou triunghiu să îndeplinească aceleaşi condiţiuni şi ne vom asigura de acest lucru numai atunci când vom impune aceste condiţiuni celui mai defavorabil caz.

In acest scop să presupunem că laturile triunghiului dat sunt în ordinea de mărime:

$$a > b > c > 0$$

şi în acest caz laturile noului triunghiu vor fi în ordinea de mărime:

$$\frac{1}{c} > \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0.$$

Condiţiunile de construcţie, aplicate cazului celui mai defavorabil, sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b} \end{cases}$$

cari conduc ambele la condiţiunea unică generală:

$$\boxed{c(a+b) > ab}, \qquad (1)$$

care, dacă este îndeplinită, atunci se poate totdeauna construi triunghiul de laturi: $1/a,\ 1/b,\ 1/c.$

Condiţiunea (1) se poate simplifica într'alta şi mai riguroasă, dar care are defectul de a elimina cazurile cuprinse în interval.

Intr'adevăr, cum am presupus $a > b$, atunci condiţiunea:

$$c(b + b) > ab$$

este evident şi mai riguroasă. Simplificând vom scrie:

$$2c > a \qquad (2)$$

şi în concluzie:

Dacă laturile unui triunghiu dat îndeplinesc condiţiunile:

$$\begin{cases} a > b > c > 0 \\ 2c > a \end{cases}$$

atunci se poate totdeauna construi triunghiul de laturi: $1/a$, $1/b$, $1/c$.

Condiţiunea (1) este cea exactă, condiţiunea (2) permite o verificare rapidă.

*Observaţiuni.*

Pentru problema de faţă am primit patru soluţiuni. Numai aceia a D-lui Sub.-Lt. I. Gh. Zamfirescu se apropie întrucât-va de cea dată mai sus, fără a fi ajuns să dea condiţiunile sub forma (1) sau (2). Ceilalţi trei rezolvitori (un student matematici, un elev de şcoală politechnică şi un licean) au demonstrat că se poate totdeauna construi triunghiul de laturi $1/a$, $1/b$, $1/c$, şi au ajuns la acest rezultat aranjând inegalităţile ce conveneau cu un deosebit talent! Pentru a convinge de contrariul pe aceşti rezolvitori, mă văd silit să dau exemplele numerice următoare:

1°. Cu:

$a = 100^m$; $b = 96^m$; $c = 5m$. se poate construi un triunghiu, pe când cu $1/a = 0{,}01m.$; $1/b = 0{,}0104m.$; $1/c = 0{,}2m.$, nu se poate construi un triunghiu, căci:

$$0{,}2 > 0{,}01 + 0{,}0104.$$

2°. Cu:

$a = 7m.$; $b = 5m.$; $c = 2{,}5m.$ se poate construi un triunghiu, dar cu: $1 : a = 0{,}142m.$; $1 : b = 0{,}2m.$; $1 : c = 0{,}4m.$ nu se poate, căci:

$$0{,}4 > 0{,}142 + 0{,}2.$$

Pentru a putea construi triunghiul, condiţia (1) ne dă:

$$a = 7m.\ ;\ b = 5\ ;\ c > 2{,}91m.$$

iar condiţia (2) cere:

$$c > \frac{a}{2} > \frac{7}{2} > 3{,}5m.$$

şi de aci reiese clar diferenţa între aceste două condiţiuni.

Cpt. Gh. N.

PROBLEMA 3910. *Se consideră seria convergentă cu termenii pozitivi*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

*Să se arate că dacă raportul*

$$\frac{u_{n-1}}{u_n}$$

*tinde către o limită determinată pentru* n *infinit, raportul*

$$\frac{pu_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots}{qu_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots},$$

*unde* p *şi* q *sunt două numere oarecare, tinde şi el către o limită determinată. Când această limită este independentă de* p *şi* q ?

MIRON NICOLESCU.

I. *Soluţie* dată de D-nul PETRE I. GHIŞOIU (Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti).

In «G. M.» Anul XXXIV, pp. 411 — 417, D-l MIRON NICOLESCU stabileşte următoarele:

*Fiind dată seria pozitivă convergentă*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

*dacă se pune*

$$R_n = u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

*atunci raportul*

$$\frac{R_n}{u_n}$$

*are o limită* $\lambda'$ *dacă şi raportul* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *are o limită* $\lambda$, *şi între cele două limite avem relaţia*

$$\lambda' = \frac{1}{1 - \lambda}$$ (pag. 416).

Dacă însemnăm cu R raportul din enunţ, putem scrie

$$R = \frac{(p-1)u_n + u_n + u_{n+1} + \dots}{(q-1)u_n + u_n + u_{n+1} + \dots}$$

sau

$$R = \frac{p - 1 + \frac{R_n}{u_n}}{q - 1 + \frac{R_n}{u_n}}.$$

Făcând pe $n$ să tindă către infinit, obţinem

$$\lim_{n \to \infty} R = \frac{p - 1 + \lambda'}{q - 1 + \lambda'} = \frac{p - 1 + \frac{1}{1-\lambda}}{q - 1 + \frac{1}{1-\lambda}} = \frac{p - \lambda(p-1)}{q - \lambda(q-1)}.$$

Această limită este independentă de $p$ şi de $q$ dacă $\lambda = 1$. In acest caz avem

$$\lim_{n \to \infty} R = 1.$$

2. O soluţie foarte apropiată de precedenta a dat D-l Adrian C. Gheorghiu.

Au mai dat bune soluţii D-nii: Corneliu Popescu (Giurgiu) şi Iulian Alexiu (Student, Bucureşti).

3. Celelalte «soluţii» se bazează pe afirmaţiuni de felul următor:

«Limita unei sume de termeni *în număr infinit,* este egală cu suma limitelor termenilor» (Aurel Em. Bădescu şi Haralambie P. Ionescu-Biss), sau

«Seria fiind convergentă, dacă raportul

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

are ca limită pe $\lambda$, *atunci trebuie să avem* $\lambda < 1$» (Haralambie P. Ionescu-Biss). Autorii «ajung» totuş la un rezultat exact!

M. N.

PROBLEMA 3938. *La ce ore acele orarului şi minutarului fac între ele unghiul $\pi/n$? Cazurile particulare când acele coincid, sunt în prelungire sau dreptunghiulare.*

V. C. POPESCU.

1. *Soluţie* dată de Domnul NICOLAE N. MIHĂILEANU, Liceul din Constanţa.

Să considerăm problema mai generală şi anume să găsim timpul după care acele unui ceasornic vor face între ele un unghiu $\alpha$ oarecare. Avem de examinat trei cazuri:

— Să presupunem că, în momentul iniţial, acele coincid la $O^h$. După un timp $t$, orarul va ajunge într'un punct A iar minutarul, având iuţeala de 12 ori mai mare, parcurge în acelaş timp un drum de 12 ori mai mare. Unghiul dintre cele două ace va fi atunci

$$\alpha = 11s$$

în care $s$ este drumul parcurs de orar şi este egal cu $\frac{2\pi}{12} t$

$$\therefore \quad t = \frac{6\alpha}{11\pi} . \tag{1}$$

— Să presupunem acum că în momentul iniţial acele erau decalate între ele cu un unghiu $\varphi$. Fie A punctul iniţial al minutarului şi B punctul iniţial al orarului. După timpul $t$, minutarul ajunge în C şi orarul în D, aşà că

$$AC = 12BD.$$

Unghiul dintre ace va fi

$$\alpha = 11s - \varphi$$

$$\therefore \quad t = \frac{6(\varphi + \alpha)}{11\pi} . \tag{2}$$

— In cazul când unghiul $\varphi$ este astfel că după timpul $t$, când acele au parcurs drumurile AC (minutarul) şi BD (orarul), avem

$$AB > AC$$

atunci unghiul format de ace va fi

$$\alpha = \sphericalangle COD = \sphericalangle COB + \sphericalangle BOD = \sphericalangle AOB - \sphericalangle AOC$$
$$+ \sphericalangle BOD = \sphericalangle AOB - 11 . \sphericalangle BOD = \varphi - 11s$$

căci

$$\sphericalangle AOC = 12 \cdot \sphericalangle BOD$$

$$\therefore \quad t = \frac{6(\varphi - \alpha)}{11\pi} . \qquad (3)$$

Putem scrie deci formula generală căutată

$$t = \frac{6(\varphi \pm \alpha)}{11\pi} \qquad (4)$$

care le cuprinde pe toate, cum uşor se poate vedeà.

Pentru ca formula să fie completă, trebuie să mai adăogăm în membrul al doilea termenul $k$, reprezentând ora de când se încep a se considerà timpurile. Formula devine:

$$t = \frac{6(\varphi \pm \alpha)}{11\pi} + k. \qquad (5)$$

In cazul particular al problemei 3938, facem în formula (5)

$$\alpha = \frac{\pi}{n} \quad \varphi = k\frac{\pi}{6}$$

obţinem:

$$t = \frac{k \pm \frac{6}{n}}{11} + k \qquad (6)$$

care este relaţia cerută în problemă.

Cazuri particulare:

$\frac{\pi}{n} = 180^0 \quad \therefore \quad t = \frac{k \pm 6}{11} + k$ acele sunt în prelungire

$\frac{\pi}{n} = 0^0 \quad \therefore \quad t = \frac{k}{11} + k$ acele coincid

$\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad t = \frac{k+3}{11} + k$

$\frac{\pi}{n} = 3\frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad t = \frac{k+9}{11} + k$ acele sunt perpendiculare.

Semnele trebuiesc luate astfel încât să avem întotdeauna $t \geqslant 0$.

In aceste formule, dând lui $k$ toate valorile între 0 şi 12, obţinem orele pentru care cele 2 ace ale unui ceasornic satisfac cerinţelor problemei.

2. Alte soluţiuni au fost date de Domnii: R. N. Dumitrescu şi C. Gh. Lupescu (Lic. Roman), Gh. Şt. Roşca, V. I. C. Vissarion (Şc. Mil. Aeronautice).

I. S. A.

---

PROBLEMA 3971. a, b, c, *fiind 3 cifre diferite una de alta, cel mai mare număr de forma* abca *în care* b + c = 12 a *sau* b — c = 6 a, *caşi cel mai mare număr impar* abcd *în care* b + c = 6 (a + d), *este:*

*primul: cel mai mare dintre cele mai mici numere în cari* b = *mult.* c, *sau* bc = *mult. 31 şi cel mai mic dintre acelea în cari* bca = *mult. 7 şi 19;*

*celalt: cel mai mare dintre cele mai mici numere în care* bcd = *mult. de 7 şi 19, sau* b — c = 3 (a + d).

*Dacă nu se pune condiţia de imparitate,* abcd *este cel mai mic număr (prim) în care* bcd = *mult. 7 şi 19, iar* cd *un număr prim.*

Lt.-Colonel Gh. Potopeanu.

A.

Din relaţia $b + c = 12\ a$ se deduce $a = (b + c)/12$ şi, cum $b + c \leqslant 17$, rezultă $a = 1$ şi $b + c = 12$. Fiind vorba de cel mai mare număr care îndeplineşte această din urmă condiţiune, avem $b = 9$, $c = 3$ şi deci N = *1931.*

Din relaţia $b - c = 6\ a$ se deduce $a = (b - c)/6$ şi, cum $b - c \leqslant 9$, rezultă $a = 1$ şi $b - c = 6$. Fiind iarăşi vorba de cel mai mare dintre numerile cari răspund acestei ultime relaţiuni, ajungem tot la rezultatul de mai sus: $b = 9$, $c = 3$ şi N = *1931.*

B.

Din relaţia $b + c = 6\ (a + d)$ se deduce $a + d = 1$ sau 2 şi, cum $d$ este impar, rămâne ca singură soluţie $a = d = 1$.

Numărul căutat este de forma *1bc1*, în care $b + c = 12$, iar $b$ cât mai mare. El este deci *1931*.

A'.

*a)* Cel mai mic număr de forma *abca* este *1bc1* şi, cum $b$ trebuie să fie cel mai mare multiplu de $c$ de o singură cifră, rezultă că $b = 9$, iar $c = 3$. Numărul căutat este N = *1931*.

*b)* Cel mai mare multiplu de 2 cifre al lui 31 fiind 93, iar numărul căutat fiind *1bc1*, el este *1931*.

*c)* Numărul are forma *1bc1*, în care *bc1* = multiplu $7 \times 19$. Or, singurul multiplu de 3 cifre al lui $7 \times 19 = 133$ care se termină cu 1, este $133 \times 7 = 931$. Deci N = *1931*.

B'.

*a)* N are forma *1bcd*, în care *bcd* trebuie să fie cel mai mare multiplu de 3 cifre al lui $7 + 19 = 133$. Cum acest multiplu este $133 \times 7 = 931$, obţinem numărul *1931*, care satisface şi condiţiunile din enunţ:

— de a fi impar;

— de a aveà primele trei cifre diferite una de alta.

*b)* Din relaţia $b - c = 3(a + d)$, în care $a = 1$, $b$ cât mai mare iar $d$ impar, se deduce imediat N = *1931*.

C.

Singurul multiplu de 3 cifre al lui $7 \times 19 = 133$ în care ultimele 2 cifre formează un număr prim, este 931. Numărul (prim) căutat este, deci, *1931* (*anul* la începutul căruia s'a propus problema 3971).

*Notă.* Această problemă — *foarte elementară* — a fost atacată de 7 inşi, dintre care singur D-l Sub.-Lt. I. Gh. Zamfirescu (din R. 6 A. Piteşti), a rezolvat-o complet.

Doi corespondenţi apreciază enunţul „supraabundent şi confuz", resp. plin de „amănunte confuze fără vre-un rost"; totuş nu au găsit soluţia decât pe una din cele nouă căi de mai sus.

Insfârşit, într'una din soluţiile primite se ajunge la relaţia $9a + 3a = 12a$, din care se deduce că «*a* trebuie să aibă valoarea *unu*» !.

Lt.-Col. G. P.

PROBLEMA 4026. *Să se determine polinomul complet de gradul al 3-lea* $P(x)$, *știind că*.

$$P(1) = 1 \quad ; \quad P(2) = 2 \quad \text{și} \quad P(3) = 3.$$

CĂPITAN I. LINTEȘ.

I. *Soluție* dată de D-nii: PETRE M. VARLAM (Cl. VI Lic. M. Eminescu, București), GEORGE ȘT. ROȘCA și S.-LOCOT. CONST. D. IONESCU-ȚIU.

Fie polinomul complet:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

După condițiunile enunțului avem:

$$a + b + c + d = 1$$

$$8a + 4b + 2c + d = 2$$

$$27a + 9b + 3c + d = 3.$$

Rezolvând pe $b$, $c$, $d$ în funcție de $a$, găsim:

$$b = -6.a \quad , \quad c = 11.a + 1 \quad \text{și} \quad d = -6.a.$$

Deci polinomul căutat va fi:

$$P(x) = a.x^3 - 6a.x^2 + (11.a + 1).x - 6a.$$

II. *Soluție* dată de D-nii: N. N. MIHĂILEANU (Constanța) AVRAM N. CONSTANTIN (Șc. Militară Geniu), MIRCEA LEONTE A. NEGREA (Student București), EMILIAN MEREUȚĂ (Student București) și N. N. ALDEA (Student București).

Punând polinomul sub forma:

$$P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$$

se găsește ca la prima soluție unde $a = 1$, $p = b$; $q = c$ și $r = d$, polinomul:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6.$$

III. *Soluţie şi generalizare* dată de D-nii: S.-Locot. I. Gh. Zamfirescu (Reg. 6 Art. Piteşti) şi Haralamb P. Ionescu-Biss (Student Matematici, Oltenița).

Punând în general polinomul sub forma:

$$P(x) \equiv x^m + A_1 . x^{m-1} + A_2 . x^{m-2} + \ldots + A_m.$$

Şi punând condiţiunile:

$$P(a_i) = b_i \quad \text{unde} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots m).$$

Atunci vom obţine sistemul:

$$a_1^{m-1} . A_1 + a_1^{m-1} . A_2 + \ldots + A_m = b_1 - a_1^m$$

$$a_2^{m-1} . A_1 + a_2^{m-1} . A_2 + \ldots + A_m = b_2 - a_1^m$$

. . . . . .

. . . . . .

$$a_m^{m-1} . A_1 + a_m^{m-1} . A_2 + \ldots + A_m = b_m - a_m^m.$$

Care rezolvat după metoda lui Cramer, conduce la soluţia generală:

$$A_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

unde $\Delta$ este determinantul lui Vandermonde, iar $\Delta_i$ determinantul ce se obţine când coloana de rangul $i$ a lui $\Delta$ o înlocuim cu coloana valorilor din membrul al doilea.

In cazul problemei *4026* se găseşte că:

$$A_1 = 6 \quad , \quad A_2 = 12 \quad , \quad A_3 = -6.$$

*Observaţiuni.*

1. D-l S.-Locot. I. Gh. Zamfirescu a arătat că problema se poate generaliză direct scriind că dacă:

$$P(a_i) = b_i$$

şi dacă:

$$\Pi(x) = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3) \ldots (x - b_m)$$

atunci polinomul poate luà forma:

$$P(x) \equiv \lambda . \Pi(x) + x.$$

2. D-l N. N. ALDEA a indicat numai că problema se poate generalizà servindu-ne de metoda lui CRAMER şi determinantul lui VANDERMONDE.

3. D-l I. PARAPEANU a scris polinomul sub forma:

$$P(x) \equiv a . x^{3n} + bx^{2n} + cx^n + d$$

punând condiţia ca:

$$P(a_1) = a_1 \quad ; \quad P(a_2) = a_2 \quad \text{şi} \quad P(a_3) = a_3.$$

4. D-l N. N. MIHĂILEANU a rezolvat polinomul de gradul al 3-lea când

$$P(a_1) = b_1 \quad ; \quad P(a_2) = b_2 \quad ; \quad P(a_3) = b_3.$$

5. D-l PETRE M. VARLAM a arătat că polinomul poate fi pus sub forma

$$P(x) \equiv \lambda (x - 1) (x - 2) (x - 3) + x.$$

6. Mulţi dintre corespondenţi şi chiar dintre rezolvatori au început astfel:

„Polinomul de gradul al 3-lea complet are următoarea formă:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ "}.$$

Dar dece o asemenea scăpare din vedere? Nu se ştie că din moment ce un polinom este egalat cu *zero* devine ecuaţiune?

7. Au mai rezolvat problema, D-nii: MIHAIL POPESCU-STĂNEŞTI, V. VISSARION şi NICULAE ZANE.

CPT. I. L.

---

## *EXERCIŢII

5. Se dă un triunghiu dreptunghic isoscel $AA_0A_n$ ($AA_0 = A\,A_n = a$) şi se împarte cateta $A_0A_n$ în $n$ părţi egale prin puncte $A_i$ ($i = 1, 2 \ldots n$). Paralela dusă prin $A_{p-1}$ la $AA_0$, formează cu $AA_p$ şi $A_0A_n$ triunghiul $S_p$. Să se demonstreze că:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{p=1}^{n} p\, S_p}{n} = \frac{a^2\pi^2}{6}.$$

ION C. VASILIU.

R. Se calculează cu uşurinţă: $S_p = \frac{a^2}{np}$

$$\therefore \quad \frac{A_p S_p}{n} = \frac{a^2}{n^3} \cdot \text{Ori } \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \cdot$$

6. Să se caute maximul şi minimul funcţiei:

$$z = x^3 + y^3 - 3axy + b^3.$$

Ion C. Vasiliu.

R. Când: $a > 0$, $z$ min. $= b^3 - a^3$; Când: $a < 0$, $z$ max. $b^3 - a^3$ } pentru $x = y = a$.

7. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x^p = y^q \\ p^x = q^y \end{cases}$$

N. N. Mihăileanu.

R. Se aplică logaritmii în ambii membri, şi se substituie valoarea lui $y$, dintr'adoua, în prima ecuaţie. Se obţine:

$$\frac{p-q}{q} \log x = \log \frac{\log p}{\log q}$$

$$\therefore \quad x^{\frac{p-q}{q}} = \frac{\log p}{\log q}$$

de unde

$$x = \left(\frac{\log p}{\log q}\right)^{\frac{q}{p-q}}$$

şi

$$y = \left(\frac{\log p}{\log q}\right)^{\frac{p}{p-q}} = \left(\frac{\log q}{\log p}\right)^{\frac{p}{q-p}}.$$

8. Să se găsească maximul funcţiei

$$y = x^2 + 2 \operatorname{L} \cos x.$$

Ion C. Vasiliu.

R. $y' = 2\,(x - \operatorname{tg} x)$

$$y'' = 2\left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) = -2\operatorname{tg}^2 < 0.$$

O infinitate de maximuri date de ecuaţia lui EULER $x = \operatorname{tg} x$.

9. Se împarte un cerc de rază R, în $n$ părţi egale şi se consideră razele $r_i$ ale cercurilor înscrise în sectoarele formate. Să se arate că

$$\lim_{n=\infty}\left(\sum_{1}^{n} r_i\right) = \mathrm{R}.$$

ION C. VASILIU.

R. $$r_i = \frac{\mathrm{R}\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}} \quad \therefore \quad \Sigma\, r_i = \mathrm{R}\cdot\frac{n\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}} \ldots \text{ etc.}$$

10. Dacă $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, să se calculeze $\lim_{x=0}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$.

ION C. VASILIU.

R. In primul rând $\frac{\partial y}{\partial x}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left|\frac{x-(1+x)<(1+x)}{x^2(1+x)}\right|$.

Pentru $x = 0$ primul factor ne dă $e$, iar cel de-al doilea după aplicarea regulei lui HÔPITAL — $\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad \lim_{x=0}\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{e}{2}.$$

11. Dacă $v_a$ e volumul obţinut de triunghiul ABC învârtindu-se în jurul lui BC, şi dacă între laturi există relaţia omogenă $f(a, b, c) = 0$, să se arate că şi $f\left(\frac{1}{v_a}, \frac{1}{v_b}, \frac{1}{v_c}\right) = 0$.

ION C. VASILIU.

R. $$v_a = \frac{2\pi S^2}{3a} \quad \therefore \quad a = \frac{2\pi S^2}{3v_a} \ldots \text{ etc.}$$

# PROBLEME PROPUSE

*4081. Să se găsească două fracţii mai mici ca 1, dintre care una să se transforme în fracţie zecimală periodică simplă, alta în fracţie zecimală periodică mixtă, aşà ca produsul lor să se transforme în fracţie zecimală exactă cu o singură cifră semnificativă după virgulă. Să se deà exemple cât mai simple pentru fiecare produs posibil.

I. Ionescu.

*4082. Trouver un carré de quatre chiffres tel que le nombre obtenu en le diminuant d'une unité égale le produit de sept nombres entiers consécutifs.

V. Thébault.

*4083. Să se rezolve un triunghiu cunoscând bisectoarea $\beta_1$ a unui unghiu şi segmentele $m$ şi $n$ interceptate de bisectoare pe latura opusă unghiului.

Iuliu Deac.

4084. O dreaptă variabilă $\Delta$ trece prin punctul fix P şi determină punctele de intersecţie M şi N cu două drepte fixe date, concurente în O. Să se demonstreze că avem:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{MN}} \cdot \overline{NO} = \text{Konst.}$$

Gh. Zapan.

4085. Intre două localităţi A şi B, situate în teren plan, se fac concursuri de alergări, cu obligaţia pentru participanţi de a parcurge în înot într'un bazin circular de rază R, o anumită distanţă dată $2l$ ($l \leqslant R$).

Se cere, să se determine în aceste condiţii, drumul cel mai scurt dela A la B.

Situaţia bazinului faţă de A, B se va presupune oarecare.

N. Ciorănescu.

4086. Să se determine $a$, $b$, $c$ astfel ca polinomul

$$(m-2)\,x^m + ax^{m-2} + bx + c$$

să fie divizibil cu $(x-1)^3$. Fie $P(x)$ polinomul găsit.

Se cere câtul lui $P(x)$ prin $(x-1)^3$.

Să se găsească numărul rădăcinilor reale ale acestui cât.

TH. ANGHELUȚĂ.

*4087. Fie triunghiul ABC, cercul său circumscris de rază R. Se duc tangentele la cerc în punctele A, B și C; fie A'B'C' triunghiul format de tangente. Insemnând cu S' suprafața triunghiului A'B'C' să se demonstreze relația

$$S' = R^2\ \mathrm{tgA}\,.\,\mathrm{tgB}\,.\,\mathrm{tgC}.$$

N. DONCIU.

4088. Notând cu $\omega$ centrul cercului lui EULER al triunghiului ABC, și cu $\rho$ puterea centrului de greutate al triunghiului în raport cu acest cerc; să se demonstreze egalitățile

$$\overline{A\omega}^2 + \overline{B\omega}^2 + \overline{C\omega}^2 = \frac{1}{4}R^2\,(11 + 8\ \mathrm{cosA}\ \mathrm{cosB}\ \mathrm{cosC})$$

$$\rho = \frac{1}{36}(a^2 + b^2 + c^2).$$

CEZAR COȘNIȚĂ.

*4089. Fie ABCD un patrulater inscriptibil; prelungind laturile opuse AB, DC și CB, DA se obțin la intersecțiile lor respectiv punctele E și F.

Să se demonstreze egalitățile:

$$(1)\qquad \frac{\sin A + \sin B + \sin C + \sin D}{\cos A + \cos B - \cos C - \cos D} = -\operatorname{cotg}\frac{F}{2}$$

$$(2)\qquad \frac{\mathrm{tgA} + \mathrm{tgB} - \mathrm{tgC} - \mathrm{tgD}}{\mathrm{cotgA} + \mathrm{cotgB} - \mathrm{cotgC} - \mathrm{cotgD}} = \operatorname{cotg}\frac{F+E}{2}\operatorname{cotg}\frac{F-E}{2}.$$

CORNELIU GEORGESCU.

4090. Tangenta într'un punct M al unei curbe (C) și perpendiculara în M pe OM tae axele de coordonate în patru puncte conciclice. Se cere să se găsească curba (C).

I. V. MĂTIEȘ.

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

---

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Abramescu Mariana* (4060); *Aldea N. N.* (2972, 3798, 4043, 75); *Arşavschi A.* (3969, 4000); *Burlacu E.* (3790, 810); *Coşniţă C.* (3019, 85, 90, 664, 975); *Crivăţ V.* (4026); *Gheorghiu C. A.* (2456, 3650, 764, 810, 4060); *Ionescu I. V.* (4026); *Ionescu P. H.* (3979, C, N); *Léber Margareta* (4064, 65); *Mereuţă E.* (4060); *Mihăileanu N. N.* (4029, 47, R); *Olteanu Şt.* (3969, 4075, P); *Parepeanu C. I.* (4075); *Patraulea N.* (3977); *Petrescu I. I.* (4065, 67); *Popescu P.* (4060); *Popescu M. Stăneşti* (4043, 65, 67); *Savin C. I.* (4047, 51); *Thèbault V.* (P); *Vasu V.* (4060); *Velicescu N.* (4026); *Vissarion C. I. V.* (4069).

---

*Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

---

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor aveà format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

---

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

# Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

**La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.**

M2528

Biblioteca ASTRA

# GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

0 - MAR 2014

ANUL XXXVII.

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1932.

## SUMARUL

1. Sur une analogie entre le parallélogramme et le parallélipipède . . . *V. Thébault.*
2. Asupra unor serii cu termeni complecşi *George Călugăreanu.*
3. Articol de geometrie (urmare şi sfârşit) *D. Barbilian*
4. Note matematice: 16 — 19.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 213.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 1973, 3335, 3730, 3774, 3798, 3818, 3905, 3952, 4015, 4051.
9. Exerciţii: 12 — 20.
10. Probleme propuse: 4091 — 4100.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1932

74306

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVII se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orăşanu,** Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 405, 22, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 80, 84, 93, 99, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 80, 96, 98, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 72, 76, 83, 87, 4010, 13, 24, 30, 31, 34, 35, 40, 44, 45, 48, 53, 56, 57, 59, 62, 63, 66, 68, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 79, 80, 81, 84, 85, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

# SUR UNE ANALOGIE ENTRE LE PARALLÉLOGRAMME ET LE PARALLÉLIPIPÈDE

1. Soient un losange ABCD circonscrit à un cercle (O), de rayon (R) ; une tangente variable à ce cercle qui rencontre BC en M, entre B et C, CD en N, entre C et D ; I le contact de BC avec (O).

Lorsque MN se déplace, le périmètre du triangle MCN reste constant et égal à 2 CI. Or,

$$\text{aire AMN} = \text{aire AMCN} - \text{aire MCN}.$$

L'aire AMCN est la somme de celles des triangles ACM et ACN dont la hauteur est 2R. L'aire MCN est égale à

$$\text{aire OCM} + \text{aire OCN} - \text{aire OMN} = \tfrac{1}{2}R\,(CM + CN - MN).$$

Ainsi

$$\text{aire AMN} = R\,(CM + CN) - \tfrac{1}{2}R\,(CM + CN - MN)$$

$$= \tfrac{1}{2}R\,(CM + CN - MN) = R \times CI = \text{const.}^{1}).$$

2. Si l'on projette la figure sur un plan (P), non parallèle, (O) se projette suivant une ellipse ($\Sigma$), dont le centre est le milieu du segment déterminé par les projections *a, c* de A, C. L'ellipse ($\Sigma$) est inscrite dans le parallélogramme *abcd,* projection de ABCD sur (P). Lorsque la tangente MN varie, le rapport des aires des triangles AMN et *amn* reste constant.

Inversement, on peut projeter une figure *abcd* de manière que la projection ABCD soit un losange et l'ellipse ($\Sigma$) un cercle de centre O[2]).

Ainsi se trouve établi, par la géométrie, ce théorème relatif à l'elipse :

*Si l'on considère un parallélogramme* ABCD *circonscrit à une ellipse* (E) *et une tangente variable à la conique qui rencontre* BC *en* M, *entre* B *et* C, CD *en* N, *entre* C *et* D, *l'aire du triangle* AMN *reste constante*[3]).

1) V. THÉBAULT, *Education mathématique* 1912, p. 144 et *Nouvelles Annales de Mathématiques,*, 1915, p. 477.

2) V. THÉBAULT, *Mathesis,* 1927 p. 67.

3) Ce théorème est contenu dans un plus général de M. AD. MINEUR, (*Mathesis*, 1926. p. 465), qui s'énonce ainsi :

*Soit une conique de centre* C *et deux tangentes fixes* $O_x$ , $O_y$ *à cette courbe. Une tangente variable rencontre* $O_x$ , $O_y$ , *en* M, N. *Si* P *est le symétrique de* O, *par rapport à* C, *l'aire du triangle* PMN *reste constante.*

L'auteur avait demandé une solution synthétique que nous avons fournie lorsque la conique est une ellipse. Il reste à considérer le cas ou la conique est une hyperbole. Nous *y* convions le lecteur.

(V. T.)

3. Considérons un parallélipipède ABCDEFGH circonscrit à un ellipsoïde ($\Sigma$), puis un plan variable (P), tangent à ($\Sigma$), et *parallèle à l'arête* GH, par exemple.

Ce plan coupe les arêtes DH, HE, en M, N, entre D et H, H et E, puis les arêtes FG, GC, en Q, P, entre F et G, G et C, déterminant ainsi un parallélogramme.

Si l'on projette l'ellipsoïde ($\Sigma$) sur le plan de la face ADHE, *parallèlement à l'arête* GH, on obtient une ellipse ($\gamma$), dont le centre est celui du parallélogramme ADHE, *qui est tangente à la droite* MN.

La droite QT touche de même une ellipse égale ($\gamma'$), inscrite et concentrique au parallélogramme BFGH.

Lorsque le plan (P) varie, l'aire commune des triangles AMN et BQT conserve une valeur constante, et, par conséquence, le volume du prisme ABMNQT est aussi constant. L'arête AB est d'ailleurs symétrique de l'arête GH par rapport au centre de ($\Sigma$).

Le théorème suivant constitue donc une extension à l'ellipsoïde de celui de M. Mineur pour l'ellipse :

*Si l'on considère un parallélipipède* ABCDEFGH *circonscrit à un ellipsoïde* ($\Sigma$) *et un plan tangent variable parallèle à l'arête* GH, *qui coupe les arêtes* DH, HE, FG, GH, *entre leurs extrémités, en* M, N, Q, P, *le volume du prisme* ABMNQT *reste constant.*

Si l'on remplace le prisme ABMNQT par des pyramides ayant un sommet sur la direction AB et pour bases MNQT, ou les triangles formés par trois des sommets de ce parallélogramme, les volumes de ces pyramides conservent aussi des valeurs constantes lorsque le plan (P) varie.

Ainsi la pyramide de base MNQT et de sommet B, symétrique de H par rapport au centre de ($\Sigma$), a pour expression

$$\text{vol. ABMNQT} - \text{vol. ABMN} = \tfrac{2}{3}\ \text{vol. ABMNQT} = \text{const.}$$

V. Thébault
Le Mans — France.

# ASUPRA UNOR SERII CU TERMENI COMPLECȘI

Să considerăm seria cu termeni complecși

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

pe care să o presupunem absolut convergentă, suma ei fiind egală cu zero. Se vede ușor că numerele $a_n$ se pot alege într'o infinitate de feluri așà încât seria să conveargă absolut și suma ei să fie zero. Să considerăm și seriile formate cu pătratele numerelor $a_n$, cuburile lor, etc.:

$$\begin{aligned}
&a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots \\
&a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 + \ldots \\
&\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\
&a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m + \ldots \\
&\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Aceste serii converg toate absolut, deoarece (1) converge absolut.

Se pot alege numerele $a_n$ în așà fel ca fiecare din aceste serii să aibă o sumă egală cu zero? Cu alte cuvinte, sistemul de o infinitate de ecuații cu o infinitate de necunoscute

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = 0 \\
&a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots = 0 \\
&\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\
&a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m + \ldots = 0 \\
&\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots
\end{aligned} \qquad (2)$$

poate fi satisfăcut?

Vom arătà aci, printr'o metodă algebrică elementară, pe care o credem instructivă, că sistemul (2) nu poate fi satisfăcut decât dacă toate numerele $a_n$ sunt egale cu zero.

Să ne limităm la primele $m$ ecuații ale sistemului (2), pe care să le scriem

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + \ldots + a_m = -r_1^{(m)} \\
&a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2 = -r_2^{(m)} \\
&\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\
&a_1^m + a_2^m + \ldots + a_m^m = -r_m^{(m)}.
\end{aligned} \qquad (2')$$

Avem, punând $|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots = R_m$,

$$\begin{aligned} |r_1^{(m)}| &\leqslant |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots = R_m \\ |r_2^{(m)}| &\leqslant |a_{m+1}|^2 + |a_{m+2}|^2 + \ldots < R_m^2 \\ &\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ |r_p^{(m)}| &\leqslant |a_{m+1}|^p + |a_{m+2}|^p + \ldots < R_m^p. \end{aligned} \tag{3}$$

Cu cantitățile $a_1, a_2 \ldots, a_m$ ca rădăcini să formăm ecuația algebrică:

$$P_m(x) \equiv (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m) \equiv x^m + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_m = 0. \tag{4}$$

Intre coeficienții $c_i$ și funcțiunile simetrice care formează primii membri din (2') putem scrie relațiile [1])

$$\begin{aligned} &-r_1^{(m)} + c_1 = 0 \\ &-r_2^{(m)} - c_1 r_1^{(m)} + 2c_2 = 0 \\ &\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ &-r_m^{(m)} - c_1 r_{m-1}^{(m)} - \ldots - c_{m-1} r_1^{(m)} + mc_m = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Din ele scoatem, cu ajutorul inegalităților (3)

$$|c_1| = |r_1^{(m)}| \leqslant R_m,$$

$$2|c_2| = |r_2^{(m)} + c_1 r_1^{(m)}| \leqslant |r_2^{(m)}| + |c_1 r_1^{(m)}| < 2R_m^2,$$

de unde

$$|c_2| < R_m^2;$$

$$3|c_3| \leqslant |r_3^{(m)}| + |c_1 r_2^{(m)}| + |c_2 r_1^{(m)}| < 3R_m^3,$$

de unde

$$|c_3| < R_m^3.$$

Pentru a demonstră că relația e generală, să o presupunem adevărată *pentru toate valorile întregi până la* q *inclusiv*; avem atunci

$$|c_p| < R_m^p \quad , \quad p = 1, 2, \ldots, q. \tag{6}$$

Dar (5) ne dă

$$(q+1)|c_{q+1}| \leqslant |r_{q+1}^{(m)}| + |c_1 r_q^{(m)}| + |c_2 r_{q-1}^{(m)}| + \ldots + |c_q r_1^{(m)}| <$$

$$< (q+1) R_m^{q+1} \quad ; \quad \text{sau} \quad |c_{q+1}| < R_m^{q+1}.$$

1) Vezi: SERRET, Traité d'Algèbre, I, p. 378.

Relația (6) e deci adevărată pentru $p = 1, 2, \ldots, m$.

E interesant de constatat în acest raționament recurent că pentru a deduce validitatea relației (6) pentru $p = q + 1$, nu e deajuns să o presupunem adevărată pentru $p = q$ și $p = 1$, ci avem nevoie să o presupunem adevărată *pentru toate valorile întregi până la* q *inclusiv.*

Revenind la demonstrație, să ne amintim că toate rădăcinile $a_j$ ale unei ecuații ca (4) sunt inferioare în modul unei anumite limite, care depinde de coeficienții $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Punând $|x| = r$ avem, pentru $r > 2R_m$

$$|P_m(x)| = r^m \left|1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots + \frac{c_m}{x^m}\right| \geqslant r_m \left|1 - \frac{|c_1|}{r} - \frac{|c_2|}{r^2} - \ldots - \frac{|c_m|}{r^m}\right| >$$

$$> r^m \left|1 - \frac{R_m}{r} - \frac{R_m^2}{r^2} - \ldots - \frac{R_m^m}{r^m}\right| = r^m \left|1 - \frac{R_m}{r - R_m}\left[1 - \left(\frac{R_m}{r}\right)^m\right]\right|,$$

deoarece pentru $r > 2R_m$ avem

$$\frac{R_m}{r} + \frac{R_m^2}{r^2} + \ldots + \frac{R_m^m}{r^m} = \frac{R_m}{r - R_m}\left[1 - \left(\frac{R_m}{r}\right)^m\right] < 1;$$

deci
$$|P_m(x)| > \tfrac{1}{2} r^m \qquad (7)$$

dacă

$$r > 2R_m, \text{ și } \frac{R_m}{r - R_m}\left[1 - \left(\frac{R_m}{r}\right)^m\right] < \tfrac{1}{2}. \qquad (7')$$

Să alegem pe $r$ așă încât să avem

$$\frac{R_m}{r - R_m} < \tfrac{1}{2}, \text{ adică } r > 3R_m. \qquad (8)$$

Avem atunci

$$\frac{R_m}{r} < \tfrac{1}{3}, \text{ deci } 0 < 1 - \left(\frac{R_m}{r}\right)^m < 1.$$

Deci dacă inegalitatea (8) e satisfăcută, (7') e satisfăcută cu atât mai mult și urmează să avem și inegalitatea (7), care ne spune că $P_m(x)$ nu se mai poate anulă în afara cercului de rază $3R_m$ și nici pe acest cerc.

Urmează că toate rădăcinile ecuației $P_m(x) = 0$, adică toate numerele $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt inferioare în modul lui $3R_m$.

Aceasta ne permite să concludem că toate numerele $a_n$ care satisfac sistemul (2) sunt nule. In adevăr, fie $\varepsilon$ un număr pozitiv oricât de mic voim. Putem arătà că oricare din termenii seriei (1), $a_n$ de exemplu, e mai mic în modul decât $\varepsilon$. Pentru aceasta să considerăm un număr $m$ destul de mare de ecuații (2') pentru ca să avem $3R_m < \varepsilon$. Aceasta se poate totdeauna, deoarece seria (1) converge absolut. Dacă $a_n$ nu e cuprins in șirul $a_1, a_2, \ldots, a_m$, adică $n > m$, să considerăm sistemul (2') conținând primele $n$ ecuații din (2). Vom aveà $3R_n < \varepsilon$ deoarece $R_m$ nu poate crește cu indicele $n$, fiind restul unei serii convergente cu termeni pozitivi. Conform raționamentului făcut, rezultă deci că numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt inferioare în modul lui $\varepsilon$.

Putem deci arătà că un termen oarecare $a_n$ din seria (1) este mai mic în modul decât un număr pozitiv $\varepsilon$ oricât de mic. Urmează deci că toți termenii $a_n$ trebuie să fie egali cu zero, pentru ca sistemul (2) să poată fi satisfăcut.

GEORGE CĂLUGĂREANU.

## ARTICOL DE GEOMETRIE

(urmare *)

10°. Revenind la configurația reprezentată de punctele tabloului 11) să considerăm centrele A'', B'', C'', D'', ale cercurilor formate cu punctele A', B', C', D' luate câte trei. Insemnăm cu T' involuția vectorială care, conform proprietății 5°, există între punctele grupelor A', B', C' D' și A'', B'', C'', D''. Fie E' omologul punctului lui MÖBIUS $\infty$ în involuția T'. Avem de considerat următoarele două configurații analagmatic-involutive:

$$13)\quad \begin{vmatrix} A & B & C & D & E \\ A' & B' & C' & D' & \infty \end{vmatrix}, \qquad 14)\quad \begin{vmatrix} A' & B' & C' & D' & E' \\ A'' & B'' & C'' & D'' & \infty \end{vmatrix}.$$

Se vede pe aceste scheme că trecerea dela grupa ABCD la grupa A''B''C''D'' se face prin mijlocirea omografiei vectoriale

$$15)\qquad \Omega = T \cdot T'.$$

*) A se vedea pag. 89.

Dar avem:

$$AB \perp C'D' \quad , \quad C'D' \perp A''B''$$

$$AB \parallel A''B''$$

relație care are loc între două, oarecare, din segmentele diagonale corespunzătoare ale patrupunctelor ABCD și A″B″C″D″. Deci aceste două patrupuncte sunt omotetice.

Însă omoteția este o omografie vectorială particulară. Cum trei perechi de puncte omoloage („a fortiori", patru) pot intră numai într'o omografie, conchidem că Ω se confundă cu omoteția celor două patru puncte ABCD și A″B″C″D″.

Să observăm că involuția T face să corespundă lui $\infty$ punctul E. Fie *E* corespunzătorul lui E în involuția T′.

Urmează că omoteția Ω dă ca omolog punctului lui Möbius $\infty$, însuși punctul *E*, și deci, în mod necesar:

$$E \equiv \infty.$$

Sau, aplicând involuția T′:

$$\boxed{E \equiv E'}$$

Deci E se definește cu centrul omoteției Ω.

Ținând seamă de această proprietate și comparând configurațiile analagmatic-involutive 13) și 14), în lumina proprietății lor 7°, scoatem pentru E următoarea construcție:

*Fiind date punctele* A′, B′, C′, D′, $\infty$, *pentru a găsi omologul* E *al punctului* $\infty$ *în configurația analagmatică-involutivă definită de linia elementelor date, procedăm în modul următor: Considerăm inversele punctului* $\infty$ *față de cercurile formate cu punctele* A′, B′, C′, D′ *luate câte trei. Fie* A″, B″, C″, D″ *aceste inverse. Punctele* A′, B′, C′, D′ *față de cercurile corespunzătoare* B″C″D″, C″D″A″, D″A″B″, A″B″C″ *au acelaș invers, care este punctul căutat* E.

Din faptul că E este centrul omoteției Ω rezultă că acest punct se găsește la intersecția comună a dreptelor, ușor de construit, AA″, BB″, CC″, DD″.

11°. Transformând analagmatic tabloul 11), obținem un tablou general de configurații analagmatic-involutive 12), pentru care proprietatea subliniată în paragraful precedent devine:

*Cinci puncte arbitrare* a', b', c', d', e' *din plan pot fi luate drept bază a unei configurații analagmatic-involutive. Unul din punctele* a, b, c, d, e *ale celeilalte jumătăți a configurației (de exemplu punctul* e) *se obține în modul următor :*

*Se iau inversele* $a''_e$, $b''_e$, $c''_e$, $d''_e$ *ale lui* e' *față de cercurile* b'c'd', c'd'a', d'a'b', a'b'c'. *Punctele* a', b', c', d' *au același invers față de cercurile* $b''_e c''_e d''_e$, $c''_e d''_e a''_e$, $d''_e a''_e b''_e$, $a''_e b''_e c''_e$. *Acest punct e omologul căutat* e *al lui* e' *în configurația analagmatic-involutivă :*

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ a' & b' & c' & d' & e' \end{vmatrix}.$$

## § 3. Aplicațiile configurațiilor analagmatic-involutive.

12. *În tabloul simplificat* 11), *vrem să arătăm că cercurile* BCD, CDA, DAB, ABC *se văd sub același unghiu geometric, din punctul* E.

Să considerăm cercurile (C') și (D'), de centre C' și D', determinate de punctele ABD și ABC. Fie ($\Sigma$) cercul lor de similitudine și S unul din centrele de similitudine. Avem :

$$(\Sigma) \equiv \text{ASB}.$$

Fie $AL_1$, $AL_2$ și AL tangentele în A, respectiv la cercurile (C'), (D') și ($\Sigma$). Se știe că există o inversiune de pol S, care permută cercurile (C') și (D') și în același timp (evident) : cercul ($\Sigma$) și axul radical AB. Ținând seamă că inversiunea modifică numai semnul unghiurilor vectore de tăiere, avem în baza observațiunilor de mai sus :

$$\overline{BAL_1} = -\overline{LAL_2},$$

ceeace se mai scrie

$$\overline{BAL_1} = -\overline{LAB} - \overline{BAL_2}$$

$$\therefore \quad \overline{LAB} = \overline{L_1AB} + \overline{L_2AB}.$$

Dacă E este un punct oarecare al cercului de similitudine ($\Sigma$) relația precedentă se mai poate scrie

15) $$\overline{AEB} = \overline{ADB} + \overline{ACB},$$

relație care caracterizează situarea lui E pe cercul de similitudine al perechii (C'), (D').

In virtutea involuției vectorale T, care leagă perechile de puncte ale tabloului 11), putem scrie:

$$(ECAB) = (\infty\, C'A'B')$$

$$\overline{\arg\ (ECAB)} = \overline{\arg\ (\infty\, C'A'B')}.$$

De unde, desvoltat:

$$\overline{AEB} - \overline{ACB} = -\overline{A'C'B'}$$

$$\overline{AEB} = \overline{ACB} - \overline{A'C'B'}.$$

Dar, în baza regulei 5) relația se mai scrie

15') $$\overline{AEB} = \overline{ACB} + \overline{ADB}.$$

Comparând 15) cu 15') conchidem că E se găsește pe cercul de asemănare al perechii (C'), (D'). Permutarea literelor A, B, C, D ne dă dreptul să afirmăm că E aparține oricăruia din cele șease cercuri de similitudine, ale perechilor ce se pot formà cu cercurile (A'), (B'), (C'), (D').

Dar cercul de similitudine e locul punctelor de unde cercurile corespunzătoare se văd sub același unghiu geometric. Rezultă proprietatea:

*Există un punct și numai unul singur, de unde cercurile* (A'), (B'), (C'), (D'), *formate cu patru puncte* A, B, C, D, *luate câte trei, se văd sub același unghiu geometric.*

*Acest punct coincide cu punctul* E *din tabloul* 11).

13⁰. Trecând dela tabloul 11), la tabloul 12) proprietatea din alineatul precedent se enunță, în termeni analagmatici, astfel:

*Fiind dată configurația*

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ a' & b' & c' & d' & e' \end{vmatrix}$$

*perechile de cercuri duse prin două puncte omoloage* e *și* e', *de exemplu, tangent la fiecare din cercurile* bcd, cda, dab, abc, *se taie sub același unghiu geometric* $\omega$ [1]).

1) Acest unghiu e ușor de definit. Fie *eme'* și *ene'* arcele pe care se găsesc punctele de tangență cu cercul *abc*, de exemplu. Semidreptele tangente în *e* arcelor *eme'* și *ene'* sunt bine determinate. Unghiul lor geometric e unghiul de tăiere, de care vorbim.

*Ca o consecință a involuției vectoriale* $\tau$ *care există între punctele celor două linii ale tabloului, rezultă deasemenea că cercurile duse prin* e, e' *tangent la* b'c'd', c'd'a', d'a'b', a'b'c' *se taie sub acelaș unghiu geometric* $\omega'$. *Avem însă* $\omega = \omega'$.

14°. Din conbinarea proprietății de mai sus, cu lemma 3° dela § 1, ajungem la generalizarea unei proprietăți clasice, relativă la focarul și la cercul circumscris triunghiului format de tangentele unei parabole.

Să reluăm tabloul 11)

$$\left| \begin{matrix} A & B & C & D & E \\ A' & B' & C' & D' & \infty \end{matrix} \right| .$$

Lemma 3° ne spune că D și D' sunt puncte isogonale față de triunghiul A'B'C'. Există deci o conică $\Phi$ înscrisă în triunghiul A'B'C' și având focarele în D și D'.

Să însemnăm cu $\Pi$ cercul circumscris triunghiului A'B'C' format cu trei tangente ale conicei $\Phi$. Vom zice cercului $\Pi$ și analoagelor sale, *cercuri ale lui* PONCELET, *relative la conica* $\Phi$.

Proprietatea din alineatul precedent, aplicată punctelor D, D', arată că perechile de cercuri duse prin focare, tangent respectiv la dreptele B'C', C'A', A'B' și la cercul $\Pi$, se taie sub acelaș unghiu geometric (vezi nota precedentă).

De aici o consecință. După teorema lui PONCELET, există o simplă infinitate de triunghiuri *ABC* înscrise în cercul $\Pi$ și circumscrise conicei $\Phi$. Putem presupune totdeauna deci tangenta mobilă *BC* adusă în poziția $\Delta$, totdeauna aceeaș, oricare ar fi cercul lui PONCELET $\Pi$. *In virtutea observației de mai sus, unghiul geometric sub care se taie cercurile duse prin focare, tangent la un cerc* PONCELET $\Pi$ *față de conica* $\Phi$ *e o constantă, fiind totdeauna egal cu unghiul sub care se taie cercurile duse prin focare, tangent la* $\Delta$.

Se pune întrebarea dacă unghiul acesta e real și care e valoarea lui în raport cu parametrii conicei?

Pentru aceasta vom presupune la început că $\Phi$ e o elipsă. Însemnăm cu U, U' și V, V' vârfurile axei mari și axei mici. Pentru a preciză, vom presupune că pe axa mică punctele U, D, D', U' se succed chiar în ordinea indicată și că sensul de rotire dela U, la V, în jurul centrului elipsei, este cel pozitiv.

Nimic nu ne împiedică să luăm ca poziție pentru tangenta fixă dar de altfel arbitrară Δ însăși tangenta în V la elipsă. Cele două cercuri duse prin D′ și D, tangent la Δ, se particularizează în cercul D′VD, și dreapta D′D.

Prezența punctului V pe arcul D VD, orientează cercul. Fie DU″ semidreapta tangentă corespunzătoare. Conform precizării din nota precedentă, pentru a determină în cazul de față unghiul geometric de tăiere trebuie să alegem sensul D′ ∞ D pe dreapta D′D: adică să considerăm semidreapta $\overline{D'U'}$. Unghiul căutat este unghiul geometric

$$\sphericalangle\, U'D'U''.$$

Dar avem

$$\sphericalangle\, U'D'U'' = \sphericalangle\, D'VD$$

iar, din paralelogramul VD′V′D :

$$\sphericalangle\, U'D'U'' = \pi - \sphericalangle\, VD'V'.$$

Avem deci următoarea teoremă:

*Cercurile lui* Poncelet Π, *față de o elipsă, sunt astfel încât unghiul geometric de tăiere al cercurilor duse prin* D *și* D′ *tangent la* Π, *este totdeauna acelaș, și anume, egal cu suplimentul unghiului geometric sub care se vede axa mică dintr'unul din focare.*

Această proprietate admite și reciprocă. Ea poate fi luată ca definiție a cercurilor Π.

Din enunțul precedent reiese că proprietatea încetează de a mai fi reală în cazul iperbolei, cel puțin forma sub care a fost prezentată în enunț. Intr'adevăr axa mică devine imaginară, și odată cu ea, unghiul de tăiere. E deci o proprietate specifică elipsei. Pe cale genetică o putem însă extinde și parabolei și ea devine atunci proprietatea clasică menționată la începutul acestui alineat.

Intr'adevăr, să fixăm vârful U′ și focarul D′ al elipsei și să facem celălalt focar D să tindă către infinit. Se știe că în aceste condiții elipsa are ca limită o parabolă. Axa mică a elipsei tinde către dreapta dela infinit, iar extremitățile ei V și V′, către direcția asimptotică a parabolei (punctul dela infinit al lui D′U′). Așa dar lim. $\sphericalangle$ VDV′ = 0.

Pe de altă parte, cercurile duse prin D, D′ tangent la cercul Π, tind către cele două drepte duse prin focarul D′ tangent la Π; iar

unghiul lor de tăiere, către unghiul sub care cercul Π se vede din D'.

Teorema de mai sus se enunță atunci pentru parabolă:

*Cercurile lui* PONCELET Π *față de parabolă sunt văzute din focar sub un unghiu de 180°, adică trec prin focar.*

Legătura dintre teorema privitoare la elipsă și această foarte cunoscută proprietate, mărește interesul celui dintâiu.

Am vrut cu acest articol să câștig pentru geometria elementară o configurație care mi s'a impus, sub formă proiectivă, cu ocazia unei alte cercetări. Configurațiile analagmatic-involutive ascund, sub o coloratură specială, configurațiile echi-proiective, care generalizează raportul echianarmonic, și care se introduc dela sine în studierea cazului singular al unor proprietăți pătratice găsite de D-l Profesor ȚIȚEICA (vezi numărul din Buletinul Școlii Politecnice citat mai sus).

E poate interesant să adăugăm că teoria configurațiilor analagmatic-involutive din plan e în strânsă legătură cu sistemul celor 27 generatoare rectilinii conținute în general de o suprafață de ordinul al 3-lea. Proprietățile 7° ascund proprietatea a 4 din cele 27 generatoare de a determină rapoarte anarmonice egale pe fiecare din cele două generatoare care se sprijină pe aceste patru.

D. BARBILIAN.

## NOTE MATEMATICE

16. *Asupra problemei 3611.* La soluția acestei probleme, (anul XXXV pag. 68) D-l I. MURĂROIU a dat o soluțiune, asupra căreia am atras atențiunea că nu e generală, și am dat două exemple numerice în acest scop. D-l I. MURĂROIU ne-a trimis o notă în care arată că acele exemple se pot găsi prin metoda D-sale căci revine a soluționa ecuațiile lui PELL:

$$t^2 - 24\,z^2 = 1 \quad \text{și} \quad t^2 - 12\,z^2 = 1,$$

care au soluțiile minime

$$t = 5,\ z = 1 \quad \text{și} \quad t = 7,\ z = 2.$$

Afirmația este adevărată, însă exemplele, sau au fost eronat tipărite sau nu au fost bine alese, nu mai pot preciza acum.

BIBLIOTECA CENTRALĂ

Chestiunea se reduce la a demostra că ecuaţia în numere întregi :

$$by^2 - ax^2 = b - a,$$

nu poate fi complect rezolvată prin substituţia :

$$x = bz + t, \qquad y = az + t,$$

în care $z$ şi $t$ sunt întregi. Astfel, prima ecuaţie este verificată de $a = 5$, $b = 2$, $x = 7$, $y = 11$ pe când aceste valori introduse în sistemul al doilea ne dă $z = 4/3$. Deasemenea $a = 3$, $b = 9$ $x = 19$, $y = 11$, dar ne dă $z = 4/3$.

I. I.

17. *Asupra problemei 3882.* Se cerea în acea problemă bipatratele care se termină cu rădăcina lor. Observăm că această problemă este un caz particular al problemei studiate de D-l G. Ţiţeica în *Gazeta Matematică,* anul IX, pag. 74, sub titlul : *„O chestiune de teoria numerelor"* în care se căutau patratele scrise în un sistem oarecare de numeraţiune care se termină cu rădăcina lor.

H. P. Ionescu.

18. *Asupra unor exerciţii.* La exerciţiul 33, pag. 237 anul XXXV, să se înlocuiască la rezultat 76 cu 67.

La exerciţiul 34 depe aceiaşi pagină pe lângă soluţia dată acolo şi cea din Nota 43 dela pag. 295 să se mai adaoge soluţia : $49729 = 223^2$.

La exerciţiul 39 al aceluiaşi an, pag. 227, să se înlocuiască 41636, care nu e patrat, cu 41616.

La exerciţiul 60 din acelaş an, pag. 397 rădăcina cubului este 864.

La exerciţiul 62 depe pagina următoare trebuie pus $a^2$ în loc de $m^2$.

La exerciţiul 73 din acelaşi an, pag. 479, primul patrat este 1681.

N. D. Dobrogeanu.

19. *Descompunerea unei sume de patrate în patratele ei.* Fie :

$$N = 2^{\alpha} \cdot m \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} .$$

Aci $m$ conţine totalitatea factorilor primi de forma $(4k - 1)$ conţinuţi în N, iar $p_i$ sunt factori de forma $(4k + 1)$. Ştiind că

suma a două patrate nu se poate divide decât prin factori primi de forma $(4k + 1)$, în afară de 2, reese că problema nu e posibilă de cât dacă $m$ este un patrat. Egalitatea cerută:

$$N = x^2 + y^2,$$

devine, dacă punem:

$$k^2 = 2^{\alpha-\varepsilon} \cdot m, \qquad x = kx_1, \qquad y = ky_1:$$

$$\therefore \quad x_1^2 + y_1^2 = 2^{\varepsilon} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r},$$

unde $\varepsilon$ este 0 sau 1, după cum $\alpha$ este pereche sau nepereche.

Pentru găsirea lui $x_1$ şi $y_1$ ţinem seama de următoarele identităţi:

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2$$
$$1^2 + 1^2 = 2,$$

şi că orice număr de forma $(4k + 1)$ se poate pune într'un singur fel sub forma unei sume de două patrate.

Să aplicăm acestea la câteva cazuri concrete.

Fie $N = 18720 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$ (Vezi problema 3941 din *Gazeta Matematică*, anul XXXVI, pag. 157). Punem $x = 12x_1$ şi $y = 12y_1$, de unde reese $x_1^2 + y_1^2 = 2 \cdot 5 \cdot 13$. Avem acum:

$$1^2 + 1^2 = 2, \qquad 2^2 + 1^2 = 5, \qquad 2^2 + 3^2 = 13.$$

$$\therefore \quad (2 \cdot 1 + 1 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1)^2 = 3^2 + 1^2 = 10.$$

$$(3 \cdot 2 + 1 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 3 - 1 \cdot 2)^2 = 9^2 + 7^2 = 10 \cdot 13 = 130.$$

$$(3 \cdot 2 - 1 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 3 + 1 \cdot 2)^2 = 3^2 + 11^2 = 10 \cdot 3 = 130.$$

De aci rezultă:

$$108^2 + 84^2 = 36^2 + 132^2 = 18720.$$

Luăm ca alt exemplu: $N = 5841557 = 17^3 \cdot 41 \cdot 29$. Găsim uşor:

$$17 = 4^2 + 1^2, \quad 41 = 4^2 + 5^2, \quad 29 = 5^2 + 2^2.$$

$$\therefore \quad 41 \cdot 29 = 30^2 + 17^2 = 10^2 + 33^2, \quad 17^2 = 17^2 + 0^2$$
$$= 15^2 + 8^2 = 68^2 + 17^2 = 52^2 + 47^2.$$

$$\therefore \quad 17^3 \cdot 41 \cdot 29 = 2329^2 + 646^2 = 1751^2 + 166^2 = 2359^2 + 526^2$$
$$= 761^2 + 294^2 = 1241^2 + 2074^2 = 119^2 + 2414^2$$
$$= 2186^2 + 1031^2 = 1246^2 + 2071^2.$$

Chestiunea descompunerii numerelor în o sumă de cel mult patru patrate este cunoscută. Această notă are de scop de a pune în curent cu o metodă elementară pe corespondenţii *Gazetei Matematice.*

Menţionez cu această ocaziune că enunţul problemei 3941 este supraabondent după cum reese din descompunerea de mai sus.

I. B. F.

# BIBLIOGRAFIE

**Bulletin de la Section scientifique de l'Académie Roumaine.** Vol. XIV, No. 6—8. Bucarest 1931. Sur les dévelloppantes d'une surface réglée, par E. CARTAN. La notion de la propagation dans la mécanique ondulatoire, par AUREL IONESCU.

**Bulletin of the American Mathematical Society.** Vol. XXXVII, No. 10. Octomvrie 1931. New-York. Funcţiunile analitice şi fizica matematică, de G. Y. RAINICH. Aplicaţia algebrei lui BOOLE pentru a proba consistenţa şi independenţa postulatelor, de B. A. BERNSTEIN. Un plan nedens continuum, de J. H. ROBERTS. O teoremă a lui VON STERNECK, de D. H. LEHNER, O notă asupra algebrei ciclice de ordinul 16, de A. A. ALBERT. O incunoştiinţare, de G. W. STARCKER. Asupra unui proces de diferenţiare covariantă, de H. V. CRAIG. Asupra divizibilităţii spaciilor conexe local, de G. T. WHYBURN. Teoreme dé adiţiune cuadratică pentru funcţiuni pare, de J. D. GRANT. Transformarea secuenţelor duble cu aplicaţia la sumabilitatea lui CESARO a seriilor duble, de C. R. ADAMS. Funcţiuni uzuale asociate cu curbe cubice raţionale, de C. BELL. O aplicaţie a geometriei metrice la determinanţi, de L. M. BLUMENTHAL. Figuri de anumite involuţii ciclice cu 2 dimensiuni, de W. P. HUTCHERSON. Legile distributive pentru sisteme lineare omogene, de A. A. BENNETT. Asupra descompunerii în factori a numerelor mari, de D. H. LEHMER & R. E. POWERS. Algebra diviziunii peste un câmp algebric, de A. A. ALBERT.

**Mathematica.** Vol. III, 1930. *Primul Congres al matematicianilor români.* Cluj, 9—12. Mai 1929. Cluj, 1930. Organizarea Congresului. Discursurile D-lor G. ŢIŢEICA, W. SIERPINSKI, GH. BOGDAN-DUICA, I. IONESCU, V. ALACI. Reuniuni în afară de lucrările Congresului. Şedinţa de închidere. Lista comunicărilor. Lista membrilor Congresului. Memorii presentate Congresului: Asupra funcţiunilor subarmonice, de P. MONTEL. Asupra unei descompuneri a lui VITALI, de W. SIERPINSKI. Asupra unor teoreme Tauberiane ale lui HARDY şi LITTLEWOOD, de J. KARAMATA. Puterile ansamblului integralelor unei ecuaţii integro-funcţionale, de C. POPOVICIU. Asupra proprietăţilor sâmburilor simetrici şi simetrisabili generalizaţi, de TH. ANGHELUTZA. Asupra unui sistem

de ecuaţii cu derivate parţiale de al doilea ordin, de D. V. Ionescu. Asupra închiderii sistemelor de funcţiuni ortogonale, de Al. Ghica. Asupra unei clase de ecuaţii diferenţiale, de G. Călugăreanu. Asupra curburii varietăţilor funcţionale, de Gr. C. Moisil. Asupra rezolvării integralelor lui Fredholm de prima speţă, de G. Pick, Observaţiuni asupra suprafeţelor minima proiective, de O. Mayer. Asupra funcţiunilor conjugate, de M. Niculescu. Asupra mişcării unui fir pe o suprafaţă de Gr. C. Moisil. Asupra legăturilor interioare în un sistem discret, de N. Teodorescu.

**Annales de la Sociedad cientifica Argentina.** Tomul CXII. Fascicola IV, Octomvrie 1931. Buenos-Aires. Sumabilitatea integralelor duble divergente, de J. C. Vignaux.

**Boletin matematico.** Anul IV, No. 8. Noemvrie 1931. Buenos-Aires. O teoremă de sumare a seriilor neconvergente, de S. Selzer. Chestiuni notabile în geometria triunghiului în relaţiune cu cercurile tritangente, de M. Grünbaum.

**Journal de mathematiques elementaires** publié par H. Vuibert. Anul 56, No. 5, Decemvrie 1931. Paris.

**Idem.** No 6, Decemvrie 1931.

**Boletin matematico elemental.** Anul II, No. 9, Noemvrie 1931. Buenos-Aires. Teorema lui Stewart, de B. I. B.

**Revista matematică din Timişoara.** Anul XI, No. 10, 15 Decemvrie 1931, Timişoara. Proprietăţi în legătură cu un sistem de cercuri, de C. Coşniţă.

**Buletinul Societăţii Politecnice.** Anul XLV, No. 10. Octomvrie 1931. Desvoltarea ştiinţelor matematice în România, de G. Ţiţeica.

**Natura.** Anul XX, No. 10, Decemvrie 1931, Bucureşti. Aritmetica lui Gheorghe Lazăr, de I. Ionescu.

**Revista de pedagogie.** Organ al Institutului şi seminarului pedagogic universitar Cernăuţi. Director C. Narly. Abonamentul anual 240 lei. Bucureşti VI, Strada Roselor 9.

A. Haarbleicher. *De l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées. Nouvelle géométrie du triangle.* Paris, 1931. Gauthiers—Villars & C-ie.

Coordonatele isotrope erau cunoscute mai dinainte, autorul căutând numai a le da o expunere didactică şi a le aplica la chestiuni de natură metrică, în special la geometria triunghiului. Dacă x, y sunt coordonatele carteziane ale unui punct, coordonatele isotrope X şi Y sunt date de:

$$X = \lambda (x + yi), \qquad Y = \mu (x - yi).$$

Axele noi în sistemul cartezian sunt:

$$x + yi = 0 \qquad x - yi = 0.$$

Dacă se ia $\mu\lambda = 1$, ecuaţia cercului devine $XY = r^2$. Se studiază în noul sistem distanţa a două puncte, ecuaţia dreptei, paralelismul, perpendicularitatea, distanţele dintre puncte şi drepte, unghiurile, etc. Trecând la triunghiu, se dau coordonatele punctelor şi dreptelor principale în legătură cu ea. Capitolele următoare se ocupă cu conicele şi transformarea coordonatelor.

Ca aplicaţiuni se studiază numeroase propietăţi ale dreptei lui SIMSON, propietăţi ale trisectoarelor unghiurilor unui triunghiu, ale cercului podar şi se tratează problema lui DARBOUX; se consideră conicele circumscrise unui triunghiu aşa ca trei normale în vârfuri să fie concurente în un punct P şi se cere locul picioarelor normalei a patra dusă din P. Broşura de 76 pagini se termină cu două note.

Coordonatele isotrope se pretează pentru studii de propietăţi metrice tot aşa de bine ca coordonatele triliniare pentru studiul propietăţilor proiective.

Cartea este scrisă clar şi elementar şi poate folosi mult celor ce se ocupă cu studiul geometriei triunghiului.

I. I.

N. SAEGIU. *Fermat'sche Satz. Allgemeine Beweisführung.* Bukarest 1931.

Sunt trei secole de când matematicianul FERMAT a afirmat, fără demonstraţiune, că ecuaţia :

$$z^n = x^n + y^n$$

nu este posibilă dacă $x, y, z, n$ sunt numete întregi şi când $n > 2$.

Toţi matematicianii iluştri de atunci şi până azi au căutat să demonstreze sau să infirme această teoremă, dar nu au reuşit. In anul 1908 WOLFFSKEHL a înfiinţat un premiu de 100.000 mărci pentru cel ce va demonstra teorema sau o va infirma. De atunci dorinţa de glorie s'a însoţit la unii şi cu cea de profit şi de aceia Comisiunea de premiere a primit peste 1000 de demonstraţiuni insuficiente. S'au făcut însă şi cercetări serioase în acest domeniu; s'a arătat de exemplu că e destul a se demonstra teorema pentru $n$ prim şi s'a arătat că până la $n = 14000$ teorema este adevărată. Cu aceasta s'a închis infirmarea teoremei prin calcule numerice, căci chiar 2 ridicat la puterea 14000 are 4215 cifre, care ar cere, pentru scrierea cu cifre de tipar, o bandă de hârtie de peste 7 metri!

Chestiunea nu se poate dar trata de cât prin teorii matematice, împingându-se mai departe cele cunoscute, sau creindu-se teorii noi, după cum problema ducerii tangentelor la curbe nu a fost complect rezolvată decât după descoperirea calculului diferenţial. Cum însă FERMAT a afirmat că posedă o demonstraţiune bună, şi cum, pe vremea lui, matematica avea la dispoziţie mijloace mult mai slabe de cât acum, sunt mulţi cari au convingerea că chestiunea se poate trata cu mijloace matematice elementare, fără a se mai ţine seama de stadiul la care a ajuns astăzi chestiunea. Despre încercări făcute la noi în ţară am mai vorbit în această revistă. (Vezi Anul XV, pag. 178, Anul XVII, pag. 142) sau de streini (Anul XVI, pag. 452). Unor asemenea cercetători li s'a dat numele de *fermatişti*. Marii matematicianii de azi sunt convinşi că FERMAT a avut scăpări din vedere la demonstraţia ce a scris că

o poseda, căci toate căile cercetate de dânsul au fost exploarate şi duse mai departe. Nu e dar de mirare că şi unii din admiratorii lui să greşească.

Să venim acum la broşura de care ne ocupăm în care se afirmă că s'a găsit o demonstraţiune generală. Autorul face mai întâiu o scurtă biografie a lui FERMAT şi un istoric al teoremei lui. In aceste pagini sunt unele scăpări din vedere: astfel se spune că demostraţia pentru $n = 5$ a fost dată de »*Lejeun mit Dirichlet*« când de fapt P. G LEJEUNE-DIRICHLET e o aceiaşi persoană.

La pagina 13 se începe demonstraţia. Nu e locul aci de a intra în detaliile ei, ci voiu dovedi că s'au făcut greşeli de raţionament care fac ca demonstraţia să nu fie valabilă. Un mijloc simplu în acest scop, în teoria numerelor, este de a vedea dacă regulile sau formulele generale convin unor cazuri particulare. In acest scop voiu verifica formula generală (19) dela pagina (21) pentru cazul cel mai simplu $n = 3$. Autorul porneşte dela ecuaţia dată la începutul acestei recenziuni, pune $z = x + a$ şi deduce ecuaţia:

$$y^n = C_n^1 x^{n-1} . a + C_n^2 x^{n-2} . a^2 + \ldots + C_n^{n-1} x . a^{n-1} + a^n,$$

în care $a$, bineînţeles, nu e o constantă. Se însemnează cu P polinomul din partea a doua a egalităţii, se pune $(x/a)=X$ şi se pune P sub forma:

$$(7) \qquad P = na^n \left( X^{n-1} + \frac{C_n^2}{C_n^1} X^{n-2} + \ldots + \frac{C_n^{n-1}}{C_n^1} X + \frac{C_n^n}{C_n^1} \right).$$

După mai multe transformări şi consideraţiuni se ajunge de se dă P, sub forma:

$$(19) \qquad P = na^n \left\{ X + \left[ \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} \left( \cos \frac{2k\pi}{n-1} + i \sin \frac{2k\pi}{n-1} \right)_{k=0}^{k=n-2} \right] ! \right\}^{n-1}$$

în care ! e întrebuinţat în loc de Π spre a indica produsele parentezei curbilinii pentru valorile ce le ia când $k$ ia valorile întregi 0, 1, 2, ... $(n-2)$.

Să aplicăm formulele (7) şi (19) pentru $n = 3$, ca să vedem dacă dă aceiaşi expresiune pentru P. Găsim:

$$(7') \quad P = 3a^3 (X^2 + X + \tfrac{1}{3})$$

$$(19') \quad P = 3a^3 \left\{ X + \left[ (1/\sqrt{3}) (\cos k\pi + i \sin k\pi)_{k=0}^{k=1} \right] ! \right\}^2,$$

$$\therefore \quad P = 3a^3 \left[ X + (1/\sqrt{3}) (\cos 0 + i \sin 0 \times (1/\sqrt{3}) (\cos \pi + i \sin \pi) \right]^2$$

$$\therefore \quad P = 3a^3 (X - \tfrac{1}{3})^2 = 3a^3 (X^2 - \tfrac{2}{3} X + \tfrac{1}{9}).$$

Se vede imediat că (19') nu dă în parenteză acelaşi polinom cu (7'). Polinomul dela acesta are rădăcini imaginare, pe când la (19') polinomul are rădăcina reală dublă $\frac{1}{3}$. Formula (19) este deci eronată prin transformările ce a suferit (7) până la dânsa, şi cum restul demonstraţii se bazează pe această formulă generală, demonstraţia cade odată cu formula (19).

Teorema lui FERMAT rămâne dar şi de data aceasta nedemonstrată c. c. e. d. d.

I. IONESCU.

## CERERI

213. Cine-mi poate procura şi în ce condiţiuni, No. 10 anul XVII, No. 5 anul XXII şi No. 9 anul XXIX din *Gazeta Matematică?*

HARALAMB P. IONESCU-BISS
Student matematici Bucureşti.

## DIVERSE

Secţiunea matematică a Societăţii române de ştiinţe a ţinut şedinţă în seara zilei de 7 Decemvrie. D-l D. BARBILIAN a vorbit despre lanţurile lui CLIFFORD în grupul lui LAGUERRE şi D-l G. SUDAN asupra unei teoreme a lui CANTOR. In aceiaşi şedinţă s'a luat hotărîrea ca al doilea Congres al matematicilor români să aibă locul în anul acesta în ultimele zile ale vacanţei Paştilor, la Turnu-Severin. D-l Profesor P. SERGESCU dela Universitatea din Cluj a fost însărcinat cu organizarea Congresului, căruia i se pot adresa toţi cei care se interesează de acest Congres

Premiul anual „TRAIAN LALESCU" în valoare de 10.000 lei, oferit de *Revista universitară matematică*, de sub conducerea D-lui R. RACLIŞ, celor mai distinşi licenţiaţi în ştiinţe sau ingineri diplomaţi cari au contribuit la activitatea acelei reviste, a fost decernat pentru anul 1930 D-lui NICOLAE BOTEA, licenţiat în matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti.

Secţiunea matematică a Societăţii române de ştiinţe a ţinut şedinţă în seara zilei de 21 Decemvrie. A vorbit D-l G. CĂLUGĂREANU despre condiţiunile de univalenţă ale funcţiunilor holomorfe într'un cerc şi D-l D. BARBILIAN despre lanţuri *Clifford automorfe*. In aceiaşi şedinţă s'a ales Biroul secţiunii pentru 1932. A fost ales preşedinte D-l A. ANGELESCU şi vice-preşedinte D-l G. NICHIFOR.

## PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1973. *Intr'un circ, un acrobat de greutate* G *ia următoarea poziţie: se propteşte cu capul pe o tijă verticală fixă într'un punct* A, *îşi aşează corpul pe dungă înclinat cu un unghiu* $\alpha$ *pe orizont, şi se atârnă cu o mână de un punct al tijei situat de-asupra capului.*

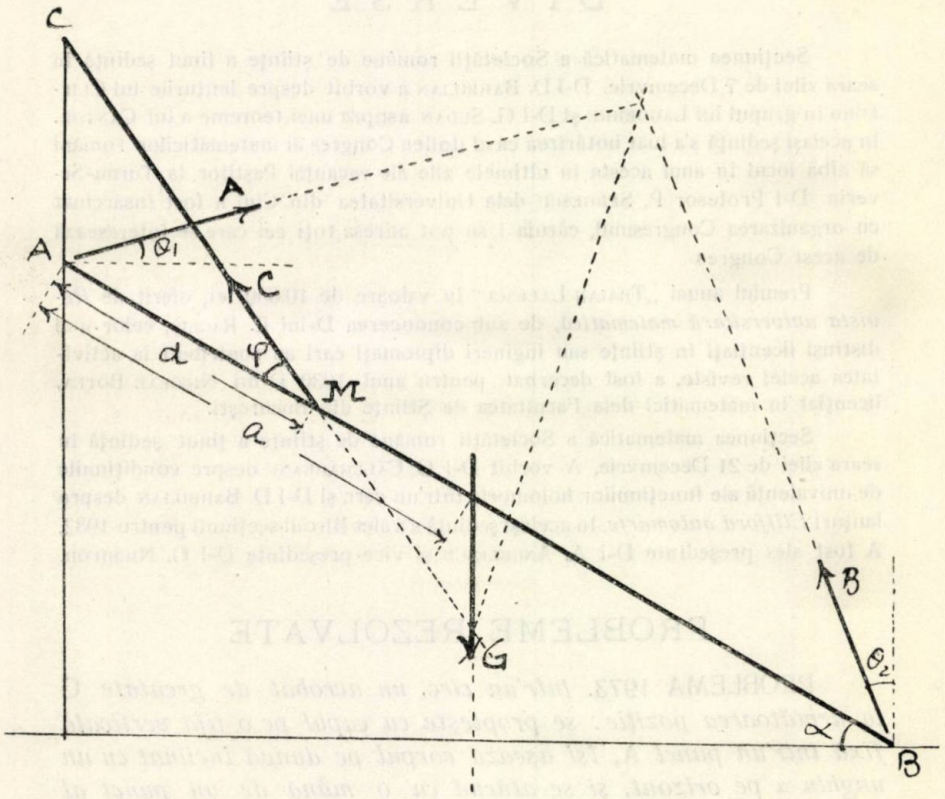
*1) Se cere valoarea reacţiunilor, neglijând frecările şi admiţând că forţele lucrează în acelaş plan vertical, normal pe planul de simetrie al corpului. Se va însemna cu* a *distanţa dela creştet la centrul de greutate al corpului.*

*2) Aceiaşi chestiune în cazul frecării, sau în cazul când acrobatul se propteşte cu mâna într'un punct al tijei situat sub punctul* A.

ST. N. MIREA.

*Soluție* dată de D-nul I. C. VASILIU (Școala Politechnică).

Dacă notez reacțiunile, unghiurile și distanțele ca în figură, și pun $f_1 = \operatorname{tg}\theta_1$ , $f_2 = \operatorname{tg}\theta_2$ coeficienții de frecare în creștetul și la picioarele acrobatului, — scriu proecțiunile forțelor pe orizontală și pe verticală și iau momentele față de punctul M :




(1) $A\cos\theta_1 - C\cos(\alpha+\varphi) - B\sin\theta_2 = 0$

(2) $-G + A\sin\theta_1 + C\sin(\alpha+\varphi) + B\cos\theta_2 = 0$

(3) $A\sin(\alpha+\theta_1)\times d + 6\cos\alpha\times(a-d) - B\cos)\alpha+\theta_2)\times(C-d) = 0$

cari ne dau după toate calculele:

$$(4)\quad \begin{cases} A = \dfrac{G\,[L\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha+\theta_2) - a\cos\alpha\cos(\alpha+\varphi+\theta_2) - d\sin\varphi\sin\theta_2]}{N} \\ B = \dfrac{G\,[a\cos\alpha\,\sin(\alpha+\varphi+\theta_1) - d\sin\varphi\cos\theta_1]}{N} \\ C = \dfrac{G\,[L\cos\theta_1\cos(\alpha+\theta_2) - a\cos\alpha\cos(\theta_1-\theta_2)]}{N} \end{cases}$$

unde numitorul $N = L\cos(\alpha+\theta_2)\sin(\alpha+\varphi+\theta_1) - d\sin\varphi\cos(\theta_1-\theta_2)$.

Dacă în formulele (4) facem $\theta_1 = \theta_2 = 0$ avem primul punct cerut:

$$(5)\quad \begin{cases} A = \dfrac{G(L-a)\cos\alpha\cos(\alpha+\varphi)}{L\cos\alpha\,\sin(\alpha+\varphi) - d\sin\varphi} \\ B = \dfrac{G\,[a\cos\alpha\sin(\alpha+\varphi) - d\sin\varphi]}{L\cos\alpha\,\sin(\alpha+\varphi) - d\sin\varphi} \\ C = \dfrac{G(L-a)\cos\alpha}{L\cos\alpha\,\sin(\alpha+\varphi) - d\sin\varphi} \end{cases}$$

Dacă proecțiile lui $A_1B$ și AM pe direcție perpendiculară pe CM, sunt egale,

$$L\cos\alpha\,\sin(\alpha+\varphi) = d\sin\varphi$$

și:

$$A = B = C = \infty.$$

Dacă:

$$a\cos\alpha\,\sin(\alpha+\varphi) = d\sin\varphi \quad , \quad B = 0.$$

Când acrobatul apucă cu mâna sub punctul de sprijin al creștetului, înlocuesc pe $\varphi$ cu $2\pi - \varphi$

$$(6)\quad \begin{cases} A = \dfrac{G\,[L\cos(\alpha-\varphi)\cos(\alpha+\theta_2) - a\cos\alpha(\alpha-\varphi+\theta_2) + d\sin\varphi\sin\theta_2]}{N} \\ B = \dfrac{G\,[a\cos\alpha\,\sin(\alpha-\varphi+\theta_1) + d\sin\varphi\cos\theta_1]}{N} \\ C = \dfrac{G\,[L\cos\theta_1\cos(\alpha+\theta_1) - a\cos\alpha\cos(\theta_1-\theta_2)]}{N} \end{cases}$$

unde:

$$N = L\cos(\alpha+\theta_2)\sin(\alpha-\varphi+\theta_1) + \alpha\sin\varphi\cos(\theta_1-\theta_2).$$

lar dacă neglijăm frecările:

$$(7)\quad \begin{cases} A = -\dfrac{G(L - a)\cos\alpha\cos(\varphi - \alpha)}{L\cos\alpha\sin(\varphi - \alpha) + d\sin\varphi} \\ B = \dfrac{G[a\cos\alpha\sin(\varphi - \alpha) + d\sin\varphi]}{L\cos\alpha\sin(\varphi - \alpha) + d\sin\varphi} \\ C = -\dfrac{G(L - a)\cos\alpha}{L\cos\alpha\sin(\varphi - \alpha)\, d\sin\varphi} \end{cases}$$

*Soluția* grafică e evidentă, pentru a o mai da.

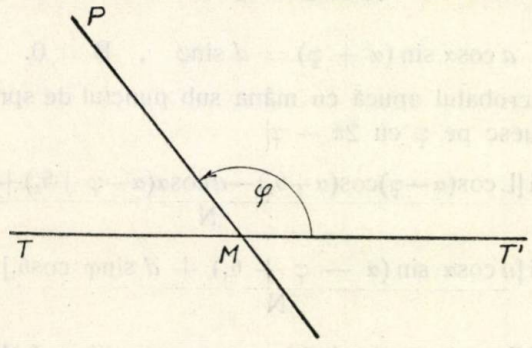
*Notă.* A mai rezolvat chestiunea fără frecare un domn anonim.

---

PROBLEMA 3335. *Să se găsească, pe un cerc dat, punctele în care unghiul format de tangenta în acele puncte, cu dreapta care le unește cu un punct dat (afară din planul cercului sau în plan) este maxim sau minim. Generalizare.*

B. Ig. Baidaff.

Fie TT' tangenta în punctul M al curbei (Γ), plană sau strâmbă și P un punct dat în spațiu. Direcția pozitivă a axei TT' face cu semiaxa MP unghiul T'MP, care crește dela valoarea $\varphi_1$ până la $\pi$ când MP vine în MT, sau scade dela $\varphi_1$ la zero când MP vine în MT'. Deci maximum unghiului T'MP este $\pi$, iar minimum




său este O. Și într'un caz și în altul MP se confundă cu TT' și problema revine la a duce din P tangentele $TM_1$, $TM_2$, . . . la curba (Γ), problemă cunoscută și ușor de realizat prin construcții geometrice când (Γ) este o curbă plană cunoscută iar M este în planul său.

*Notă.* D-l I. C. Vasiliu (Şc. Politecnică, Bucureşti) a dat următoarea soluţie analitică pentru cazul general. Fie :

$$x = f(t) \quad ; \quad y = F(t) \quad ; \quad z = \varphi(t)$$

un punct M de pe curba (Γ) şi P (0, 0, 0) punctul fix dat, în care s'a luat origina axelor de coordonate. Cosinii directori ai tangentei la (Γ) în M sunt $x'_t$ , $y'_t$ , $z'_t$ iar aceia ai dreptei PM sunt $x$, $y$, $z$. Unghiul direcţiilor PM, TT' este dat de

$$\cos V = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t)}} \qquad (1)$$

Cum unghiul variază cu cosinusul, maximul şi minimul lui V are loc o dată cu al lui cosV, adică pentru valorile lui $t$ care anulează derivata lui cosV. Dar

$$(\cos V)' = -\sin V = 0 \quad \text{pentru} \quad V = k\pi.$$

Deci $V_{min}$ este zero iar $V_{max}$, în sensul geometric, este $\pi$. Cu aceste rezultate algebrice găsirea geometrică a lui M se face ca la prima soluţie.

2°. Este foarte probabil că, la culegerea la tipografie a enunţului trimis de autor, s'a strecurat o eroare care face ca problema să fie fără nici un interes, după cum se vede atât din soluţia geometrică cât şi din soluţia analitică.

Dacă (Γ) se dă prin o ecuaţie explicită, atunci problema se poate transforma într'un exerciţiu de algebră şi anume rezolvarea ecuaţiei în $t$, care rezultă din anularea derivatei membrului II al ecuaţiei (1).

Gh. B.

---

PROBLEMA 3730. *Se consideră un rezervor cilindric cu pereţi subţiri, cu diametrul 1,20 m., în care se pune apă până la 3 m. înălţime. La partea inferioară se face un orificiu cilindric de 1 cm. diametru, prin care apa din rezervor se scurge afară. La un moment dat, vâna de lichid exterioară ia forma unei parabole, care are axa, verticala orificiului.*

*Să se găsească viteza focarelor tuturor acestor parabole în timpul scurgerii lichidului din rezervor.*

O. Orănescu.

Luând ca axa $x$-lor verticala orificiului și ca axa $y$-lor o perpendiculară pe ea și însemnând cu $v$ viteza de scurgere a lichidului la momentul $t$, coordonatele unui punct al parabolei vor fi:

$$y = vt \quad , \quad x = \frac{1}{2} gt^2,$$

de unde eliminând pe $t$, avem ecuația parabolei la momentul considerat:

$$y^2 = \frac{2v^2}{g} x.$$

Distanța focarului la vârf este $p = \frac{v^2}{2g}$.

Dacă acum însemnăm cu $h$ înălțimea apei în vas la momentul $t$ avem $h = \frac{v^2}{2g} = p$.

*Rezultă teorema că distanța focarelor parabolelor considerate, la orificiu, este egală cu înălțimea apei în rezervor deasupra orificiului și deci linia nivelului apei este directoarea parabolelor.*

Viteza deplasării focarului este $\frac{dp}{dt} = \frac{dh}{dt} = \alpha$.

Dacă D este diametrul rezervorului, $d$ al orificiului, $h_0$ înălțimea inițială a apei în rezervor, debitul de scurgere este:

$$q = \frac{\pi}{4} d^2 \, v = \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2gh}$$

(nu s'a considerat coeficientul de strangulație, rezervorul având pereții subțiri).

Intr'un timp $dt$, nivelul în rezervor scade cu $dh$, deci

$$\frac{\pi}{4} D^2 \, dh = - q \, dt = - \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2gh} \, dt$$

sau

$$dt = \frac{- D^2}{d^2 \sqrt{2g}} \frac{dh}{\sqrt{h}} \quad \therefore \quad t = \frac{- 2}{\sqrt{2g}} \frac{D^2}{d^2} \sqrt{h} + c.$$

In momentul $t = 0$ , $h = h_0$, deci:

$$c = + \frac{2}{\sqrt{2g}} \frac{D^2}{d^2} \sqrt{h_0} \quad \therefore \quad t = \frac{2}{\sqrt{2g}} \frac{D^2}{d^2} (\sqrt{h_0} - \sqrt{h})$$

$$\therefore \quad h = \left( \sqrt{h_0} - \frac{\sqrt{2g}}{2} \frac{d^2}{D^2} t \right)^2$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{dh}{dt} = - \sqrt{2g} \frac{d^2}{D^2} \left( \sqrt{h_0} - \frac{\sqrt{2g}}{2} \frac{d^2}{D^2} t \right)$$

$$\sqrt{2g} = 4{,}43 \; ; \; \frac{d^2}{D^2} = \frac{\frac{1}{10^4}}{1{,}44} = \frac{1}{14.400} \; ; \; \sqrt{h_0} = 1{,}73 \; ; \; \frac{\sqrt{2g}}{2} = 2{,}21$$

$$\therefore \quad \alpha = - \frac{1}{3250} \left( 1{,}73 - \frac{1}{6501} t \right).$$

Rezervorul se goleşte complet într'un timp $T = 6501 \times 1{,}73 = 11246{,}73$ secunde = 3 ore, 7 minute, 27 secunde.

D-l Virgiliu C. Popescu, calculând greşit a găsit că rezervorul se goleşte în 3 minute şi că viteza este de 1 m/minut, când în realitate viteza medie este circa 1 m/oră. D-sa a introdus şi coeficientul de strangulaţie, luându-l egal cu 0,62.

A mai încercat să rezolve problema şi D-l Eugen I. Dumitrescu.

O. Or.

PROBLEMA 3774. *Se dau două numere prime între ele* m *şi* k. *Cum pot fi între ele numerele* m, k, (m — k) *şi* (2m — 5k) *luate două câte două? Să se generalizeze.*

P. Sergescu.

*Soluţie* dată de D-l Mihail Velea, (Student Cluj).

$m$ şi $k$ sunt prime cu $(m - k)$, căci orice divizor al lui $m - k$ şi $k$ ar divide şi suma lor $m$, contrar ipotezei care cere ca $m$ şi $k$ să fie prime între ele.

*Grupul* $(2m - 5k)$ *şi* $m$. Orice divizor al acestor două numere divide şi pe

$$2(m) - (2m - 5k) = 5k.$$

Or, $m$ şi $k$ sunt prime între ele, deci $m$ şi $5k$ au cel mult divizorul comun 5. De fapt, când $m$ = Mult. 5, numerele $m$ *şi* $2m - 5k$ *au divizorul comun 5.* In orice alt caz, ele sunt *prime între ele.*

*Grupul* $(2m - 5k)$ *şi* $k$. Orice divizor comun al lor, divide şi

$$2m - 5k + 5(k) = 2m.$$

Dar $k$ şi $2m$ au cel mult divizorul comun 2. Rezultă că: *dacă numărul k e par, numerele* $2m - 5k$ *şi k au divizorul comun 2; altfel ele sunt prime între ele.*

*Grupul* $(2m - 5k)$ *şi* $(m - k)$. Avem $2m - 5k = 2(m - k) - 3k$, aşa că orice divizor comun al numerelor considerate, e divizor şi al diferenţei:

$$2(m - k) - [2(m - k) - 3k] = 3k.$$

Or $k$ şi $m - k$ sunt prime între ele. Rezultă că singurul divizor comun al numerelor $(2m - 5k)$ şi $(m - k)$ este 3, în cazul când

$$m - k = \text{Mult. } 3.$$

*Generalizare.* Pornind dela numerele prime între ele $m$ şi $k$ putem considera, în general, numere de forma $am - bk$, $\alpha m - \beta k$. Cazul când $a$, $b$ nu sunt prime între ele, sau $a$, $\beta$ nu sunt prime între ele introduce răspunsuri evidente: dacă *c. m. m. c. d.* al lui $a$, $b$ este $s$, atunci orice divizor comun al lui $s$ şi $m$ sau $s$ şi $k$, divizor comun al lui $m$ (resp. $k$) şi $(am - bk)$. Lăsând la o parte aceste cazuri banale, să considerăm cazurile când: $a$ e prim cu $b$ şi $\alpha$ e prim cu $\beta$.

Atunci, în grupul $m$, $am - bk$, orice divizor comun, divide şi diferenţa:

$$a(m) - (am - bk) = bk.$$

Cum $k$ e prim cu $m$, rezultă că divizorii comuni ai numerelor $m$ şi $(am - bk)$ sunt $b$ şi divizorii lui, dacă $m$ = Mult. $b$. Altfel, cele două numere sunt prime între ele.

Exact în acelaş fel, divizorii comuni ai numerelor $k$ şi $(am - bk)$ sunt $a$ şi divizorii lui, dacă $b$ = Mult. $a$. Altfel, numerele sunt prime între ele.

Rezultate analoage pentru $\alpha m - \beta k$.

Să considerăm, în fine, grupul $(am - bk)$ şi $(\alpha m - \beta k)$. Orice divizor comun al acestor două numere, trebuie să dividă şi diferenţele următoare :

$$\alpha(am - bk) - a(\alpha m - \beta k) = (a\beta - \alpha b)k$$

$$\beta(am - bk) - b(\alpha m - \beta k) = (a\beta - \alpha b)m.$$

Cum $m$ şi $k$ sunt numere prime între ele, rezultă că singurii divizori comuni posibili între numerele $(am - bk)$ şi $(\alpha m - \beta k)$ sunt $(a\beta - \alpha b)$ şi divizorii săi.

De altfel dacă $p$ e un divizor comun al lui $(am - bk)$ şi $(a\beta - \alpha b)$, el divide şi pe $(\alpha m - \beta k)$. In adevăr, $p$ va divide şi pe :

$$\alpha(am - bk) - k(a\beta - \alpha b) = a(\alpha m - \beta k)$$

$$\beta(am - bk) - m(a\beta - \alpha b) = b(\alpha m - \beta k).$$

Dar $a$ şi $b$ sunt presupuşi primi între ei, deci $p$ nu-i poate divide în acelaş timp. Rezultă că $p$ trebuie să dividă pe $(\alpha m - \beta k)$.

---

PROBLEMA 3798. *Notaţiile fiind cele obişnuite într'un triunghiu, să se stabilească inegalitatea*

$$S < r^2(\operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}A + \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}B + \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}C)$$

NICOLAE O. ZAHARIA.

*Soluţie* dată de Domnii: TH. N. PANAITE şi I. C. SAVIN (Şcoala de Artilerie, Timişoara), CEZAR COŞNIŢĂ (Bârlad), C. D. IONESCU-ŢIU (Şcoala de Geniu, Bucureşti), P. I. GHIŞOIU (Bucureşti).

Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar $a, b, c$ at urile. Avem

$$\begin{gathered} a < BI + IC \\ b < AI + IC \\ c < AI + IB \\ \hline a + b + c < 2\,(AI + BI + CI) \end{gathered}$$

sau

$$p < AI + BI + CI.$$

Dar

$$AI = \frac{r}{\sin \frac{1}{2}A} = r \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}A \quad ; \quad BI = r \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}B \quad ; \quad \text{etc....}$$

Rezultă

$$(1) \qquad p < r\,(\operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}A + \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}B + \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}C)$$

şi înmulţind cu $r$ ambele părţi ale inegalităţei, avem relaţia din anunţ

$$s < r^2 \sum \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}A.$$

*Notă.* 1. Din relaţia (1) rezultă

$$\Sigma \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}A > \frac{P}{r} = \Sigma \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A = \Pi \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A$$

şi deci o altă relaţie

$$\Sigma \sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B > \Pi \cos \tfrac{1}{2}A.$$

Cezar Coşniţă.

2) Alte soluţii s'au primit dela Domnii: Vl. I. Crivăţ, Eug. Burlacu, Negrea M. Leonte şi N. N. Aldea.

Colonel G. I. Liteanu.

---

PROBLEMA 3818. a, b, c *fiind laturile unui triunghiu şi* $r_a$, $r_b$, $r_c$ *razele cercurilor exînscrise acelui triunghiu, să se arate că avem relaţiunea*

$$\sum r_a^3 (r_b - r_c)^3 = 3 p^3 (a - b)(b - c)(c - a)$$

Virgil C. Popescu.

I. *Soluție* dată de Domnii: AL. A. ROȘU și I. GH. POPA. Pentru a stabili relația din enunț ne servim de identitatea

$$\Sigma\, x^3 (y - z)^3 = 3\, xyz\, (x - y)\, (y - x)\, (z - x),$$

în care înlocuind

$$x = r_a\,,\ y = r_b \text{ și } z = r_c$$

se obține

$$\Sigma\, r_a^3\, (r_b - r_c)^3 = 3\, r_a\, r_b\, r_c\, (r_a - r_b)\, (r_b - r_c)\, (r_c - r_a).$$

Dacă în partea a doua a acestei din urmă egalități se face

$$r_a - r_b = \frac{p\,(a - b)}{r_c};\quad r_b - r_c = \frac{p\,(b - c)}{r_a};\ \text{etc...}$$

(G. M. Vol. XXXI, pag. 78)

se obține relația căutată.

II. *Soluție* dată de Domnii: N. ALDEA, A. EM. BĂDESCU, MENDEL BERCU, I. C. BOIAN, AUREL C. CONSTANTINESCU, CEZAR COȘNIȚĂ, VL. I. CRIVĂȚ, C. DAN, H. ȘT. DĂSCĂLESCU, ALEX. PANĂ-DELEANU, N. DONCIU, AD. C. GHEORGHIU, GH. TH. GHEORGHIU-GLADIȘ, P. I. GHIȘOIU, CR. M. GRECU, AL. H. HALPERIN, C. HEYMANEK, H. P. IONESCU-BISS, C. D. IONESCU-ȚIU, V. IONESCU, T. JOVMIR, C. GH. LUPESCU, EM. MEREUȚĂ, N. N. MIHĂILEANU, E. G. MILEA, M. D. MOTOC, I. MURĂROIU, NEGREA A. M. LEONTE, J. C. PAREPEANU, CORN. N. POPESCU, CR I. RÂMNICEANU. I. C. SAVIN, IUSTIN N. VÂLCEANU, M. VELEA, N. N. VELICESCU, T. GH. VELICESCU. N. ZAHARIA.

Folosind relațiile

$$r_a = \frac{s}{p - a};\ \text{etc...}\ \text{și}\ s^2 = p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c),$$

avem

$$r_a\,(r_b - r_c) = \frac{s^2\,(b - c)}{(p - a)\,(p - b)\,(p - c)} = p\,(b - c).$$

Analog

$$r_b\,(r_c - r_a) = p\,(c - a) \text{ și } r_c\,(r_a - r_b) = p\,(a - b)$$

(G. M. Vol. XXIX., pag. 356).

Rezultă deci

$$\Sigma r_a^3 (r_b - r_c)^3 = p^3 [(b-c) + (c-a)^3 + (a-b)^3] = 3p^3 (a-b)(b-c)(c-a),$$

deoarece

$$(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 = 3bc^2 - 3b^2c + 3ab^2 - 3ba^2 + 3ca^2 - 3ac^2$$
$$= 3[c(a^2-b^2) - 3c^2(a-b) - 3ab(a-b)] = 3(a-b)[ac+bc-c^2-ab]$$
$$= 3(a-b)[c(b-c) - a(b-c)] = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

*Observaţii.*

1. S'au primit alte soluţii diferite de cele de mai sus dela Domnii: IOAN GH. POPA, AURELIAN STAN, P. I. GHIŞOIU, M. I. GROSSU, VALENTIN şi GABRIEL CĂLINESCU, N. ANGHEL-DOBROGEANU, ALEX. PANĂ-DELEANU, C. D. IONESCU-ŢIU.

2. S'au citat că se obţin în mod asemănător următoarele relaţii:

$$\Sigma r_a^3 (r_b + r_c)^3 = p^3 [3abc + 8p^3 - 6p(ab + bc + ca)]$$

P. I. GHIŞOIU.

$$\Sigma r_a^3 (r_b + r_c)^3 = p^3 \Sigma a^3 = 2p^4 (p^2 - 3r^2 - 6Rr)$$

C. D. IONESCU-ŢIU.

iar D-l I. GH. POPA a menţionat relaţiile:

$$\Sigma (r_a - r_b)^3 = \frac{3p}{r}(a-b)(b-c)(c-a) \qquad \Sigma (h_a - h_b)^3 = \frac{3s}{2R^2}(b-a)(c-b)(a-c)$$

$$\Sigma r_a (r_b - r_c)^3 = \frac{p}{r} \cdot \Sigma r_a \cdot (a-b)(b-c)(c-a) \qquad \Sigma h_a (h_b - h_c)^3 = \frac{s\Sigma h_a}{2R^2}(b-a)(c-b)(a-c)$$

$$\Sigma r_a^2 (r_b - r_c)^3 = \frac{p^3}{r}(a-b)(b-c)(c-a) \qquad \Sigma h_a^2 (h_b - h_c)^3 = \frac{s^2 p}{R^3}(b-a)(c-b)(a-c),$$

ce rezultă din identităţile

$$\Sigma (x-y)^3 = 3\Pi(x-y); \quad \Sigma x(y-z)^3 = \Sigma x . \Pi(x-y) \text{ şi } \Sigma x^2 (y-z)^3 = \Sigma xy . \Pi(x-y) -$$

COLONEL G. I. LITEANU.

---

PROBLEMA 3905. *Se înpart laturile unui poligon convex oarecare, în acelaş sens, în raportul* k. *Fie* $L_1^2$ *suma patratelor laturilor poligonului astfel obţinut,* $L^2$ *suma patratelor laturilor poligonului dat şi* $D^2$ *suma patratelor diagonalelor care unesc, din două în două vârfurile poligonului primitiv.*

*Să se arate că între* k, $L_1^2$, $L^2$ *şi* $D^2$ *avem relaţiunea:*

$$(k+1)^2 L_1^2 = (k-1)^2 L^2 + kD^2.$$

CONST. C. POPOVICI.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

*Soluție* dată de D-nii: N. ALDEA, ADR. C. GHEORGHIU și PETRE I. GHIȘOIU.

Fie ABC . . . MA poligonul convex, considerat și $A_1; B_1 \ldots M_1$ punctele care împart laturile poligonului în raportul $k$, astfel ca să avem

$$\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{BB_1}{B_1C} = \ldots = \frac{MM_1}{M_1A} = k.$$

Triunghiurile ABC și $A_1BB_1$ având unghiul din B comun, există relația:

$$\frac{\overline{A_1B}^2 + \overline{BB_1}^2 - \overline{A_1B_1}^2}{A_1B \cdot BB_1} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{AB \cdot BC}.$$

Avem însă conform enunțului:

$$A_1B = \frac{AB}{k+1} \quad ; \quad BB_1 = \frac{k}{k+1} BC.$$

Înlocuind în relația de mai sus, se obține:

$$\frac{\overline{AB}^2 + k^2 \overline{BC}^2 - (k+1)^2 \overline{A_1B_1}^2}{k} = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$$

sau

$$(1-k)\overline{AB}^2 + k(k-1)\overline{BC}^2 + k\,\overline{AC}^2 = (k+1)^2 \overline{A_1B_1}^2.$$

Scriind relațiile analoage și pentru celelalte triunghiuri ale poligonului și adunând avem:

$$(1-k) \cdot \Sigma \overline{AB}^2 + k(k-1) \cdot \Sigma \overline{AB}^2 + K \cdot \Sigma \overline{AC}^2 = (k+1)^2 \cdot \Sigma \overline{A_1B_1}^2.$$

Dar conform enunțului:

$$\Sigma \overline{AB}^2 = L^2 \quad ; \quad \Sigma \overline{AC}^2 = D^2 \quad ; \quad \Sigma \overline{A_1B_1}^2 = L_1^2$$

și deci

$$(1-k)L^2 + k(k-1)L^2 + kD^2 = (k+1)^2 L_1^2$$

sau

$$(k-1)^2 \cdot L^2 + kD^2 = (k+1)^2 L_1^2$$

care este relațiunea ce trebuia demonstrată.

*Observațiune.*

Maximul lui $L_1^2$, când $k$ variază, are loc pentru $k = 1$, adică punctele $A_1$, $B_1$, ... se află la mijlocul laturilor poligonului.

O. OR.

PROBLEMA 3952. *Trouver un entier de quatre ciffres sachant qu'il est égal à* m *fois le produit de deux nombres formés par ses deux ciffres à gauche et par ses deux ciffres à droite,* m *étant un nombre entier.*

V. THÉBAULT.

*Soluție* dată de D-nii: N. N. ALDEA, (Student București); ȘT. E. OLTEANU, (Șc. Politecnică București); HAR. P. IONESCU-BISS, (Student București); VARLAM M. PETRE, (Lic. M. Eminescu București).

Fie $10^2M + N$ numărul căutat, M și N fiind numere de două cifre. Trebuie să avem:

$$10^2M + N = m \cdot M \cdot N$$

sau:

$$10^2 = \frac{N}{M}(mM - 1).$$

Cum $mM - 1$ și M sunt numere prime între ele, rezultă că trebuie să avem:

$$\frac{N}{M} = k,$$

$k$ fiind întreg, mai mic sau cel mult egal cu 9. ($k \leqslant 9$) căci M este de două cifre ca și N. Pe de altă parte $k$ trebuie să fie un divizor al lui $10^2$, deci

$$k = 1 \; ; \; 2 \; ; \; 4 \; ; \; 5.$$

1°) $k = 1$; $101 = mM$ nici o soluție căci 101 este număr prim

2°) $k = 2$; $51 = mM$ $\begin{cases} m=1 \; M=51 \; N=102 \text{ imposibil, N fiind de 3 cifre} \\ m=3 \; M=17 \; N=34 \text{ Soluție: } 1734 \end{cases}$

3°) $k = 4$; $26 = mM$ $m=2 \; M=13 \; N=52$ „ 1352

4°) $k = 5$; $25 = mM$ $m=1 \; M=25 \; N=105$ imposibil.

Deci soluțiile problemei sunt: *1352* și *1734*.

D-nul AL. HALPERIN a găsit pe o cale puțin riguroasă soluția 1734.

D-nul VICTOR I. IONESCU a găsit 11 soluții în care M este de o cifră, dar în cazul problemei nu găsește decât soluția 1352.

N. C.

*PROBLEMA 4015. *Fie triunghiul* ABC. *Un cerc ce trece prin* B *şi* C *taie pe* AB *în* $C_1$ *iar pe* AC *în* $B_1$. *Dreptele* $BB_1$ *şi* $CC_1$ *se taie în* I *iar dreapta* AI *taie pe* BC *în* $A_1$. *Cercul* $A_1B_1C_1$ *taie a doua oară laturile triunghiului* ABC *în* $A_2B_2C_2$.

*Să se demonstreze că :*

*1°.* $\overline{B_2C_2}$ *este paralelă cu* $\overline{BC}$.

*2°.* $A_2$ *este mijlocul laturei* BC.

SUBLT. I. GH. ZAMFIRESCU.

*Soluţie* dată de D-nii : N. N. MIHĂILEANU (Constanţa); N. PATRAULEA (Elev cl. VI Lic. Militar «Mânăstirea Dealu») şi M. POPESCU-STĂNEŞTI (Cl. VI Lic. Sf. Iosif).

Considerăm patrulaterul $B_1C_1BC$, care fiind inscriptibil rezultă că :

$$\sphericalangle AC_1B_1 = \overset{\frown}{C}$$

şi patrulaterul $B_1C_1C_2B_2$, înscris în cercul $A_1B_1C_1$, din care reiese că :

$$\sphericalangle AC_1B_1 = \sphericalangle B_1B_2C_2.$$

Comparând aceste două egalităţi, vom scrie :

$$\sphericalangle B_1B_2C_2 = \sphericalangle C$$

adică $\overline{B_2C_2}$ este paralelă cu $\overline{BC}$ şi prima parte a problemei este demonstrată.

Inainte de a trece mai departe vom da o altă soluţie acestei prime părţi şi anume vom scrie pe rând puterea punctului A faţă de ambele cercuri. Avem :

$$AB_1 \cdot AC = AC_1 \cdot AB$$

$$AB_1 \cdot AB_2 = AC_1 \cdot AC_2$$

şi din împărţirea membru cu membru a acestor egalităţi rezultă :

$$\frac{AB_2}{AC} = \frac{AC_2}{AB}$$

c. c. t. d.

Această soluţie indică în mod evident că paralelismul celor două laturi subzistă pentru orice cerc care trece prin punctele $B_1C_1$.

Partea a doua a problemei se demonstrează astfel :

Puterea lui B față de cercul $A_1B_1C_1$ este:

(1) $$BC_2 . BC_1 = BA_1 . BA_2.$$

Puterea lui C față de același cerc este:

(2) $$CA_2 . CA_1 = CB_2 . CB_1.$$

In triunghiul ABC dreptele concurente $AA_1$, $BB_1$ și $CC_1$ ne dau:

(3) $$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = -1.$$

Din împărțirea lui (1) cu (2) și din compararea acestui rezultat — aranjat convenabil — cu (3) rezultă:

(4) $$\frac{BC_2}{CB_2} \cdot \frac{CA_2}{BA_2} = -\frac{B_1A}{C_1A}$$

și cum pe de o parte:

$$\frac{BC_2}{CB_2} = \frac{AC_2}{AB_2}$$

iar pe de alta:

$$AC_1 . AC_2 = AB_1 . AB_2$$

prin înlocuirile necesare, (4) se reduce la:

$$\frac{CA_2}{BA_2} = -1$$

sau:

$$CA_2 = BA_2$$

adică $A_2$ se găsește la mijlocul lui BC și problema este astfel rezolvată complet.

*Observări:* 1°. D-nii N. Patraulea și M. Popescu-Stănești au remarcat că cercul $A_1B_1C_1$ se reduce la cercul lui Euler, atunci când BC este diametrul cercului $BCB_1C_1$.

2°. D-l Sublt. I. Gh. Zamfirescu, propunătorul problemei completează construcția astfel:

$C_1B_1$ taie pe BC în A'. O secantă dusă din A, taie cercul în N și M iar alta din A' în N' și M'. Dreapta AI taie pe $B_1C_1$ în $A_3$ iar A'I pe $B_1C$ în $A'_3$ și pe $BC_1$ în $A'_1$. Fie $A'_2$; $A_4$ și $A'_4$ respectiv mijloacele lui $BC_1$; $C_1B_1$ și $B_1C$. Restul notațiilor cele din problemă. Observă că:

*a)* Patrulaterele $A_1A_2M'N'$ și $A'_1A'_2MN$ sunt inscriptibile. In adevăr:

$A'A_1 . A'A_2 = A'B_1 . A'C_1 = AN' . AM'$ și $AA'_1 . AA'_2 = AB_1 . AC = AN . AM.$

*b)* Patrulaterele $A_1A_2A_3A_4$ și $A'_1A'_2A'_3A'_4$ sunt inscriptibile.

Se aplică construcţia enunţului problemei propuse triunghiului $AB_1C_1$ încât $A_3A_4BC$ se va găsi pe acelaşi cerc şi vom avea :

$$A'A_1 \cdot A'A_2 = AN' \cdot AM' = AC \cdot AB = A'A_3 \cdot A'A_4.$$

La fel se arată pentru $A'_1A'_2A'_3A'_4$, considerând triunghiul $A'B_1C$.

*c)* Patrulaterele $A_3A_4M'N'$ şi $A'_3A'_4MN$ sunt inscriptibile.

Este o consecinţă a egalităţilor de sub (*b*).

*d)* Punctele A şi A' sunt centrele radicale ale celor două serii de cercuri circumscrise celor două serii de patrulatere menţionate deoarece aceste puncte au aceiaşi putere faţă de fiecare.

3°. Observ că $B_1C_1$ este prin construcţie paralelă la latura respectivă a triunghiului ortic a triunghiului ABC. Repetând construcţia din problemă pe rând pentru celelalte două laturi ale triunghiului ABC vom obţine o serie de trei cercuri, cari sunt tăiate fiecare de cercul lui EULER în mijlocul laturei corespunzătoare a triunghiului de referinţă. Vom obţine de asemenea încă două puncte similare lui I; cele 3 cercuri se confundă cu cercul lui EULER când $B_1C_1$ şi similarele, deplasându-se paralel cu ele înşi-le vin în poziţia respectivă a laturilor triunghiului ortic iar cele trei puncte I se confundă în ortocentrul H al triunghiului ABC în acest caz.

CPT. GH. N.

---

PROBLEMA 4051. *Care din expresiunile :*

$$\frac{2,44}{1,2} + \sqrt{\frac{2}{2,44}}, \quad \frac{2,69}{1,3} + \sqrt{\frac{2}{2,69}}, \quad \frac{2,96}{1,4} + \sqrt{\frac{2}{2,96}}.$$

*este cea mai mare şi care este cea mai mică?*

I. IONESCU.

*Soluţie* dată de D-ra MARIOARA C. SAVIN (Liceul «Oltea Doamna» Iaşi).

Făcând calculele, găsim la prima expresiune :

$$2,44 : 1,2 = 2,0333\ldots, \quad 2,0000\ldots : 2,44 = 0,8196\ldots$$

$$\sqrt{0,8196} = 0,9053. \quad \therefore \quad 2,0333\ldots + 0,9053. = 2,938\ldots$$

La a doua expresiune :

$$2,69 : 1,3 = 2,0962\ldots, \quad 2,0000, : 2,69 = 0,7434\ldots$$

$$\sqrt{0,7434} = 0,8622. \quad \therefore \quad 2,0692. + 0,8622. = 2,931\ldots$$

La a treia expresiune :

$$2{,}96 : 4 = 2{,}1142\,. \quad , \quad 2{,}0000\,. : 2{,}96 = 0{,}6756\,.$$

$$\sqrt{0{,}6756\,.} = 0{,}8219\,. \quad \therefore \quad 2{,}1142\,. + 0{,}8219\,. = 2{,}936\,..$$

Comparând valorile găsite deducem că prima expresiune este cea mai mare şi a doua cea mai mică.

D-nii: E. MEREUŢĂ şi P. N. POPESCU (Studenţi) au făcut calculele radicalelor cu logaritmi şi au găsit rezultatele de mai sus.

*Notă.* Problema se poate considera ca consecinţă a problemei No. 4098 propusă în acest număr.

I. I.

## *EXERCIŢII

12. Care e valoarea lui :

$$\mathrm{L}\,(-i)^{ni} ?$$

HARALAMB P. IONESCU-BISS.

R. Avem :

$$(-i)^{ni} = \left(\frac{1}{i}\right)^{-n\frac{1}{i}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{i}\right)^{n\frac{1}{i}}} = \sqrt[i]{i^n}$$

dar

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\therefore \quad i^n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$$

$$\sqrt[i]{i^n} = e^{n\frac{\pi}{2}} = (-i)^{ni}$$

$$\therefore \quad \mathrm{L}\,(-i)^{ni} = n\frac{\pi}{2}\,.$$

13. Intr'un triunghiu oarecare avem relaţia

$$s = \tfrac{1}{2}\sqrt{2R\ h_a\ h_b\ h_c}\ .$$

C. N. Avram.

R. Avem $h_a = \dfrac{2S}{a}$, etc....; deci $h_a \,.\, h_b \,.\, h_c = \dfrac{8s^3}{abc}$,

şi deoarece

$$R = \frac{abc}{4s}, \qquad \text{rezultă} \qquad h_a \,.\, h_b \,.\, h_c = \frac{2s^2}{R},$$

de unde se scoate relaţia din enunţ.

14. Se cere maximul funcţiei:

$$y = \frac{\sin mx}{\sin nx}\ .$$

Ion C. Vasiliu.

R. Maximul are loc pentru valorile lui $x$ date de ecuaţia:

$$\frac{m}{\operatorname{tg} mx} = \frac{n}{\operatorname{tg} nx}\ .$$

15. Dacă $S_c$ e suprafaţa lunulei lui Hippocrat corespunzătoare catetei $c$, să se arate că

$$\lim_{c=0} \frac{S_c}{c} = \frac{2\pi - 3}{4}\, a.$$

Ion C. Vasiliu.

R. Se găseşte

$$S_c = a^2 \,.\, \frac{2\pi \sin C - 4\, c + \sin C \cos C}{4}$$

$$\therefore \quad \lim_{c=0} \frac{S_c}{c} \lim_{c=0} \frac{S_c}{c} = \frac{2\pi - 3}{4}\, a.$$

16. Printre sectoarele circulare de aceiaşi suprafaţă, să se determine cel de un perimetru total minimum.

Ion C. Vasiliu.

R. Dacă suprafaţa e constantă şi egală cu $k$, se găseşte că

$$p = 2x\left(1 + \frac{k}{x^2}\right)$$

care este minim pentru $x = \sqrt{k}$

$$\therefore \quad p_{min} = 4\sqrt{k}\ .$$

17. Când paralelele duse printr'un punct depe latura BC la AB, AC, formează cu acestea un paralelogram maximum ?

ION C. VASILIU.

R. Luând ca axe pe AC, AB, aşa că AC = $b$ AB = $c$, se găseşte

$$S_{max} = \frac{b^3\, c^3\, \sin A}{(b^2 + c^2)^2}\,.$$

18. Dintre toate trapezele isoscele de perimetru constant, în cari unghiul de bază e dat, să se găsească cel de suprafaţă maximă.

ION C. VASILIU.

R. Dacă $p$ este semiperimetrul, iar $\alpha$ unghiul dat, se găseşte pe cale elementară că :

$$S_{maximum} = \frac{p^2 \sin\alpha}{4}\,.$$

19. Să se afle limita expresiei :

$$\left(\frac{n+a}{n-a+b}\right)^n$$

când $n$ tinde către infinit, $a$, $b$, fiind două constante.

HARALAMB P. IONESCU-BISS.

R. Avem:

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{n+a}{n-a+b}\right)^n = \lim_{n=\infty}\left(\frac{2a-b}{n-a+b}+1\right)^n$$

$$= \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{2a-b}{n-a+b}\right)^{n+a-b}\cdot\left(1+\frac{2a-b}{n-a+b}\right)^{a-b} = e^{2a-b}\,.$$

20. Să se găsiască maximul distanţei dela origină la curba

$$ax^4 + by^4 = c.$$

ION C. VASILIU.

R. Se găseşte cu ajutorul diferenţialelor totale :

$$d^2_{max} = (a^2 + b^2)\sqrt{\frac{c}{ab\,(a+b)}}\,.$$

## PROBLEME PROPUSE

*4091. Să se arate că numerele:

$$N_1 = (19^{2m+1} + 23^{2m+1})\,(21^{2n+1} + 25^{2n+1})$$

$$N_2 = 3^{2m+1} \cdot 13^{2n} \cdot 11^{2m+1} + 13^{2(m+n)+1} - 3^{2m+1} \cdot 11^{2m+1} - 13^{2m+1}$$

sunt divizibile cu 1932, oricari ar fi întregii $m$ şi $n$.

N. C.

*4092. Dintre toate numerele de patru cifre, de una din formele:

$$2n\,(n+1)\,(4n-1) \quad ; \quad n\,(n+5)\,(3n+2) \quad ; \quad 4n\,(n-2)$$

numai numărul 1932 verifică egalităţile:

$$\begin{cases} 2\,(10a + b) = (10\,c + d) + c \times d \\ b = c\,(a + d) \end{cases}$$

unde $a$, $b$, $c$ şi $d$ sunt cifrele numerelor de forma indicată.

Căpitan Gh. Niculescu.

4093. Dacă $p$ este număr prim, iar A, $m$ şi $n$ numere întregi ce satisfac condiţiile:

$$(m+1)\,n = M\,(p-1) \qquad \text{şi} \qquad A^n - 1 \neq Mp\,;$$

să se arate că totdeauna avem:

$$A + A^{n+1} + A^{2n+1} + A^{3n+1} + \ldots + A^{mn+1} = Mp.$$

Să se facă o aplicaţie numerică.

Căpitan Gr. Zapan.

4094. On désigne par S, S′, S″ les aires des pentagones régulier, étoilé et du pentagone convexe déterminé par les diagonales $AC = CE = EB = BD = DA = d$ d'un pentagone régulier ABCDE inscrit dans un cercle de rayon R. Démontrer la relation:

$$5d^3 = 4R\,(3S + S' + S'').$$

V. Thébault.

4095. Se dau în plan două puncte fixe A, B, o dreaptă $\Delta$ şi un punct M mobil pe $\Delta$. Fie $\Delta'$ simetrica dreptei $\Delta$ faţă de MA. Se cere locul proecţiei lui B pe $\Delta'$.

Col. Gh. Buicliu.

4096. Prin punctul O de întâlnire al diagonalelor unui patrulater ABCD se duc două drepte, care întâlnesc laturile AB, BC, CD, DA respectiv în punctele A', B', C', D'. Să se demonstreze că dacă punctul O împarte diagonala AC în două părți egale, atunci avem:

$$\frac{A'A}{A'B} \cdot \frac{B'B}{B'C} = \frac{C'C}{C'D} \cdot \frac{D'D}{D'A}.$$

Gh. Zapan.

*4097. Intr'un cerc dat, de diametru AB, se duce secanta AC care face unghiul $x$ cu diametrul. Prin punctul D, mijlocul razei OB, se duce secanta CD, ce taie cercul în G.

Să se afle elementele triunghiului ACG în funcție de raza cercului și unghiul $x$.

Iuliu Deac.

4098. Să se studieze variațiunea funcțiunii:

$$y = (1 + x^2)/x + \sqrt{2/(1 + x^2)}.$$

I. Ionescu.

4099. Să se rezolve, în numere întregi și pozitive, ecuația

$$\frac{x!\,(x+y+1)!}{x(2-1)\ldots 1 + (x+1)\ldots 3.2 + \ldots + (x+y)\ldots x+1)} = 720.$$

C. Popovici.

*4100. Ce relație există între laturile unui triunghiu ABC ale cărui unghiuri satisfac relațiunea

$$2\cos A + \cos B + \cos C = 2.$$

Șt. E. Olteanu.

---

*ERATĂ.* Atât în *Gazeta Matematică* anul XXXVI pag. 14, cât și în anul XXXVII pag 14 s'a dat eronat data morții regretatului profesor Traian Dordea. In loc de 30 Aprilie 1930 trebuie pus 23 Aprilie 1930.

H. P. Ionescu

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

---

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Abramescu Mariana* (4082, 86); *Aldea N. N.* (4078, 87); *Boldea Gh.* (4083, 87); *Cârstoiu D. I.* (3965, 77, 84, 4015, 20); *Fabius Dorina* (4065); *Gheorghiu C. Adrian* (1753, 2695); *Leber Margareta* (4065); *Mihăileanu N. N.* (3459, 88, 958, 74, 4020, 46, 83, 87, 88, 89, N, P); *N. M.* (3936); *Negrea A. M. Leonte* (4078); *Olteanu Ştefan* (4065, P); *Patrulea N. N.* (3969); *Petrescu I. Ioan* (3977, 4065); *Popescu I. Mihail* (4065); *Roşca St. G.* (4021, 78); *Savin C. I. Subloc.* (3968, 88, 95, 4027, 78, P); *Şova-Grigoreni C. I.* (3968); *Thèbault V.* (N, P); *Zamfirescu I. Locot.* (4072, P); *Zane D. N.* (4052).

---

*Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

---

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

---

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

# Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani compleţi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

**La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călugărei 23, Bucureşti 4.**

# GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAȚIUNII" * SIBIIU *

ANUL XXXVII

NUMĂRUL 6. — FEVRUARIE 1932

SUMARUL

1. Asupra limitării rădăcinilor unei clase de ecuaţii algebrice . . . . . . . . . *N. Ciorănescu.*
2. *Soluţiuni întregi ale ecuaţiunii $\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k = 0$ . . . . . . . . . *Gh. Constantinescu.*
3. Note matematice: 20 — 22.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 214.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 2656, 3799, 3847, 4011, 4012, 4021, 4040.
9. Exerciţii: 21 — 22.
10. Probleme propuse: 4101 — 4110.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1932

# SPRE ȘTIINȚA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în București, compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație de 3 membri, care pentru anul XXXVII se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orășanu**, Inginer, Licențiat în Matematici, Conferențiar la Școala Politechnică «Regele Carol II» din București, Profesor la Școalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Șef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, București 6.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor redija în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 București 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poștă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evità confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 405, 22, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 80, 84, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 72, 76, 83, 87, 4010, 13, 24, 30, 31, 34, 35, 44, 45, 48, 53, 56, 57, 59, 62, 66, 68, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 79, 80, 81, 84, 85, 90, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10.

Enunțurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. București 1), cu prețul de 12 lei.

# ASUPRA LIMITĂRII RĂDĂCINILOR UNEI CLASE DE ECUAȚII ALGEBRICE

In No. 4 Vol. XXXVII, pag. 128 al «G. M.», D-l P. SERGESCU relatează o ședință a seminarului de matematică al Universității din Cluj și generalizările la care s'a ajuns pornind dela o problemă elementară. Vreau să mă opresc puțin asupra rezultatelor obținute și să arăt că ele sunt conținute în o teoremă generală datorită lui CAUCHY. Iată acea teoremă:

Fiind dată ecuația:

$$(1) \quad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

rădăcinile ei sunt inferioare în modul rădăcinei pozitive $\alpha_M$ a ecuației:

$$(2) \quad f(\rho) \equiv \rho^n - |a_1|\rho^{n-1} - |a_2|\rho^{n-2} - |a_3|\rho^{n-3} - \ldots - |a_{n-1}|\rho - |a_n| = 0.$$

Se demonstrează încă [1]), în mod elementar de altfel, că această limită superioară a rădăcinilor ecuației (1) este cea mai bună ce se poate obține, atunci când se ține seama numai de modulul coeficienților ecuației (1), fără a face alte ipoteze asupra lor.

Să considerăm acum ecuația:

$$(3) \quad Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + K = 0$$

și să facem pe rând următoarele ipoteze considerate în articolul citat:

$$(a) \quad |A| \geqslant |B| + |C| + \ldots + |K|.$$

Rezultă deci că între coeficienții ecuației (1), cu care am identificat ecuația (3), avem inegalitatea:

$$(4) \quad |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \leqslant 1.$$

Rezultă deci că $f(1) \geqslant 0$ și prin urmare rădăcina $\alpha_M$ a ecuației (3) este cuprinsă între zero și unu: $\alpha_M \leqslant 1$. Dacă în (4) avem chiar egalitate, atunci $\alpha_M = 1$ și există ecuații pentru care această limită este atinsă, cum de altfel se arată în articolul citat la început. Fie a doua ipoteză asupra coeficienților ecuației (3), anume:

$$|A| > |B|; |A| > |C|; \ldots |A| > |K|.$$

1) A. LOMNICKI: Sur les méthodes qui servent à limiter supérieurement les modules des racines des éq. alg. — *L'Enseignement Mathématique* 1925, pag. 84.

Aceasta înseamnă că pentru coeficienții ecuației (1) avem inegalitățile:

$$| a_p | < 1 \qquad (p = 1,2, \ldots n).$$

Prin urmare, în acest caz, rădăcina pozitivă $\alpha_M$ a ecuației (2) este mai mică decât rădăcina pozitivă a ecuației:

$$(5) \qquad \rho^n - (\rho^{n-1} + \rho^{n-2} + \ldots + \rho + 1) = 0$$

ce se obține din (2) înlocuind toți coeficienții $| a_p |$ prin limita lor superioară. Dar se vede ușor că rădăcina pozitivă a ecuației (5) este mai mică decât 2, deci $\alpha_M < 2$. Rezultatul acesta se menține chiar în ipoteza $| a_p | \leqslant 1$. Limitațiile astfel obținute sunt, cum am spus, cele mai bune ce se pot obține dacă ne mărginim să facem ipoteze numai asupra $| a_p |$.

N. CIORĂNESCU.

## *SOLUȚIUNI INTREGI ALE ECUAȚIUNII

$$\sum_{\substack{i=1 \\ k=1}}^{n} a_{ik} x_i x_k = 0$$

Împărțind ecuația cu $x_n^2$ și punând pe $\frac{x_i}{x_n} = X_i$ ecuația devine:

$$(1) \qquad \sum_{\substack{i=1 \\ k=1}}^{n-1} a_{ik} X_i X_k + 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} X_i + a_{nn} = 0.$$

Fie $b_1$, $b_2 \ldots b_{n-1}$ o soluție particulară a ec. (1) și punem:

$$(2) \qquad \frac{X_1 - b_1}{\alpha_1} = \frac{X_2 - b_2}{\alpha_2} = \ldots \frac{X_{n-1} - b_{n-1}}{\alpha_{n-1}} = \rho$$

unde $\alpha_1$, $\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ sunt parametrii arbitrari întregi, iar $\rho$ este un număr rațional.

Din (2) deducem:

$$(3) \qquad X_h = b_h - \alpha_h \rho.$$

Înlocuind pe $X_h$ cu valoarea sa dată de (3) găsim:

$$(4) \qquad \sum_{\substack{i=1 \\ k=1}}^{n-1} \alpha_{ik} (b_i + \alpha_i \rho)(b_k + \alpha_k \rho) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in} (b_i + \alpha_i \rho) + \alpha_{nn} = 0.$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

Ţinând seamă că $b_1$ , $b_2 \ldots b_{n-1}$ este o soluţie particulară a ec. (1) şi după ce am simplificat cu $\rho$, ecuaţia (4) devine:

$$(5) \quad \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n-1} a_{ik}\,(b_i\,\alpha_k + b_k\,\alpha_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{ik}\,\alpha_i + \rho\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n-1} a_{ik}\,\alpha_i\,\alpha_k = 0$$

din care deducem valoarea lui $\rho$:

$$(6) \quad \rho = -\frac{\sum_{i=1\ k=1}^{n-1} a_{ik}\,(b_i\,\alpha_k + b_k\,\alpha_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{ik}\,\alpha_i}{\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n-1} a_{ik}\,\alpha_i\,\alpha_k}$$

şi deci valoarea lui $X_h$ va fi:

$$X_h = \frac{b_h\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n-1} a_{ik}\,\alpha_i\,\alpha_k - \alpha_h\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n-1} a_{ik}\,b_i\,\alpha_k + b_i\,\alpha_i\,(-2\,\alpha_h)}{\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n-1} a_{ik}\,\alpha_i\,\alpha_k}$$

şi cum: $X_n = \frac{x_n}{x_n}$ putem pune:

$$x_h\,b_h\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n-1} a_{ik}\,\alpha_i\,\alpha_k - \alpha_h\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n-1} a_{ik}\,(b_i\,\alpha_k + b_k\,\alpha_i)$$

$- 2\alpha_h\sum_{i=1}^{n-1} a_{ik}\,\alpha_i$ unde $h$ variază dela 1 până la $n-1$, *în* $x_h = \Sigma\, a_{ik}\,\alpha_i\,\alpha_k$ care sânt soluţii ale ec. date depinzând de $n-1$ parametrii arbitrari.

*Aplicaţie.* Să se găsească soluţiuni întregi ale ecuaţiei (1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots y_m^2$ (chestiune tratată în G. M. anul XXXII numărul 7 şi 8 de Em. Ştefănescu).

Putem presupune că $n \geqslant m$, în caz contrar schimbăm membrii între ei.

Impărţim ec. cu $x_n^2$ şi punem pe $\frac{x_i}{x_n} = X_i$ şi $\frac{y_i}{X_n} = y_i$ ecuaţia devine (2) $X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_{n-1}^2 + X_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots y_{m-1}^2 + 1$.

Cum $n \geqslant m$ putem pune $n = m + p$ şi ecuaţia (2) are ca soluţie particulară pe $X_i = y_i = \gamma_i$ unde $i = (1, 2, 3, \ldots m-1)$ $X_m = 1$ şi $X_{m+1} = X_{m+2} \ldots = X_n = 0$.

Punem pe $\frac{X_i - \gamma_i}{\alpha_i} = \rho \quad \frac{y_i - \gamma_i}{\beta_i} = \rho \quad i = (1, 2, 3, \ldots m-1)$

$$\frac{X_{m-1}}{\alpha_m} = 1 \quad \text{şi} \quad \frac{X_{m+1}}{\alpha_{m+1}} = \frac{X_{m+2}}{\alpha_{m+2}} = \ldots \frac{X_n}{\alpha_n} = \rho.$$

Inlocuim în (2) pe $X_i$ şi $y_i$ cu valorile lor scoase din (4) şi simplificând cu $\rho$ găsim:

$$\rho = \frac{\sum_{1}^{m-1} \gamma_i (\beta_i - \alpha_i) - \alpha_m}{\sum_{1}^{n} \alpha_i^2 - \sum_{1}^{m-1} \beta_i^2}.$$

Inlocuind valoarea lui $\rho$ în formulele (4) găsim:

$$x_h = \gamma_n \left( \sum_{1}^{n} \alpha_i^2 - \sum_{1}^{m-1} \beta_i^2 \right) + 2\alpha_n \sum_{1}^{m-1} \gamma_i (\beta_i - \alpha_i)$$

$$- 2\alpha_h \alpha_m \qquad h = (1 \ldots m-1)$$

$$X_m = \sum_{1}^{n} \alpha_i^2 - \sum_{1}^{m-1} \beta_i^2 + 2\alpha_m \sum_{1}^{m-1} \gamma_i (\beta_i - \alpha_i) - 2\alpha_m^2$$

$$X_k = 2\alpha_k \sum_{1}^{m-1} \gamma_i (\beta_i - \alpha_i) - 2\alpha_k \alpha_m$$

unde $k = (m+1, m+2 \ldots n)$

$$x_n = \sum_{1}^{n} \alpha_i^2 - \sum_{1}^{m-1} \beta_i^2$$

$$yl = \gamma l \left( \sum_{1}^{n} \alpha_i^2 - \sum_{1}^{m-1} \beta_i^2 \right) + 2\beta_l \sum_{1}^{m-1} \gamma_i (\beta_i - \alpha_i) -$$

$$2\beta_l \alpha_m \quad \text{unde} \quad l = (1, 2, \ldots m-1).$$

Aplicând aceste rezultate în exemplele notate în G. M. avem:

1) Ecuaţia $y^2 + z^2 + u^2 = x^2$ are ca soluţii:

$$x = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$$

$$y = \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1^2$$

$$z = -2\alpha_1\alpha_2$$

$$u = -2\alpha_1\alpha_3.$$

2) Ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2$ are ca soluţii:

$$x = \gamma(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \beta\alpha_1 - \beta^2) - 2\alpha_1\alpha_2$$
$$y = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \beta^2 + 2\gamma\beta\alpha_2 - 2\gamma\alpha_1\alpha_2$$
$$z = \alpha_3(2\gamma\beta - 2\gamma\alpha_1 - 2\alpha_2$$
$$u = \gamma(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \beta^2 - 2\alpha_1\beta) = 2\alpha_2\beta$$
$$v = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \beta^2.$$

3) Ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + t^2$ are ca soluţii:

$$x = \gamma_1(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + 2\beta_1\alpha_1) + 2\gamma_2\beta_2\alpha_1 - 2\gamma_2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_3$$
$$y = \gamma_2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + 2\beta_2\alpha_2) + 2\gamma_1\beta_1\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_2\gamma_1 - 2\alpha_2\alpha_3$$
$$z = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + 2\gamma_1\beta_1\alpha_3 + 2\gamma_2\beta_2\alpha_3 - 2\gamma\alpha_1\alpha_3 - 2\gamma_2\alpha_2\alpha_3$$
$$u = \gamma_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2 - 2\alpha_1\beta_1) + 2\gamma_2\beta_1\beta_2 - 2\gamma_2\alpha_2\beta_1 - 2\alpha_3\beta_1$$
$$v = \gamma_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\alpha_1\beta_2) + 2\gamma_1\beta_1\beta_2 - 2\gamma_1\alpha_1\beta_2 - 2\alpha_3\beta_2$$
$$t = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2.$$

Toate formulele de mai sus, nu reprezintă soluţiile generale ale ecuaţiilor date, dar sânt mai generale decât cele găsite în G. M.

GH. CONSTANTINESCU
Profesor.

## NOTE MATEMATICE

20. *Curiosités aritmétiques.* — 1. Les nombres

1002, 1008, 1018, 1275, 2001, 2004, 2009, 3006, 3024,

sont les seuls de *quatre* chiffres dont les carrés soient formés de trois carrés, (différents de zéro), l'un de *un* chiffre, les autres de *trois* chiffres.

Les nombres

4002, 4018, 5010, 6003, 6012, 6027, 7014, 8001, 8004, 8009, 8016, 8025, 9002, 9008, 9018,

sont les seuls de *quatre* chiffres dont les carrés soient formés de *trois* carrés, (différents de zéro), l'un de *deux* chiffres, les autres de *trois* chiffres.

2. Voici les entiers de *quatre* ciffres dont les carrés s'écrivent avec *sept* chiffres, tous différents, aucun n'étant zéro.

1113, 1176, 1328, 1541, 1593, 1816, 1866, 1896, 1964, 2277, 2322, 2382, 2414, 2439, 2527, 2529, 2557, 2618, 2672, 2686, 2711, 2727, 2731, 2866, 2884, 2911, 2927, 3041, 3059, 3111, 3142.

Parmi ces nombres, les carrés des suivants s'écrivent avec les mêmes chiffres.

1176 et 1193; 1328 et 2731; 1593, 2382 et 2727; 1816, 1964 et 2414; 1866, 2322 et 2529; 2277 et 2439; 2557 et 2618; 2672 et 3059; 2527, 2927 et 3094; 3041 et 3142.

3. Les entiers de *quatre* chiffres dont les carrés s'écrivent avec *huit* chiffres *différents*, autres que zéro, sont

3674, 3678, 3734, 4663, 4814, 4913, 5904, 6043, 6176, 6464, 6476, 6737, 6763, 6811, 7237, 7363, 8082, 8559, 8623, 9024, 9118.

Les carrés de ceux qui suivent ont les mêmes chiffres:

**3674 et 3678; 8082, 8559 et 9024.**

4. Un seul carré de huit chiffres *ab cd ef gh* est tel que les entiers *ab, cd, ef, gh,* soient des carrés:

$$\overline{6041}^2 = 36\ 49\ 36\ 81\ ^{1}).$$

Un seul, *abcd ef gh,* est tel que *abcd, ef gh,* soient des carrés:

$$\overline{4901}^2 = 2401\ 9801\ ^{2}).$$

Les quatre chiffres consécutifs des carrés suivants forment deux entiers consécutifs:

$$\overline{7810}^2 = 6099\ 6100;\ 9079^2 = 8242\ 8241;\ 9901^2 = 98029801.$$

5. Voici deux cubes de neuf chiffres assez curieux:

$$\overline{585}^3 = 200\ 201\ 625;\ \overline{839}^3 = 590\ 589\ 719.$$

Les deux tranches de trois chiffres, à gauche, sont deux entiers *consécutifs*.

V. THÉBAULT
(Le Mans, France).

---

[1]) T. ROSE, *Mathesis*, 1931 — 260.
[2]) V. THÉBAULT, *Education mathématique*, 14-e année — 168.

21. *Patratele de patru cifre la care suma primelor două cifre egalează suma ultimelor două.*

Această problemă a fost tratată de D-l V. THÉBAULT la pag. 41 — 44 din acest an. Iată o soluţie care cere mai puţine încercări. Fie *abcd* patratul cerut la care $a + b = c + d$. Terminaţiile *cd* se cunosc. Le scrim în prima coloană. Facem apoi suma $(c + d)$, apoi suma $(a + b + c + d) = 2\,(c + d)$ şi căutăm restul împărţirii prin 9 al acestei sume. Avem:

| $cd = 00$ | $c + d = 0$ | $a+b+c+d=0$ | $= \mathcal{M}9 + 0$ |
|---|---|---|---|
| 01 | 1 | 2 | 2 |
| 21 | 3 | 6 | 6 |
| 41 | 5 | 10 | 1 |
| 61 | 7 | 14 | 5 |
| 81 | 9 | 18 | 0 |
| 04 | 4 | 8 | 8 |
| 24 | 6 | 12 | 3 |
| 44 | 8 | 16 | 7 |
| 64 | 10 | 20 | 2 |
| 84 | 12 | 24 | 6 |
| 25 | 7 | 14 | 5 |
| 16 | 7 | 14 | 5 |
| 36 | 9 | 18 | 0 |
| 56 | 11 | 22 | 4 |
| 76 | 13 | 26 | 8 |
| 96 | 15 | 34 | 7 |
| 09 | 9 | 18 | 0 |
| 29 | 11 | 22 | 4 |
| 49 | 13 | 26 | 8 |
| 69 | 15 | 30 | 3 |
| 89 | 17 | 34 | 7 |

Un patrat împărţit prin 9 nu poate da decât resturile 0, 1, 4, 7. Deci din toate terminaţiunile de patrate nu rămân de cercetat decât 00, 41, 81, 44, 36, 56, 96, 09, 29, 89. Prima nu e admisibilă, căci cere $a = b = 0$ şi dă soluţia formală *0000*. Numerele ale căror patrate se termină cu celelalte grupe de cifre sunt respectiv de formele: $\mathcal{M}50 \pm 21$ ; $\mathcal{M}50 \pm 9$ ; $\mathcal{M}50 \pm 12$ ; $\mathcal{M}50 \pm 6$ ; $\mathcal{M}50 \pm 16$ ; $\mathcal{M}50 \pm 14$ ; $\mathcal{M}50 \pm 3$ ; $\mathcal{M}50 \pm 23$ ; $\mathcal{M}50 \pm 17$. Pe de altă parte, patratul având patru cifre, rădăcina lui este un număr de două cifre, mai mare ca 31. Numerele de încercare sunt

dar numai 71, 79; 41, 59, 91; 38, 62, 88; 44, 56, 94; 34, 66, 84; 36, 64, 86; 47, 53, 97; 73, 77; 33, 67, 83. Patratele lor sunt 5041, 6241; 1681, 3481, 8281; 1444, 3844, 7744; 1936, 3136, 8836; 1156, 4356, 7056; 1296, 4096, 7396; 2209, 2809, 9409; 5329, 5929; 1089, 4489, 6889. Dintre toate acestea numai primul *5041* îndeplineşte condiţia $a + b = c + d$ şi este deci unica soluţie a problemei.

Aci sunt date toate încercările necesare.

I. Ionescu.

22. *O axiomă enunţată de* Dimitrie Cantemir.

«Carile sânt tot într'un chip către altul al treilea, tot într'un chip sânt întru sine».

I. I.

# CHESTIUNI DE EXAMEN

## UNIVERSITATEA DIN CLUJ, FACULTATEA DE ŞTIINŢE

*Probele la Examenele din sesiunea Iunie 1931*

### Anul Preparator

### ALGEBRA ELEMENTARĂ

Se ia un cerc cu raza R. Fie un punct P astfel că OP este egal cu $x$. Se duc tangentele în A şi B la cerc. Unim pe A cu B, care dreaptă tae pe OP în C.

1°. Cunoscând R, raza cercului şi distanţa $OP = x$, să se calculeze aria laterală a conului născut prin învârtirea triunghiului ACP în jurul dreptei OP. Să se determine $x$ aşa ca această arie laterală să fie egală cu $2\pi R^2$. Se obţine o ecuaţie de gradul al doilea cu o rădăcină negativă. Să se verifice că această rădăcină schimbată de semn reprezintă distanţa OC.

2°. Să se determine $x$ aşa fel ca aria născută de triunghiul curbilinIu AOM să fie egală cu $\frac{\pi R^2}{2}$. Punctul M este la intersecţia cercului cu dreapta OP.

3°. Să se găsească distanţa CG, G fiind centrul de greutate al patrulaterului OAPB presupus omogen. Să se determine P astfel ca centrul de greutate să fie în C.

## GEOMETRIA ELEMENTARĂ

I. Se dau dreptele OA, OB, OC care fac unghiuri egale AOB = BOC = COA. Dintr'un punct M se lasă pe aceste drepte perpendicularele Mα, Mβ, Mγ.

1° Să se demonstreze că M, α, β, γ sunt pe un cerc.

2°. Triunghiul αβγ este echilateral.

3°. M descriind cercul de centru O şi raza OM = $r$, notând cu $\theta$ unghiul variabil AOM să se calculeze valorile lui Oα şi Oβ in funcţie de $\theta$ şi apoi lungimea αβ. Să se arate că αβ este constantă şi să se verifice acest rezultat şi geometric.

II. Să se demonstreze prin inversiune că cercurile descrise pe coardele AB, AC, AD ale unui cerc, ca diametre, se taie în trei puncte colineare.

## MATEMATICI ELEMENTARE

I. Avem o prismă de sticlă cu baza în formă de triunghiu echilateral, şi cu una din feţe aşezată orizontal. Se trimit pe prismă raze de lumină orizontale şi paralele cu una din feţele prismei; aceste raze trecând prin prismă, se refractă după legea:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n = 1{,}45.$$

In interiorul sticlei razele merg in linie dreaptă. Să se calculeze unghiul de care este derivată raza de lumină după cea trecut prin prismă.

II. Să se calculeze toate valorile arcelor $x$ care satisfac la ecuaţia:

$$5 \sin^2 x = 13 \cos x + 11.$$

ANUL I

## GEOMETRIA ANALITICĂ

*Proba practică*

Se consideră iperbola cu centrul C în punctul (1, 1) cu asimptotele paralele cu bisectoarele axelor şi care trec prin punctul A (0,3).

1°. Prin punctul A se duce o dreaptă de coeficient unghiular 3. Ea taie iperbola intr'un punct B. Se cere polul P al dreptei AB faţă de iperbolă.

2°. Se cere aria triunghiului ABP.

3°. Diametrul conjugat direcţii coardei AB.

4°. Focarele iperbolei.

*Proba teoretică*

Să se afle natura şi ecuaţia redusă a cuadricei:

$$4x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2\sqrt{6}\,xy + \frac{2}{\sqrt{3}}\,xz - \frac{2}{\sqrt{2}}\,yz - \sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y + z = 0.$$

## GEOMETRIA DESCRIPTIVĂ

*Proba practică*

*Intersecția a două cilindre.* Cadrul are dimensiunile orizontală și verticală 270 mm. 420 mm. Linia de pământ este paralelă cu marginea orizontală la distanță de 180 mm. de sus în jos.

Cilindrul $C_1$ are ca bază în planul orizontal cercul cu centrul $O_1(-53,120,0)$ de rază 22 mm. iar generatoarele sunt paralele în proecție orizontală cu tangenta din stânga la cerc, ce trece prin punctul (42, 0, 0) iar în proecție verticală sunt paralele cu dreapta care trece prin (— 80, 0, 0) și (42, 0, 142). Cilindrul $C_2$ are ca bază în planul orizontal cercul cu centrul în $O_2$ (38, 146, 0) cu raza de 35 mm. și cu generatoarele paralele în proecție orizontală cu tangenta din stânga care trece prin punctul (— 86, 0, 0) iar în proecție verticală cu dreapta care trece prin punctele (9, 0, 0) și (— 54, 0, 70). Să se construiască proecțiile secțiunei și să se anexeze o legendă.

*Proba teoretică*

1°. Cadrul are dimensiunile orizontală și verticală 270 mm. și 420 mm. Linia de pământ este paralelă cu marginea orizontală *b*, distanța 180 mm. de sus în jos. Conul are bază în planul orizontal cercul cu centrul în (36, 45, 0) raza de 36 mm. iar vârful $(s, s')$, (13, 100, 45). Planul taie linia de pământ în punctul (—50, 0, 0) urma orizontală trece prin punctul (0, 62, 0), iar cea verticală prin (0,0, 28). Să se afle doi diametrii conjugați ai secțiunei, un diametru pentru proecția orizontală a secțiunii fiind frontal. Să se construiască proiecțiile secțiunei și să se anexeze o legendă.

2°. Teorema lui DANDELIN relativă la secțiunea unui con cu un plan. Studiul diferitelor cazuri. Discuție. Determinarea elementelor secțiunei.

## MATEMATICI GENERALE

*Proba teoretică*

1°. Să se găsească valorile externe ale funcțiunei

$$y = \frac{x^2 + x - 4}{x + 1} 5\,L(x + 1).$$

2°. Fiind date ecuațiile a două drepte:

$$D_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+1}{1} \text{ și } D_2 \begin{cases} x + 3y - 2z = 0, \\ x + \alpha y - z = 1, \end{cases}$$

să se determine valoarea parametrului $\alpha$ în așa fel ca dreptele $D_1$ și $D_2$ să aibă un punct comun. Să se scrie ecuația planului determinat de ele.

3°. Să se calculeze soluția generală a ecuației:

$$y^{IV} + y''' - 12y'' = 4 + 63e^{3x}.$$

*Proba practică*

1°. Să se calculeze cu cinci zecimale exacte valoarea integralei definite:

$$\int_0^1 \frac{-x^3+13x^2+11x+17}{(x^2+1)(x+1)^2}\,dx.$$

2°. Să se verifice dacă expresiunea:

$$(y^2+2xz-1)\,dx+(z^2+2xy+1)\,dy+(x^2+2yz-1)\,dz$$

este o diferențială totală exactă și în caz afirmativ să se găsească funcțiunea primitivă corespunzătoare.

## ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

*Proba teoretică*

1°. Să se determine polinomul P care satisface identitatea:

$$2P(x) \equiv x\,P'(x) - 2(x^4+5x+6).$$

2°. Să se discute natura rădăcinilor ecuației $P(x) = 0$ coeficienții ei fiind presupuși reali. Să se rezolve ecuația în cazul când are rădăcini multiple.

3°. Să se calculeze funcțiunea simetrică:

$$\sum \frac{x_1^4+1}{x_1^4}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4$ fiind rădăcinile ecuației $P(x) = 0$.

II. Să se găsească limita expresiunii:

$$u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}$$

când $n \to \infty$, studiind convergența serii al cărui termen general e $u^n$.

*Proba practică*

1°. Să se studieze variația volumului trunchiului de con înscris într'o semisferă, baza mare coincizând cu baza semisferei.

2°. Să se calculeze cu aproximație de 0,01 raza bazei mici în cazul când volumul este maxim.

ANUL II

## ASTRONOMIA

*Proba teoretică*

Într'un loc A cu latitudinea 43° 18′ 17″ 5 s'a determinat înălțimea centrului soarelui $h = 42^\circ 26' 13'' 4$ la $2^h\ 57^m\ 4''\ 6$ timp mijlociu Greenvich. Știind

că declinaţia centrului soarelui în acel moment era $18^{0}\ 15'\ 27''5$ se cere să se calculeze:

1°. Ora adevărată pentru locul A în momentul observaţiei.

2°. Longitudinea geografică a locului A ştiind că'n ziua când s'a făcut observaţia am avut ca timp sideral la amiaza mijlocie la Greenvich $12^{h}\ 3^{m}\ 47^{0}93$ iar a doua zi $12^{h}\ 3^{m}\ 49''26$.

*Proba practică*

Semi axa mare a orbitei unei planete este egală cu 2,954267. Excentricitatea este 0,218709. Să se calculeze valorile razei vectoare şi a anomaliei mijlocii în momentul când anomalia adevărată este eaglă cu $143^{0}\ 28'\ 17''6$.

## ANALIZA MATEMATICĂ

### Partea I

*Proba teoretică.*

Se consideră familia de drepte:

$$x = \tfrac{3}{2}\, t^{2} z + t^{3} + 3t$$

$$y = -\frac{1}{2\,(t^{2}+1)}\, z + 2\,(t).$$

1°. Să se determine $q(t)$ astfel ca suprafaţa să fie desfăşurabilă.

2°. Să se afle curba de înapoere şi să se afle R şi T.

3°. Să se afle liniile asimptotice ale suprafeţei.

4°. Să se afle ecuaţia liniilor de curbură şi să se integreze.

*Proba practică*

Să se calculeze integrala:

$$\int \frac{\sin x\, \cos x\, dx}{(\sin^{6} x - 1)^{2}}\ .$$

## MECANICĂ RAŢIONALĂ

### Partea I

*Proba teoretică*

1. Un plan mobil se mişcă pe un plan fix astfel ca două drepte rectangulare $Ox$, $Oy$, ale planului mobil să treacă prin două puncte fixe A şi B ale planului fix. Să se afle:

1°. Centrul instantaneu de rotaţie.

2°. Baza şi rulanta.

3°. Să se demonstreze că ori ce dreaptă a planului mobil care trece prin O trece şi prin un punct fix al planului fix.

4°. Să se determine traectoria unui punct al planului mobil.

5°. Să se determine înfăşurătoarea unei drepte a planului mobil.

II. Se consideră axele fixe $Ox_1y_1z_1$ şi planul $z_1Ou$ care tae planul $x_1Oy_1$ după dreapta $Ou$. In planul $z_1Ou$ se consideră cercul (C) cu rază R tangent in O la dreapta $Ou$. Un mobil M descrie cercul (C) cu viteză unghiulară constantă $\omega$, în vreme ce planul $z_1Ou$ se roteşte în jurul axei $Oz_1$ cu viteza unghiulară $\omega$. La momentul iniţial planul $z_1Ou$ coincide cu planul $z_1Ox_1$ iar mobilul se găseşte în O. Se cere;

1°. Coordonatele lui M, compunătoarele vitezei şi acceleraţiei în momentul $t$.

2° Să se determine componentele vitezei şi acceleraţiei cu ajutorul mişcării relative, regăsindu-se rezultatul 1°.

*Proba practică*

Să considerăm două triunghiuri egale ABC şi A'B'C', având ipotenuza egală cu $l$, şi un unghiu egal cu $\alpha$. Celele două triunghiuri sunt aşezate într'un plan vertical, catetele AB şi A'B' fiind pe aceeaş orizontală. Distanţa $CB'=a$. Se presupune că BC şi B'C' sunt două jgheaburi rectilinii pe cari se pot mişca fără frecare două bile M şi M'. Se cere să se determine $a$ în funcţie de $l$ şi $\alpha$, aşa ca cele două bile să se întâlnească. Aplicaţia numerică sin $\alpha = \frac{3}{5}$; $l = 1$.

## ANUL III

## GEOMETRIA INFINITEZIMALĂ

1°. Să se studieze înfăşurătoarea unui cerc variabil al cărui centru descrie o curbă (C). Să se afle punctul de contact cu înfăşurătoarea sa a dreptei care uneşte punctele caracteristice ale cercului variabil.

2°. Studiul variaţiunii unui unghiu. Ca aplicaţii să se arate că normalele la curbele descrise de punctele sau înfăşurate de dreptele unei figuri de formă invariabilă concură în centrul instantaneu de rotaţie.

3°. Determinarea planului tangent într'un punct al unei suprafeţe riglate cu trei cube directoare. Aplicaţie la Biais passé. Să se afle punctul central pentru o generatoare.

4°. Se dau trei axe perpendiculare, originea O fiind centrul foii, axa $Oy$ coincide cu linia de pământ şi este îndreptată după axa mică a foii. Unitatea de lungime este centimetrul. O suprafaţă strâmbă ($\Sigma$) are ca directoare:

1°. Dreapta (D, D'): $x - y = 4$; $z = 6$.

2°. ($\Delta$, $\Delta'$) dreapta $x + y = 4$; $z = 2$.

3°. Cercul orizontal de rază 2 cu centrul (0, 0') în $x = 4$; $y = 0$; $z = 4$. Să se reprezinte proecţile părţei suprafeţei ($\Sigma$) presupusă opacă, care este situată deasupra planului perpendicular pe vertical: $z = x + 4$. Să se indice o

metodă pentru construcţia unei generatoare. Să se arate că conul director al suprafeţei este de rotaţie. Să se afle planul tangent într'un punct al unei generatoare. Să se arate că linia de strictiune este conturul orizontal, şi este o ipocicloidă cu patru puncte de întoarcere.

## ANALIZA MATEMATICĂ

### Partea II

*Proba teoretică*

Se consideră ecuaţiile diferenţiale:

$$(1) \quad 2x(x-1)y'' + (x-1)y' - y = 0$$
$$(2) \quad 2x(x-1)z'' + (zx-5)z' + 2z = 0.$$

2°. Să se arate că dacă $y=f(x)$ este o integrală a ecuaţiei (1) atunci funcţiunea:

$$z = x^{-1/2} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

este o integrală a ecuaţiei (2).

2°. Să se integreze ecuaţia diferenţială (2) ştiind că ecuaţia diferenţială (1) are integrală particulară un polinom de gradul întâi.

*Proba practică.*

Să se găsească suprafeţele pentru cari normala cuprinsă între suprafaţă şi planul $xOy$ are o lungime constantă.

## MECANICĂ RAŢIONALĂ

### Partea II

*Proba teoretică*

O bară AB rigidă şi grea, dar neomogenă este terminată cu două inele cari sunt obligate să se mişte fără frecare dealungul axelor $Ox$ şi $Oy$. Se presupune că C fiind mijlocul barei AB, densitatea în punctul M al barei este $\rho = \alpha\left(1 + \frac{r^2}{l^4}\right)$ unde s'a notat cu $\alpha$ densitatea în punctul C; cu $r = \overline{CM}$ şi cu $l$, lungimea barei.

Se cere să se studieze mişcarea barei, presupunând că bara a fost abandonată sub un unghiu de 45°, şi să se determine reacţiunile în A şi B.

*Proba practică*

Se consideră o placă subţire având forma unui semicerc, care are două puncte fixe O şi A situate pe verticală. Se cere să se determine mişcarea plăcii în jurul lui OA şi reacţiunile în O şi A.

## TEORIA FUNCŢIUNILOR

*Proba teoretică*

1°. Să se integreze ecuaţia diferenţială:

$$(1)\quad zy' - 3y + 2z - 3 = 0$$

$z$ fiind variabila complexă independentă; iar $y\ (z,\ \alpha)$ integrala generală, $\alpha$ este constanta de integrare.

2°. Să se desvolte în serie după puterile lui $\alpha$ rădăcina care tinde către 1 când $\alpha$ tinde către zero, a ecuaţiei

$$(2)\quad y\ (z,\ \alpha) = 0$$

şi să se determine raza de convergenţă a seriei.

3°. Să se dea lui $\alpha$ o valoare $\alpha_0$ aşa ca ecuaţia (2) să aibă o rădăcină dublă. In acest caz să se calculeze integrala:

$$\int_c \frac{2z\ dz}{y\ (z,\ \alpha_0)}$$

luată dealungul cercului (C) cu centrul în origine şi de rază egală cu 4. Apoi aceeaş integrală dealungul cercului cu raza 2.

*Chestiune de curs.* Formula lui Cauchy. Demonstraţia.

*Proba practică*

1°. Să se calculeze integrala definită.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin x + a}$$

unde avem $a > 1$ sau $a < -1$.

2°. Din calculul integralei I să se deducă valoarea integralei:

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x dx}{\sin^2 x - \sin x - 6}\ .$$

# BIBLIOGRAFIE

**Bulletin of the American Mathematical Society.** Vol. XXXVII, No. 11, Noemvrie 1931. New-York. Adunarea din Octomvrie dela New-York, de R. G. D. RICHARDSON. Colloquium din Mineapolis, de L. M. GRAVES. *Edge* asupra teorii suprafeţelor rostogolite, de V. SNYDER. Tratate de ale lui STEINER încă nepublicate, de R. T. HOLLCROFT. Volumul al doilea al lui WEATHERBURN, de W. C. GRAUSTEIN . Două cărţi asupra fondamentelor geometrii de E. S. ALLEN. Patru cărţi franceze de hidrodinamică, de J. D. TAMARKIN.

**Mathesis.** Tomul XLV, No. 9—10, Noemvrie-Decemvrie 1931. Gembloux. Notă asupra teorii planului înclinat la matematicianii greci, de P. VER EECKE. Doi snopi de raze ortologice, de CL. SERVAIS. Asupra geodesicelor unui con, de R. DEAUX. Identitate algebrică furnizată de calculul probabilităţilor, de C. LURQUIN. Asupra conicei lui RIVALIS, de AL. NICULESCU şi EM. ARGHIRIADE. Note de geometria analitică, de AD. M. Curiozităţi aritmetice de V. THÉBAULT.

**Anales de la Sociedad cientifica Argentina.** Tomul CXII. Fascicola V, Noemvrie 1931. Buenos-Aires. Poziţiile fundamentale ale stelelor australe şi primul catalog dela Cordoba, de M. L. ZIMMER.

**Idem.** Fascicola VI, Decemvrie 1931. Astronomia modernă şi problema evoluţiunii stelare, de C. D. PERRINE. Asupra teorii funcţiunilor determinate de două variabile, de J. C. VIGNAUX. Contribuţiune la determinarea figurii matematice a pământului, de F. AGUILAR.

**Boletin matematico.** Anul IV, No. 9, Noemvrie 1931. Buenos-Aires. In jurul problemei lui POTHENOT, de B. I. BAIDAFF. Chestiuni notabile din geometria triunghiului în legătură cu cercurile tritangente, de M. GRÜNBAUM.

**Idem.** No. 10, Decemvrie 1931. Succesiuni de termeni lineari şi omogeni recurenţi, de B. I. BAIDAFF. Viitorul Buletinului matematic, de B. I. BAIDAFF.

**Boletin matematico elemental.** Anul II, No. 3, Mai 1931. Buenos-Aires.

**Idem.** Decemvrie 1931. No. 10.

**Journal de mathematiques elementaires** publié par H. VUIBERT. Anul 56, No. 7, Ianuarie 1932. Paris.

**Bulletin de mathematiques et de physique pures et appliques de l'École Polytechnique „Roi Carol II" Bucarest.** II-ème Année, No. 3, Bucureşti, 1931. Le théorème des accroissements finis et les fonctions holomorphes, par D. POMPEIU. Sur les formules de quadrature à nombre minimum de termes, par L. TCHAKALOFF. Sur le théorème de ROLLE, par M. BIERNACKI. Sur la moyenne des fonctions paraboliques, par E. ABASON. Sur une remarque de D. POMPEIU, par D. V. IONESCO. Sur l'interprétation des l'opérateur de DIRAC, par AL. PROCA. Méthode pour la séparation qualitative du zinc, d'alluminium, par E. CHIRNOAGA. Sur les raies ultimes, par TR. NEGRESCO. Contribution a l'étude des spectres hydrodynamiques, par D. PAVEL. Notice sur le calcul symbolique de Heaviside, par J. CONSTANTINESCO. La formation de l'ingénieur en France par L. GUILLET.

**Revista matematică din Timişoara.** Anul XI, No. 11, Ianuarie 1931, Timişoara. O clasă de identităţi deduse prin desvoltări în serii împărţirea directă a două polinoame. Aplicaţii de V. ALACI.

**Activité de la Société de mathematique de Belgique.** Comitetul. Statute. Lista membrilor. Rezumatul comunicărilor D-lor L. GODEAU, I. VINANTS, M. DEWECK, TH. LEPAGE, M. SALTYKOW, J. VAN MIEGHEM, F. SIMONART, M. GOORMAGHTIGH, şi D-rei M. PAQUET. (Supliment la Mathesis).

J. LEEMANS. Changement du triangle de référence en coordonées barycentriques. (Supliment la Mathesis).

DE MONTESSUS DE BALLORE. Le génie de mathématiques. (Supliment la Mathesis).

## CERERI

214. Care este cel mai vechiu manuscris român în care se întâlnesc fracţii zecimale?

GHEORGHE LAZĂR le întrebuinţa la şcoala lui de inginerie la Bucureşti şi le-a descris în *«Aritmetica matematicească»* care ne-a rămas dela el.

I. I.

## DIVERSE

Între 4 şi 12 Septemvrie viitor va avea loc la Zürich un Congres internaţional al matematicianilor. Vor fi conferinţe generale în care se va arăta cât mai complect starea actuală a matematicilor şi comunicări pe secţiuni şi anume: Algebra şi teoria numerelor, Geometrie, Calculul probabilităţilor şi matematica asigurărilor, *b)* Astronomia, Mecanica şi fizica matematică, matematica technică, Filosofia, *c)* Istoria, Pedagogia. Inscrierile se fac la Secretariatul Congresului, Şcoala politechnică federală, sala 20 *d*, Zurich.

D-l P. SERGESCU a fost ales membru corespondent la *Societas scientiarum Varsoviensis*. D-sa va face un curs de Istoria Matematicilor la Facultatea de Ştiinţe din Clermont Ferrand între 12 şi 17 Ianuarie şi un curs de Algebra Superioară la Institut des hautes études din Bruxelles, între 20 şi 30 Ianuarie.

Societatea română de Ştiinţe, Secţiunea matematică a ţinut şedinţă în seara zilei de 11 Ianuarie. Au vorbit D-l L. TEODORIU. asupra distribuţii în plan a rădăcinilor polinomului de variabilă complexă şi N. TEODORESCU asupra sistemelor de ecuaţii de tip iperbolic.

Societatea română de Ştiinţe a ţinut şedinţă în seara zilei de 25 Ianuarie pentru secţiunea matematică. Au vorbit D-l A. ANGELESCU asupra unor medii şi D-l Gh. MIHOC asupra determinării coeficientului de contracţie din formula mediei.

## PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2656. *Să se construiască un triunghiu* ABC *înscris într'un cerc de rază* R, *circumscris unui cerc de rază* r *şi ştiind că raportul*

$$\frac{AB}{BC + CA}$$

*are o valoare constantă.*

COL. GH. BUICLIU.

*Soluţie* dată de D-l AD. C. GHEORGHIU, (Student Bucureşti). Teorema lui EULER dă

$$d^2 = R(R - 2r) \tag{1}$$

în care $d$ este distanţa OI. Se vede din (1) că o primă condiţie de posibilitate a problemei este

$$2r < R. \tag{2}$$

Pentru a construi cercul I, aduc diametrul MN în cercul O de rază R şi iau pe MN punctul P aşa că

$$\overline{PM} = 2r.$$

Cercul de diametru NP este tăiat în I şi I' de perpendiculara în O pe MN. Punctul I' nu va da soluţii diferite de punctul I ci numai soluţii de poziţie.

Fie ABC triunghiul cerut, circumscris cercului I de rază $r$; G punctul unde bisectoarea CI întâlneşte cercul O, iar T proecţia lui O pe CG. De oarece

$$AB < BC + CA$$

raportul dat în enunţ este subunitar. Fie $n > 1$ aşa că

$$BC + CA = n\,AB. \tag{3}$$

In *Journal des Mathématiques élémentaires,* 15 Mars 1927, se stabileşte la rezolvarea chestiunei 10567, că în triunghiurile cari satisfac relaţiunea (3) avem

$$CG = n\,IG \tag{4}$$

şi reciproc. Bazat pe această proprietate, voi calcula segmentul IG al bisectoarei CG pe care o am de construit.

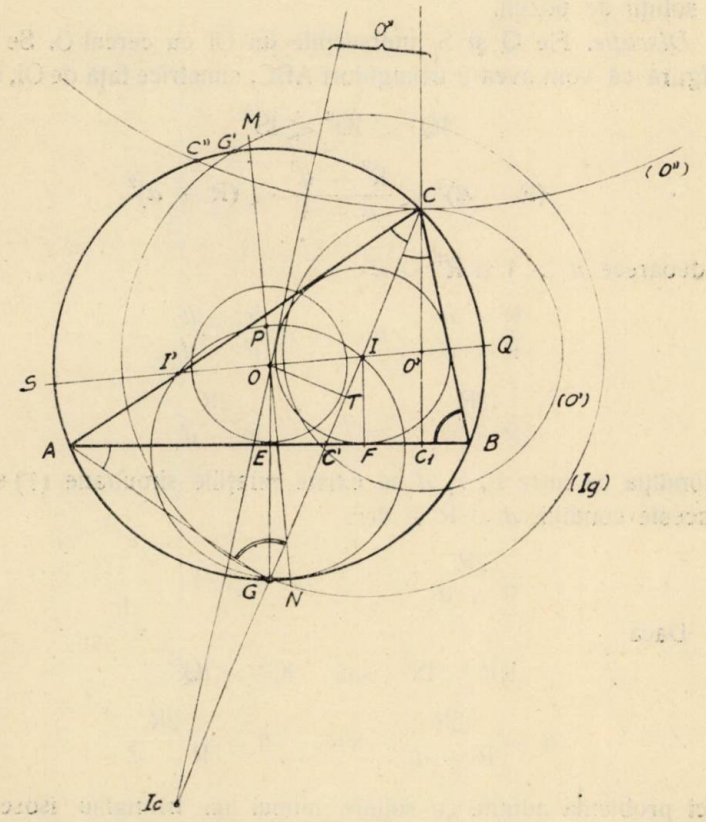
Pe figură se vede că

$$\overline{TG} = \frac{\overline{CG}}{2} = \frac{n}{2}\,\overline{IG}. \qquad (5)$$

Triunghiurile dreptunghice OTI și OTG dau

$$\overline{OT}^2 = \overline{OI}^2 - \overline{IT}^2 = \overline{OG}^2 - \overline{TG}^2$$

$$\therefore \quad d^2 - \overline{IT}^2 = R^2 - \overline{TG}^2.$$




Dar ținând seama de (5) și de

$$\overline{IT} = \overline{IG} - \overline{TG} = \left(1 - \frac{n}{2}\right)\overline{IG}$$

se deduce

$$d^2 - \left(1 - \frac{n}{2}\right)^2 \overline{IG}^2 = R^2 - \frac{n}{2}\,\overline{IG}^2$$

$$\therefore \quad \overline{IG}^2 = \frac{R^2 - d^2}{n - 1}. \qquad (6)$$

Acum construcţia triunghiului ABC este imediată.

Se descrie un cerc (I), cu centrul în I şi cu raza IG dată de (6). Acest cerc întâlneşte pe O în G şi G'. Dreapta GI determină vârful C iar tangentele din C la I determină vârfurile A şi B.

Problema va avea 2, 1 sau zero soluţii, după numărul punctelor G care se pot construi. Este de observat că punctul G' este simetricul lui G faţă de diametrul OI şi că deci soluţiile corespunzătoare lui G' sunt soluţii de poziţii.

*Discuţie.* Fie Q şi S intersecţiile lui OI cu cercul O. Se vede pe figură că vom avea 2 triunghiuri ABC, simetrice faţă de OI, dacă:

$$\overline{IQ}^2 < \overline{IG}^2 < \overline{IS}^2$$

$$\therefore \quad (R-d)^2 < \frac{R^2-d^2}{n-1} < (R+d)^2$$

sau deoarece $n > 1$ şi $R^2 > d^2$:

$$\frac{R-d}{R+d} < n-1 < \frac{R+d}{R-d}$$

$$\therefore \quad \frac{2R}{R+d} < n < \frac{2R}{R-d}$$

cu condiţia ca între R, $r$, $d$ să existe relaţiile simultane (1) şi (2). Cu aceste condiţii, $d < R$ şi deci

$$\frac{2R}{R+d} > 1 \qquad \therefore \quad n > 1.$$

Dacă

$$\overline{IG}^2 = \overline{IS}^2 \quad \text{sau} \quad \overline{IG}^2 = \overline{IQ}^2$$

$$\therefore \quad n = \frac{2R}{R+d} \quad \text{sau} \quad n = \frac{2R}{R-d}$$

atunci problema admite ca soluţie numai un triunghiu isoscel cu vârful în S sau în Q şi cu baza tangentă lui I.

Dacă

$$\overline{IG}^2 < \overline{IQ}^2 \quad \text{sau} \quad \overline{IS}^2 < \overline{IG}^2$$

$$\therefore \quad \frac{2R}{R-d} < n \quad \text{sau} \quad n < \frac{2R}{R+d}$$

problema nu va admite nici o soluţie.

*Observaţiuni.*

1°. Colegul de redacţie, D-l Profesor D. V. Ionescu, pe când era student a trimis următoarea interesantă soluţie acestei probleme. Fie E mijlocul corzii AB, C' piciorul bisectoarei CG, $C_1$ proecţia lui C pe AB, F contactul cercului I cu AB, $I_c$ centrul cercului exînscris lui C şi F' proecţia lui $I_c$ pe AB. In triunghiurile C'AC, C'BC punctul I este piciorul bisectoarei, deci

$$\frac{IC'}{IC} = \frac{AC'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{AB}{BC + CA} = \frac{1}{n}.$$

Se observă apoi că

$$\frac{CC_1}{IF} = \frac{CC'}{IC'} = \frac{IC + IC'}{IC'} = \frac{IC}{IC'} + 1 = n + 1$$

$$\therefore \qquad CC_1 = (n + 1)r.$$

Deci înălţimea $h_c$ este cunoscută. Se ştie apoi că G este mijlocul $II_c$, deci

$$2\,GE = r_c - r.$$

Dar

$$r_c = \frac{S}{p - c} \quad \text{şi} \quad r = \frac{S}{p}$$

$$\therefore \qquad r_c - r = \frac{c}{p(p - c)} \quad \text{şi} \quad rr_c = \frac{S^2}{p(p - c)}$$

$$\therefore \qquad \frac{r_c - r}{rr_c} = \frac{c}{S} = \frac{2}{h_c}$$

$$\therefore \qquad r_c = \frac{rh_c}{h_c - 2r}$$

sau înlocuind pe $h_c$ prin valoarea sa

$$r_c = \frac{n + 1}{n - 1} r$$

şi ducând aceasta în valoarea lui GE, avem

$$GE = \frac{r}{n - 1}$$

$$OE = R - GE = R - \frac{r}{n - 1}$$

şi problema revine la a construi un cerc cu centrul în O, cu raza OE şi a duce tangenta AB comună acestui cerc şi cercului I.

2°. D-l N. N. Mihăileanu (Lic. Constanţa) a *rezolvat*, nu a *construit* triunghiul ABC, în felul următor.

Din relaţiunile cunoscute

$$r = \frac{c \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B}{\cos \frac{1}{2}C} \quad ; \quad R = \frac{c}{2 \sin C}$$

se obţine

$$\frac{2}{R} = 4 \sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \left( \cos \frac{A+B}{2} - \cos \frac{A-B}{2} \right) \quad (7).$$

Apoi avem

$$\frac{1}{n} = \frac{\sin C}{\sin A + \sin B} = \frac{\sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C}{\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}} = \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} \quad (8).$$

Rezolvând ecuaţiile (7) şi (8) în raport cu $\cos \frac{A+B}{2}$ se găseşte

$$\cos \frac{A+B}{2} = \pm \sqrt{\frac{r}{2(n-1)R}}$$

$$\cos \frac{A-B}{2} = \pm n \sqrt{\frac{r}{2(n-1)R}}.$$

3°. Un foarte harnic şi reputat corespondent a reuşit să demonstreze (!!) pe cale trigonometrică că raportul

$$\frac{BC + CA}{AB}$$

este totdeauna egal cu 2 şi deci a redus problema la problema 3704 din *«Gazeta Matematică»* Vol. XXXIV. Când vor reapărea recreaţiile matematice vom publica, probabil, această curioasă proprietate a triunghiurilor.

4°. Am propus problema 2656 în anul 1918 adică cu 9 ani înainte de a fi apărut în *Journal des Mathématiques élémentaires* problema 10567 pe care se sprijină soluţia D-lui Ad. C. Gheorghiu. Eu am stabilit atunci următoarea proprietate a triunghiurilor în care există relaţia (3).

Triunghiurile asemeni CAG, CBC′ şi CAG, ACC′ dau

$$\frac{CG}{AG} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{AC'} = n$$

$$\therefore \qquad CG = n\,AG.$$

Dar AG şi GI sunt egale deci

$$(9) \qquad GC = n\,GI$$

care arată că locul lui C, când G se mişcă pe O este un cerc O′ omotetic cu O, centrul şi raportul de omotetic fiind 1 şi $n$. — Intersecţiile lui O′ cu O determină pe C după care construcţia triunghiului este imediată.

5°. In soluția D-lui Prof. D. V. Ionescu s'a stabilit că

$$r_c = \frac{n+1}{n-1} r$$

de unde se poate deduce $r$ în funcție de $r_c$. Deci la fel se poate construi triunghiul ABC în cazul când se dau O, $I_c$ și $n$.

Acest lucru reese imediat și din soluția mea geometrică. In adevăr, inlocuind în (9) pe GI în funcție de $II_c$ avem:

$$GC = n\, GI_c$$

care arată că C este omoteticul lui G față de $I_c$, raportul de omotetie fiind $n$.

Col. Gh. Buicliu.

---

PROBLEMA 3799. *Se consideră două cercuri secante în* A *și* B. *Dintr'un punct* M *al unuia din cercuri se duc dreptele* MA *și* MB, *cari taie celalt cerc în* N *și* P.

*Să se studieze variațiunea suprafeței triunghiului* MNP, *când* M *variază pe cerc.*

Octavian Orănescu.

Să însemnăm cu $\alpha$ unghiul dreptelor MP și AB.

$$\text{Supr. MNP} = \tfrac{1}{2}\,\overline{MN}^2\,\frac{\sin AMB\,\sin\alpha}{\sin NPM},\ \text{căci}\ \sphericalangle\, MNP = \alpha.$$

Insă

$$\sphericalangle\, AMB = \text{const} = k$$

și deci

$$\text{Supr. MNP} = \tfrac{1}{2}\,\overline{MN}^2\,\frac{\sin k\,\sin\alpha}{\sin(\alpha + k)}.$$

Dacă $r$ este raza cercului pe care variază M și R raza cercului al doilea, avem:

$$MA = 2r\,\sin\alpha \quad \text{și} \quad AN = 2R\,\sin NPA$$

și deci

$$MN = MA + AN = 2r\,\sin\alpha + 2R\,\sin\,NPA.$$

Fie $O_1$ și $O_2$ centrele cercurilor și $a = \sphericalangle\, O_1AO_2$; atunci $\sphericalangle\, NPA = a - \alpha$, prin urmare $MN = 2r\,\sin\alpha + 2R\,\sin(a - \alpha)$ și

$$\text{Supr. MNP} = 2\,[r\,\sin\alpha + R\,\sin(a - \alpha)]^2\,\frac{\sin k\,\sin\alpha}{\sin(\alpha + k)}.$$

Inlăturând factorii constanți, expresiunea căreia îi căutăm variațiunea este:

$$E = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + k)}[r\sin\alpha + R\sin(a - \alpha)]^2 \cdot$$

Să punem pentru ușurință:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + k)} = X \; ; \; r\sin\alpha + R\sin(a - \alpha) = Y \; \therefore \; E = XY^2.$$

Să luăm derivata:

$$E' = 2X \,.\, Y \,.\, Y' + X'Y^2 \text{ și să o anulăm.}$$

Rezultă

$$Y = 0 \quad \text{și} \quad 2XY' + X'Y = 0.$$

$$X' = \frac{\sin(\alpha + k)\cos\alpha - \cos(\alpha + k)\sin\alpha}{\sin^2(\alpha + k)} = \frac{\sin k}{\sin^2(\alpha + k)}$$

$$Y' = r\cos\alpha - R\cos(a - \alpha).$$

Valorile lui $\alpha$ cari fac maximă sau minimă funcțiunea sunt date de relațiile:

1) $$r\sin\alpha + R\sin(a - \alpha) = 0$$

și

2) $$\frac{2\sin\alpha}{\sin(\alpha + k)}[r\cos\alpha - R\cos(a - \alpha)] + \frac{\sin k}{\sin^2(\alpha + k)}[r\sin\alpha + R\sin(a - \alpha)] = 0.$$

Să studiem prima relație.

In triunghiul $AO_1O_2$, unde $\sphericalangle O_1AO_2 = a$ și $\sphericalangle AO_1O_2 = k$, avem:

$$\frac{R}{\sin k} = \frac{r}{\sin(a + k)} \quad \therefore \quad R = r\frac{\sin k}{\sin(a + k)}$$

și relația se transformă în

$$\sin\alpha\sin(a + k) + \sin k\sin(a - \alpha) = 0.$$

Insă

$$\sin\alpha\sin(a + k) = \tfrac{1}{2}\cos(a + k - \alpha) - \tfrac{1}{2}\cos(a + k + \alpha)$$

$$\sin k\sin(a - \alpha) = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha + k - a) - \tfrac{1}{2}\cos(a + k - \alpha)$$

și deci rămâne

$$\cos(\alpha + k - a) - \cos(\alpha + k + a) = 0$$

$$\therefore \; \cos(\alpha + k - a) = \cos(\alpha + k + a).$$

Putem aveà :

$\alpha + k - a = \alpha + k + a \quad \therefore \quad a = 0$, ceeace este imposibil,

$\alpha + k + a = 2\pi - \alpha - k + a \quad \therefore \quad \alpha = \pi - k$, ceeace iarăşi nu se poate, $\alpha$ şi $k$ fiind unghiuri din acelaşi triunghi AMB. Se puteà vedeà dela începuţ că prima relaţie nu poate fi zero, fiind egală cu $\frac{MN}{2} \neq 0$.

Să studiem acum relaţia doua, care devine :

$$2\sin\alpha \sin(\alpha + k)[r\cos\alpha - R\cos(a - \alpha)] + \\ + \sin k\,[r\sin\alpha + R\sin(a - \alpha)] = 0.$$

Punând şi aici $R = r\,\frac{\sin k}{\sin(a + k)}$, avem

$$2\sin\alpha \sin(\alpha + k)[\cos\alpha \,.\, \sin(a + k) - \sin k \cos(a - \alpha)] + \\ + \sin k\,[\sin\alpha \,.\, \sin(a + k) + \sin k \sin(a - \alpha)] = 0.$$

Avem însă :

$$\cos\alpha \,.\, \sin(a + k) = \tfrac{1}{2}\sin(a + k + \alpha) + \tfrac{1}{2}\sin(a + k - \alpha)$$
$$\sin k \cos(a - \alpha) = \tfrac{1}{2}\sin(a + k - \alpha) + \tfrac{1}{2}\sin(k + \alpha - a)$$
$$\sin\alpha \sin(a + k) = \tfrac{1}{2}\cos(a + k - \alpha) - \tfrac{1}{2}\cos(a + k + \alpha)$$
$$\sin k \sin(a - \alpha) = \tfrac{1}{2}\cos(k + \alpha - a) - \tfrac{1}{2}\cos(a + k - \alpha).$$

Inlocuind avem :

$$2\sin\alpha \sin(\alpha + k)[\sin(k + \alpha + a) - \sin(k + \alpha - a)] + \\ + \sin k\,[\cos(k + \alpha - a) - \cos(k + \alpha + a)] = 0$$

sau :

$$2\sin\alpha \sin(\alpha + k)\cos(k + \alpha)\sin a + \sin k \,.\, \sin(\alpha + k) \,.\, \sin a = 0$$

$\therefore \quad \sin(\alpha + k) = 0$ şi $2\sin\alpha \cos(\alpha + k) + \sin k = 0$.

Prima dă $\alpha + k = k\pi$ ceeace nu se poate.

Considerând a doua relaţie, avem :

$2\sin\alpha \cos(\alpha + k) = \sin(2\alpha + k) - \sin k$ şi rămâne prin urmare

$$\sin(2\alpha + k) = 0 \quad \therefore \quad 2\alpha + k = n\pi$$

sau pentru $n = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{k}{2}$

» » $n = 2$, $\alpha = \pi - \frac{k}{2}$ } relaţiuni imposibile.

» » $n = 3$, $\alpha = \frac{3\pi}{2} - \frac{k}{2}$ }

Să scriem acum expresiunea suprafeței triunghiului MNP, în care să înlocuim pe $\alpha$ prin $\frac{\pi}{2} - \frac{k}{2}$

Avem:

$$S_1 = 2 \sin k \left[ r \cos \frac{k}{2} + R \cos \left( a + \frac{k}{2} \right) \right]^2$$

care are loc când M se află la extremitățile diametrului $O_1O_2$ al cercului AMB.

Prin urmare, dacă $k < \frac{\pi}{2}$, suprafața triunghiului crește dela $\alpha = 0$, când $S = 0$, pânăla $S_1$, când $\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \frac{k}{2}$ ; apoi iar scade la 0 când $\alpha = \pi$; crește apoi pânăla $S_2$, care se obține înlocuind în $S_1$ pe $k$ prin $\pi - k$, și apoi scade iar la zero pentru $\alpha = 2\pi$.

Valoarea lui $S_2 = 2 \sin k \left[ r \sin \frac{k}{2} + R \sin \left( \frac{k}{2} - a \right) \right]^2$.

Schema de variație este cea de mai jos:

| $\alpha$ | 0 | | $\frac{\pi}{2} - \frac{k}{2}$ | | $\pi$ | | $2\pi - \frac{k}{2}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S | 0 | | $S_1$ | | 0 | | $S_2$ | | 0 |
| | crește | | descrește | | crește | | descrește | | |

$k$ este unghiul ascuțit, subîntins de coarda AB în cercul AMB.

*Notă.* Un singur corespondent a căutat să rezolve problema, însă la urmă recomandă a se studia problema numeric, căci este mai simplu.

Un altul spune să se ia diferite poziții ale lui M, să se calculeze suprafețele triunghiurilor și care e mai mare, acela este maximum (eră curios dacă afirmă contrariul).

O. Orănescu.

PROBLEMA 3847. *Porţiunile din înălţimi cuprinse între vârfuri şi ortocentru fiind* $i_a$, $i_b$, $i_c$, *să se demonstreze că în orice triunghiu avem relaţiile:*

1. $$\frac{i_a+i_b-i_c}{r_c-R}+\frac{i_c+i_a-i_b}{r_b-R}+\frac{i_b+i_c-i_a}{r_a-R}=6$$

2. $$\frac{i_a^4-a^4}{i_b^2+b^2}+\frac{i_b^4-b^4}{i_c^2+c^2}+\frac{i_c^4-c^4}{i_a^2+a^2}=4R^2(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C).$$

NIC. O. ZAHARIA.

*Soluţie* dată de D-nii: R. N. DUMITRAŞCU, H. I. IONESCU, M. A. NEGREA şi M. VELEA.

1. Vom folosi relaţiunile cunoscute:

$$i_a=2R+r-r_a, \text{ etc....}$$

$$\therefore \quad i_a+i_b-i_c=2R+r-r_a-r_b+r_c$$

însă

$$r=r_a+r_b+r_c-4R,$$

deci

$$i_a+i_b-i_c=2R+r_a+r_b+r_c-4R-r_a-r_b+r_c=2(r_c-R).$$

$$\therefore \quad \frac{i_a+i_b-i_c}{r_c-R}=2;$$

analog ceilalţi termeni ai sumei din membrul I-iu, din relaţia ce trebuia demonstrată.

2. Se cunoaşte relaţia:

$$a^2+i_a^2=4R^2 \quad \therefore \quad i_a^4-a^4=4R^2(i_a^2-a^2)$$

$$\therefore \quad \frac{i_a^4-a^4}{i_b^2+b^2}=\frac{4R^2(i_a^2-a^2)}{i_b^2+b^2}=\frac{4R^2(i_a^2-a^2)}{4R^2}=i_a^2-a^2.$$

Insă

$$i_a=2R\cos A,$$

deci

$$\frac{i_a^4-a^4}{i_b^2+b^2}=4R^2\cos^2A-a^2=4R^2\cos^2A-4R^2\sin^2A=4R^2\cos 2A$$

analog ceilalţi termeni şi relaţiunea este demonstrată.

*Observaţiuni.*

1. Relaţia întâia se poate generaliza astfel:

$$\sum\left(\frac{i_a+i_b-i_c}{r_c-R}\right)^n=3.2^n..$$

iar relaţiunea doua:

$$\sum\left(\frac{i_a^4-a^4}{i_b^2+b^2}\right)^n=(2R)^{2n}\,\Sigma\cos^n 2A.$$

2. Am găsit mai sus că

$$\frac{i_a+i_b-i_c}{r_c-R}=\ldots=2.$$

D-l Ad. C. Gheorghiu stabileşte din această relaţie, următoarele: Făcând suma numărătorilor pe suma numitorilor avem:

$$\frac{i_a+i_b+i_c}{r_a+r_b+r_c-3R}=2,$$

sau mai general:

$$\frac{\gamma(i_a+i_b-i_c)+\beta(i_c+i_a-i_b)+\alpha(i_b+i_c-i_a)}{\gamma(r_c-R)+\beta(r_b-R)+\alpha(r_a-R)}=2$$

$$\therefore\quad\frac{i_a(\beta+\gamma-\alpha)+i_b(\gamma+\alpha-\beta)+i_c(\alpha+\beta-\gamma)}{\alpha r_a+\beta r_b+\gamma r_c-R(\alpha+\beta+\gamma)}=2;$$

luând

$$\alpha=a\ ,\ \beta=b\ ,\ \gamma=c$$

se obţine

$$\frac{(p-a)\,i_a+(p-b)\,i_b+(p-c)\,i_c}{ar_a+br_b+cr_c-2pR}=1,$$

însă

$$ar_a+br_b+cr_c=2p\,(2R-r)$$

$$\therefore\quad(p-a)\,i_a+(p-b)\,i_b+(p-c)\,i_c=2p\,(R-r).$$

Dacă se ia

$$\alpha=\frac{1}{r_a}\ ,\ \beta=\ldots$$

şi se ţine seama că

$$\sum\frac{1}{r_a}=\sum\frac{1}{h_a}=\frac{1}{r}$$

se obţine

$$\sum\frac{r_a-2r}{r_a}\,i_a=2\,(3r-R).$$

O. Or.

*PROBLEMA 4011. *Care pot fi resturile împărţirii prin 137 a numerelor de forma 111 . . . 11 ?*

AL. A. ROŞU.

*Soluţie.* Vom da un aspect mai general problemei înlocuind forma 11 . . . 11 prin *aaa . . . aaa* şi pe 137 printr'un număr prim, *p*. Insemnând cu $N_n$, numărul de forma indicată şi care ar avea *n* cifre avem :

$$N_n = aaa \ldots aaa = a \times 111 \ldots 111,$$

pe care îl mai putem scrie astfel :

$$N_n = \frac{a(10^n - 1)}{9} = a(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10 + 1).$$

Insemnăm acum cu $A_n$ câtul iar cu $R_n$ restul împărţirii numărului $N_n$ prin numărul prim *p* şi obţinem :

$$\frac{a(10^n - 1)}{9} = A_n p + R_n$$

sau :

$$R_n = \frac{a(10^n - 1) - 9A_n p}{9},$$

care este expresia generală a restului căutat şi care se va discuta şi rezolva în numere întregi.

In cazul problemei 4011, unde $a = 1$ iar $p = 137$, expresiunea restului devine :

$$(1) \quad R_n = \frac{10^n - 9 \times 137\, A_n - 1}{9} = \frac{10^n - 1233\, A_n - 1}{9},$$

rest ce vom începe a-l discuta în cadrul problemei propuse.

Ne vom întreba, în primul rând, dacă vre-un număr de forma 111 . . . 111 se'mparte exact cu 137, ceeace revine a rezolva în numere întregi ecuaţia :

$$10^n - 1233\, A_n - 1 = 0.$$

Pentru aceasta observăm că numărul $1233\, A_n + 1$ trebuie să fie tot de forma $10^n$, ceeace atrage după sine ca numărul $1233\, A_n$ să fie neapărat un număr de forma : 999 . . . 999.

Cifrele unităţilor şi zecilor ale numărului 1233 cere ca cifra

unităţilor numărului $A_n$ să fie 3 iar cea a zecilor să fie 0. Primele două produse parţiale sunt:

$$\begin{array}{r} 1233 \\ \hline .....03 \\ \hline 3699 \\ 0000 \\ ..... \\ ..... \end{array}$$

Pentru a obţine mai departe la produsul general pe 9, ceeace căutăm, va trebui ca cifra sutelor lui $A_n$ să fie 1. Vom scrie:

$$\begin{array}{r} 1233 \\ \hline .....103 \\ \hline 3699 \\ 0000 \\ 1233 \\ .... \\ .... \end{array}$$

şi observăm că tot 1 este indicat şi ca cifră a miilor, când vom avea:

$$\begin{array}{r} 1233 \\ \hline ...1103 \\ \hline 3699 \\ 0000 \\ 1233 \\ 1233 \\ .... \\ .... \end{array}$$

A cincea cifră (a zecilor de mii) a numărului $A_n$, va trebui să fie o cifră, care înmulţită cu 3 să ne dea un produs ce se va termină cu 4, căci:

$$0 + 2 + 3 + 4 = 9.$$

Singura cifră posibilă este 8, când avem dispoziţia următoare:

$$\begin{array}{r} 1233 \\ \hline ...81103 \\ \hline 3699 \\ 0000 \\ 1233 \\ 1233 \\ 9864 \\ \hline 99999999 \end{array}$$

şi observăm că am dat peste un număr de forma indicată.

Rezultă imediat că $n = 8$, adică că numărul: 11111111 se divide exact cu 137 şi ca atare: $R_8 = 0$. Observăm încă că toate numerile de aceiaşi formă şi având $8k$ cifre vor da acelaş rest zero.

Referindu-ne tot la ecuaţia (1) ea ne mai spune că pentru $n < 4$ nu avem soluţii, ceeace ne dă, în mod evident;

$$R_1 = 1 \quad ; \quad R_2 = 11 \quad ; \quad R_3 = 111.$$

Pentru aflarea resturilor $R_4$, $R_5$, . . . vom proceda din aproape în aproape astfel:

Observăm că:

$$N_n = N_{n-1} + 10^{n-1}.$$

Cunoaştem restul lui $N_{n-1}$, care este $R_{n-1}$ şi rămâne a mai găsi restul împărţirii $10^{n-1} : 137$, pe care-l însemnăm cu $r_{n-1}$. Dacă cunoaştem pe $r_{n-2}$, atunci $r_{n-1}$ va fi dat de restul împărţirii $10\, r_{n-2} : 137$, iar $R_n$ căutat va fi dat de restul împărţirii:

$$\frac{R_{n-1} + r_{n-1}}{137}.$$

Procedând ca mai sus şi plecând dela datele cunoscute:

$$R_3 = 111 \quad \text{şi} \quad r_3 = 41 \qquad (1000 = 137 \times 7 + 41)$$

găsim:

$$R_4 = 15 \quad ; \quad R_5 = 14 \quad ; \quad R_6 = 4 \quad ; \quad R_7 = 41$$

adică am aflat toate resturile cerute, căci ele, am văzut, se repetă după o perioadă de 8 cifre.

Au rezolvat problema procedând la împărţirea directă a numărului 111 . . . 111 prin 137, D-nii: N. N. Aldea (Student, Bucureşti); C. D. Ionescu-Ţiu (Sub-Lt. Geniu); Em. Mereuţă (Neamţ); N. N. Mihăileanu (Lic. Constanţa); I. C. Parepeanu (Lic. Braşov) şi G. St. Roşca.

Este evident că acest fel de a proceda, al rezolvitorilor problemei de faţă, a dus repede la rezultatul cerut dar nu s'a câştigat nimic în ceeace priveşte raţionarea unei probleme, de aritmetică mai ales.

Cpt. Gh. N.

*PROBLEMA 4012. *Căutăm într'o tablă de cuburi perfecte să vedem dacă un număr dat* ab, *de două cifre, se găseşte printre numerile formate din ultimile două cifre ale cuburilor.*

*Cercetând până la cubul numărului* N *şi găsind că până aci nici una din terminaţiile de două cifre ale cuburilor nu este numărul dat* ab, *se întreabă dacă vom da peste acest caz, la cubul unui număr superior lui* N?

*Aplicaţie pentru* ab = 94 *şi* N = 174.

CĂPITAN GH. NICULESCU.

*Soluţie* dată de D-nii: N. N. MIHĂILEANU (Constanţa) şi SUB.-LT. C. D. IONESCU-ŢIU (din geniu).

Un număr oarecare N se poate scrie sub forma:

$$N = 10n + k$$

unde $k$, reprezintă unităţile acelui număr.

Ridicând ambii membrii ai egalităţii de mai sus, la cub, obţinem:

$$N^3 = 10^3 n^3 + 3 . 10^2 . n^2 k + 3 . 10 . n . k^2 + k^3$$

şi din această desvoltare observăm că:

— oricare ar fi $n$ sau $k$, primul şi al doilea termen al desvoltării nu dau cifre care să altereze numărul format din ultimile două cifre ale unui cub (cazul ce ne preocupă în problema de faţă);

— pentru $n \geqslant 10$ şi al treilea termen intră în categoria de mai sus.

Acestea fiind, conchidem că numai ultimile două cifre ale unui număr concură la formarea numărului alcătuit din ultimile două cifre ale cubului acelui număr şi atunci numerile formate din ultimile două cifre ale cuburilor numerilor dela 1 până la 99 inclusiv furnizează terminaţiile de două cifre, pentru toate cuburile perfecte. In concluzie, dacă o terminaţie dată *ab* nu a fost găsită la nici un cub perfect al unui număr $N \leqslant 99$ nu va fi atunci găsită nici la cuburile numerilor $N > 99$.

Pentru a răspunde complet la cerinţele problemei, rămâne să vedem dacă terminaţia dată $ab = 94$ se găseşte printre termina-

ţiile cuburilor numerilor inferioare lui 100. In acest scop să reluăm suma :

$$S = 3 . 10 . n . k^2 + k^3,$$

care se va termina cu 4 numai pentru $k = 4$, în care caz devine :

$$S = 3 . 10 . n . 16 + 64 = 480n + 64$$

şi sub această formă vedem că pentru a obţine terminaţia $ab = 94$, trebuie ca :

$$480n$$

să aibă ca cifră a zecilor pe 3. Ori acest lucru este imposibil, oricare ar fi $n$, din cauza numărului par 8. Ca atare terminaţia 94 nu se găseşte printre terminaţiile cuburilor numerilor inferioare lui 100. Pentru acest motiv, nu s'a găsit nici până la cubul corespunzător lui N = 174 şi nu se va găsi nici odată. Mai mult, nu vom găsi nici odată ca terminaţie un număr de forma $a4$, unde $a$ ar fi o cifră impară.

CPT. GH. N.

PROBLEMA 4021. *Se cere fracţia* abc/a'b'c', *cu numărătorul şi numitorul de trei cifre, ştiind că acea fracţie şi inversa ei se transformă exact în zecimale, iar dacă la aceste fracţii le înlocuim numărătorii şi numitorii prin răsturnatele lor, una se transformă în fracţie periodică simplă şi alta în fracţie periodică mixtă.*

I. IONESCU.

*Soluţie* parţială dată de D-l GEORGE ST. ROŞCA.

Să presupunem fracţia *abc/a'b'c' ireductibilă.* Această fracţie fiind egală cu o fracţie zecimală exactă, numitorul ei nu poate conţine decât factorii primi 2 şi 5. Inversa ei fiind o fracţie echivalentă cu o fracţie zecimală exactă, numărătorul *abc* va conţine şi el numai factorii primi 2 şi 5. Cum am presupus fracţia ireductibilă, rezultă că unul din numerele *abc* şi *a'b'c'* conţine numai factorul 2 şi celălalt numai factorul 5. Puterile lui 2 de trei cifre sunt 128, 256 şi 512 iar ale lui 5 sunt 125 şi 625.

Putem presupune fracţia dată mai mică decât 1; altfel o înlocuim cu inversa ei, ceiace nu schimbă întru nimic problema. Cu numerele de mai sus putem forma fracţiile:

$$\frac{125}{128}\quad\frac{125}{256}\quad\frac{125}{512}\quad\frac{128}{625}\quad\frac{256}{625}\quad\frac{512}{625}.$$

Pentruca fracţiile formate cu răsturnatele termenilor acestor fracţii să fie, una periodică simplă, trebuie ca unul din numerele *cba, c'b'a'* să nu conţină factorii primi 2 şi 5 iar pentru ca cealaltă să ne dea o fracţie periodică mixtă trebuie ca celălalt din aceste numere să conţină şi unul din aceşti factori primi, eventual după reducerea fracţii la cea mai simplă expresiune, dacă fracţia *cab/c'b'a'* nu ar fi ireductibilă.

Se vede imediat că prima şi ultima din fracţiile de mai sus nu îndeplinesc aceste condiţii, şi prinurmare nu pot fi soluţii. Penultima ne dă fracţia reductibilă 652/256, care simplificată devine 326/623, care îndeplineşte condiţia.

Aşadar *soluţii ireductibile* ale problemei sunt

$$\frac{125}{256}\quad\frac{125}{512}\quad\frac{128}{625}\quad\frac{256}{625}.$$

*Notă.* Problema are numeroase soluţii cu fracţii reductibile. Vom publica ulterior asemenea soluţii, care nu s'au primit încă.

I. I.

---

PROBLEMA 4040. *Se dau dreptele fixe* $\Delta$ *şi* $\Delta_1$ *şi se cere locul geometric al intersecţiilor perpendicularelor ridicate pe aceste drepte în punctele lor de întâlnire cu un cerc de rază variabilă, cu centrul într'un punct fix din plan.*

U. M. Florescu.

*Soluţie* dată de D-l Adrian C. Gheorghiu.

Fie P un punct al locului şi M, $M_1$ proiecţiile lui pe $\Delta$ şi $\Delta_1$. Se vede cu uşurinţă că proiectantele PM şi $PM_1$ sunt raze curente în două fascicole ale căror centre sunt la infinit, în direcţiile perpendiculare pe $\Delta$ şi $\Delta_1$. Din construcţie rezultă că între PM şi $PM_1$ avem o corespondenţă de natura (2, 2) şi că dreapta care uneşte centrele acestor fascicole (dreapta dela infinit) considerată ca rază

într'unul din fascicole are cele două omoloage ale ei, din celălalt fascicol, confundate cu ea însăş.

Intr'adevăr, dacă ne dăm proiectanta PM, piciorul M e bine determinat. Cercul de centru fix (O) care trece prin M e deasemenea bine determinat. El taie dreapta $\Delta_1$ în două puncte $M_1$, $N_1$, între care nu putem distinge. Deci unei proiectante PM, corespund două determinaţii $PM_1$ şi $PN_1$ ale celeilalte proiectante (şi reciproc); încât corespondenţa lor este, cum s'a anunţat, de natura (2, 2). Pe de altă parte, când PM se confundă cu dreapta dela infinit, cercul de centru O ce trece prin M este identic cu dreapta dela infinit socotită dublu. Aşadar, determinaţiile $M_1$ şi $N_1$ din cazul curent se confundă amândouă cu punctul dela infinit al dreptei $\Delta_1$. Determinaţiile proiectantelor $PM_1$ şi $PM_2$ se confundă atunci amândouă cu dreapta dela infinit.

Fie

1) $$D + \lambda = 0 \qquad D_1 + \lambda_1 = 0$$

ecuaţiile generale ale proiectantelor PM şi $PM_1$, în coordonate carteziene (D şi $D_1$ fiind două polinoame lineare în $x$ şi $y$ iar $\lambda$ şi $\lambda_1$ doi parametrii variabili). In virtutea celor arătate, între $\lambda$ şi $\lambda_1$ trebuie să existe o legătură de forma:

2) $$f(\lambda, \lambda_1) \equiv a\lambda^2\lambda_1^2 + b\lambda^2\lambda_1 + c\lambda\lambda_1^2 + d\lambda^2 + e\lambda\lambda_1 + f\lambda_1^2 + g\lambda + h\lambda_1 + k = 0.$$

Pentru ca dreapta dela infinit să se aibă doar pe sine omoloagă în amândouă fascicolele, va trebui ca în 2), pentru $\lambda = \infty$, să obţinem o ecuaţie de gradul al doilea ale cărei rădăcini în $\lambda_1$ să fie amândouă infinite (şi reciproc). Aceasta impune:

$$a = 0 \ , \quad b = 0 \ , \quad c = 0.$$

Ţinând seamă de aceste condiţii şi eliminând pe $\lambda$ şi $\lambda_2$ între ecuaţiile 1) şi 2) găsim:

$$dD^2 + eDD_1 + fD_1^2 + gD + hD_1 + k = 0$$

adică *ecuaţia unei conice.*

Odată cunoscut gradul, prin considerarea unor poziţii particulare ale lui P, se poate fixa complect poziţia conicei.

Demonstraţia se aplică evident şi cazului când PM şi $PM_1$ sunt proiectante corespunzătoare la unghiuri constante oarecare, faţă de dreptele $\Delta$ şi $\Delta_1$.

*Soluție analitică* dată de D-nii: SUBLOCOTENENT I. GH. ZAMFIRESCU, VASU VASILE, ADRIAN C. GHEORGHIU, AUREL M. BĂDESCU.

Raportăm figura la paralele duse prin O la bisectoarele unghiului $(\Delta, \Delta_1)$. Ecuațiile normale ale lui $\Delta$ și $\Delta_1$ vor fi atunci de forma:

$$3) \qquad \begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha &= p \\ x\cos\alpha - y\sin\alpha &= p_1. \end{aligned}$$

Fie P un punct al locului și X, Y coordonatele lui. Sistemul

$$\begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha &= p \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha &= X\sin\alpha - Y\cos\alpha \end{aligned}$$

ne va da, evident, coordonatele proiecției M a lui P pe $\Delta$, ultima din aceste ecuații fiind aceea a proiectantei PM. Ridicând la pătrat și adunând

$$4) \qquad x^2 + y^2 = (X\sin\alpha - Y\cos\alpha)^2 + p^2,$$

găsim expresia pătratului depărtării punctului M, de origină. Inlocuind $\alpha$, cu $-\alpha$ și $p$, cu $p_1$, obținem expresia pătratului depărtării proiecției $M_1$, de origină:

$$5) \qquad x^2 + y^2 = (X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 + p_1^2.$$

Ecuația locului se obține egalând expresiile 4) și 5), conform condiției exprimate în enunț:

$$(X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 - (X\sin\alpha - Y\cos\alpha)^2 = p^2 - p_1^2$$

$$\therefore \quad 2XY\sin 2\alpha = p^2 - p_1^2.$$

Locul e prin urmare o iperbolă echilateră, cu centrul în O și cu asimptotele paralele cu bisectoarele dreptelor $\Delta$ și $\Delta_1$. Ea trece prin punctul comun dreptelor $\Delta$ și $\Delta_1$, căci din 3) rezultă

$$2xy\ \sin 2\alpha = p^2 - p_1^2;$$

de altfel acest fapt apare imediat din modul de generare al locului geometric descris în enunț.

Locul se reduce la două drepte perpendiculare, când

$$p^2 = p_1^2,$$

adică, având în vedere ecuațiile normale 3), când centrul fix O al cercului cade pe una din bisectoarele unghiului celor două drepte $\Delta$ și $\Delta_1$.

**Observaţie.** Din demonstraţia ce vom da mai jos acestei probleme se poate scoate o proprietate interesantă relativă la un patrulater.

Să presupunem, mai general, că în punctele de intersecţie M , M; $M_1, N_1$ ale cercului (O) cu dreptele $\Delta$ şi $\Delta_1$ ducem paralelele $m, n$; $m_1, n_1$ respectiv la două direcţii date D şi $D_1$ şi să căutăm locul geometric al vârfurilor paralelogramului format de dreptele $m, n$; $m_1, n_1$.

Vom însemna cu M, N; $M_1$, $N_1$ punctele unde dreptele $m, n$; $m_1, n_1$ taie a doua oară cercul (O). Din trapezele isoscele MNNM şi $M_1 N_1 N_1 M_1$ se vede clar că punctele M, N şi $M_1 N_1$ se găsesc pe două drepte fixe D şi $D_1$: simetricele lui $\Delta$ şi $\Delta_1$ în raport cu perpendicularele coborîte din O pe direcţiile date D şi $D_1$.

Fie E, F, G, H intersecţie perechilor de drepte $(\Delta\Delta_1)$, $(\Delta_1 D)$, $(D D_1)$, $(D_1 \Delta)$. Deasemenea fie E' F' G' H' vârfurile paralelogramului format de paralelele $m, n$; $m_1, n_1$. Considerăm următoarele curbe de gr. 4, degenerate în dreptele

$$m . n . \Delta_1 . D_1 \quad , \quad m_1 . n_1 . \Delta . D .$$

Intersecţia totală a acestor curbe e formată, cum se poate uşor constata, din următoarele 16 puncte

E F G H
E' F' G' H'
M N $M_1$ $N_1$
$\mathfrak{M}$ $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{M}_1$ $\mathfrak{N}_1$

Dar ultimele opt puncte se găsesc pe cercul O şi formează intersecţia totală a acestuia cu una din cuarticele de mai sus. Deci restul celorlalte intersecţii, adică punctele

E F G H E' F' G' H'

se găsesc pe o conică, potrivit cunoscutei *teoreme a restului* care în cazul acesta particular e foarte uşor de stabilit.

Această conică e circumscrisă patrupunctului fix EFGH. Pe de altă parte fiind circumscrisă şi paralelogramului E'F'G'H' admite ca direcţii conjugate, direcţiile date D şi $D_1$. Prin urmare, în general, conica e bine determinată prin aceste elemente şi constitue locul geometric al vârfurilor variabile E'F'G'H' ale paralelogramului.

Să observăm că, din faptul că D şi $D_1$ au fost definite ca si-

metricele lui $\Delta$ şi $\Delta_1$ faţă de două drepte ce trec prin O, acest punct se bucură de proprietatea de a fi egal depărtat de fiecare din perechile de laturi opuse FF, GH şi EH, FG ale patrulaterului EFGH. Pe de altă parte fie I, $I_1$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}_1$ mijloacele segmentelor MN, $M_1N_1$; $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$; $\mathfrak{M}_1\mathfrak{N}_1$. Ele sunt tocmai proiecţiile lui O pe laturile patrulaterului EFGH.

Pe de altă parte se constată uşor că $I\mathfrak{I}$ şi $I_1\mathfrak{I}_1$ fiind paralele cu direcţiile D şi $D_1$ trec prin centrul $\Omega$ al paralelogramului E'F'G'H'. Dar $\Omega$ e tocmai centrul conicei, loc geometric, deoarece paralelogramul e înscris în conică. Ţinând seama că această conică trece prin E, F, G, H rezultă o propoziţie reciprocă (a cărei verificare se face printr'un raţionament simplu, de reducere la absurd):

*Se dă patrulaterul* EFGH. *Fie* O *unul din punctele egal depărtate de perechile de laturi opuse şi* I, $\mathfrak{I}$; $I_1$, $\mathfrak{I}_1$ *proiecţiile lui pe laturile acestor perechi. Punctul* $\Omega$ *de intersecţie al dreptelor* $I\mathfrak{I}$ *şi* $I_1\mathfrak{I}_1$ *aparţine conicei celor nouă puncte a patrulaterului.*

In particular, când patrulaterul EFGH e circumscriptibil avem o proprietate cunoscută, privitoare la intersecţia $\Omega$ a diagonalelor unui astfel de patrulater.

D. B.

## *EXERCIŢII

**21. Să se determine un punct M pe un cerc, astfel încât raportul între produsul laturilor unui triunghiu înscris în acel cerc şi produsul dintre suma laturilor, diametrul cercului înscris acelui triunghiu şi dreapta care uneşte punctul M cu unul din vârfurile triunghiului, să fie minim.**

I. C. Savin.

R. Se cere minimul expresiunei

$$E = \frac{a\,.\,b\,.\,c}{(a+b+c)\,2r\,.\,BM} = \frac{a\,.\,b\,.\,c}{2p\,.\,2r\,.\,BM} = \frac{a\,.\,b\,.\,c}{4s\,.\,BM} = \frac{R}{BM},$$

care e dat de valoarea maximă a lui BM, adică atunci când M e diametral opus lui B (lui A sau lui C).

**22. Să se demonstreze identitatea:**

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_{2n-k}^n 2^k \left[(n-1)^{n-k} - (-1)^k (n+1)^{n-k}\right] \equiv 0.$$

Ion C. Vasiliu.

R. Luăm expresia:

$$E = \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} = \frac{d^n (x-1)^n \left[(x-1)+2\right]^n}{dx^n} = \frac{d^n (x+1)^n \left[(x+1)-2\right]^n}{dx^n}.$$

Desvoltăm după puterile lui $x-1$ şi $x+1$, derivăm şi egalăm rezultatele.

# PROBLEME PROPUSE

*4101. Care sunt numerele întregi care împărțite fie cu 4862, fie cu 6248, fie cu 8624 dau totdeauna restul 2480. După ce se vor găsi numerele se va face verificările cu unul din ele.

I. IONESCU.

*4102. Să se găsească un număr de cinci cifre format din două grupe de două numere consecutive separate prin un zero, și care se descompune în un produs de doi factori, unul de două cifre și altul de trei cifre, cel de-al doilea factor obținându-se din primul intercalând un zero între cifrele lui.

N. C.

*4103. Dacă $u_i$ este al $i$-lea termen din șirul lui FIBONACCI, să se găsiască fracțiile ireductibile egale cu:

$$\frac{u_{2n-1}}{u_{2n+1}}, \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+1}}, \frac{u_{2n-1}}{u_{2n-1}}, \frac{u_{2n+1}}{u_{2n-1}}.$$

ION B. FLORESCU.

*4104. Deux triangles égaux et superposables $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, sont inscrits dans un même cercles (0). Leurs côtés égaux se coupent en M, N, P. DÉMONTRER que :

*a)* Les perpendiculaires abaissées de ces points sur les droites $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$, concurent au centre du cercle MNP;

*b)* Le triangle MNP est semblable a $A_1B_1C_1$;

*c)* Les projections orthogonales des sommets de $A_1B_1C_1$ sur les côtés homologues du triangles $A_2B_2C_2$, et inversement, sont six points collinéaires;

*d)* Les symétriques des sommets $A_1$, $B_1$, $C_1$ par rapport aux côtés homologues de $A_2B_2C_2$, et inversement, déterminent deux triangles symétriquement égaux à $A_2B_2C_2$ et $A_1B_1C_1$, dont les orthocentres sont situés sur la circonférence (0).

V. THÉBAULT.

4105. ABC şi $A_1B_1C_1$ fiind două triunghiuri în acelaş plan, notând cu $(Ab)$, $(Ac)$, $(Ba)$, $(Bc)$, $(Ca)$, $(Cb)$ respectiv distanţele punctelor $A_1, B_1, C_1$ la laturile triunghiului ABC, să se arate că dacă:

$$\frac{(Ab)}{(Ac)} \cdot \frac{(Bc)}{(Ba)} \cdot \frac{(Ca)}{(Cb)} = 1$$

atunci dreptele $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ sunt concurente.

GH. ZAPAN.

*4106. Să se efectueze produsul de cinci factori

$$P=(x+y+z+t+s)(x+\alpha y+\alpha^2 z+\alpha^3 t+\alpha^4 s)(x+\alpha^2 y+\alpha^4 z+\alpha t+\alpha^3 s)$$
$$(x+\alpha^3 y+\alpha z+\alpha^4 t+\alpha^2 s)(x+\alpha^4 y+\alpha^3 z+\alpha^2 t+\alpha s)$$

ştiind că $\alpha^5 = 1$, iar $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4 = 0$.

M. GHERMĂNESCU.

4107. Să se arate că dacă: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt numere întregi oarecare, avem totdeauna relaţia:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)! = x_1!\, x_2! \ldots x_n!\, C^{x_2}_{x_1+x_2} \cdot C^{x_3}_{x_1+x_2+x_3} \cdots C^{x_n}_{x_1+x_2+\ldots+x_n}.$$

Generalizare.

CĂPITAN GR. ZAPAN.

4108. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sec x} + \frac{1}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

C. V. COSTĂCHESCU.

4109. Să se rezolve ecuaţia

$$8\cos^3 x - 4(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)\cos^2 x + 2(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6})\cos x - \sqrt{6} = 0.$$

IOAN C. SAVIN.

4110. Se dă punctul $M(x_0, y_0)$ în planul unei elipse de centru O şi de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Fie D şi E proecţiile respective ale lui M şi D pe polara lui M faţă de elipsă. Să se demonstreze că

$$\frac{MD}{OE} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1.$$

AD. C. GHEORGHIU.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

---

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Aldea N. N.* (3939, 78); *Brădăţan M.* (4058); *Cârstoiu D. I.* (E); *Crivăţ Vl.* (E); *Ghişoiu P.* (3948, 78); *Ionescu-Biss P. H.* (E); *Iacob St. Eug.* (3978); *Leber Margareta* (4087); *Mărgărit F.* (3939); *Margulius M.* (4052, 82, 87); *Mătieş I. V.* (A, R); *Mihăileanu N. N.* (3898, 4063, 65, E, N, R); *Parepeanu C. I.* (3939, 78, 4082, 87, 91); *Patraulea N.* (4087); *Petrescu I. I.* (3978, 4087); *Popescu-Stăneşti I. M.* (E); *Roşca St. Gh.* (3939, 78, 94, 4008, 32); *Russu D. C.* (3948, 78); *Savin C. I.* (3978, E); *Sorin St. Ef.* (4065, 87); *Şova C. I. Gr.* (4087); *Stoica D. Al.* (4064); *Ţerna Maria* (4087); *Thébault V.* (A, N, P); *Truţescu Ştefania* (3978); *Vasu V.* (3978); *Velea M.* (3978); *Velicescu N. N.* (E); *Zamfirescu Gh. I.* (4087, E); *Zane D. N.* (4042).

---

*Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

---

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

---

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

# Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

**La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.**

# GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVII

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1932

## SUMARUL

1. Géométrie et mécanique . . . . . *V. Thébault*
2. Asupra unor medii . . . . . *A. Angelescu*
3. Câteva locuri geometrice elementare . . . *Col. Gh. Buicliu*
4. Raportul Comisiunii asupra decernării premiului „General Sc. Panaitescu".
5. Note matematice: 23 — 26.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 215.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 1807, 3438, 3960, 3968, 3995.
10. Exerciţii: 23 — 25.
11. Probleme propuse: 4111 — 4120.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1932

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVII se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orăşanu**, Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 84, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 72, 76, 83, 87, 4010, 13, 24, 30, 34, 44, 45, 48, 53, 57, 59, 62, 68, 70, 71, 73, 79, 80, 85, 92, 94, 98, 99, 102, 03, 04, 06, 09, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

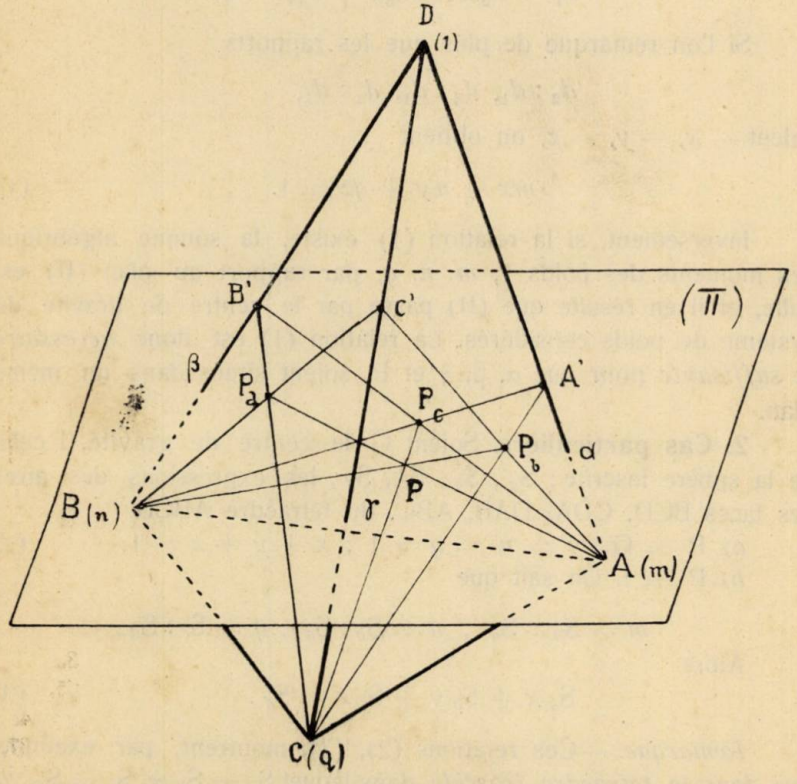
Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

Avem plăcerea a anunţa că dela 21 Fevruarie 1932 mai face parte din Societatea noastră D-l Inginer P. NEAMŢU.

# GÉOMÉTRIE ET MÉCANIQUE

**1. Théorème I.** *Soient un tétraèdre* ABCD, *un point* P *de l'espace et un plan* (Π) *qui coupe les arêtes* DA, DB, DC, *en* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. *On trace les plans* (BC, P), (CA, P), (AB, P), *qui rencontrent les arêtes* DA, DB, DC, *en* A', B', C', *et l'on pose*

$$\frac{A\alpha}{\alpha D} = x\,,\quad \frac{B\beta}{\beta D} = y\,,\quad \frac{C\gamma}{\gamma D} = z\,;\quad \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'A}} = m\,,\quad \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'B}} = n\,,\quad \frac{\overline{DC'}}{\overline{C'C}} = q.$$




*La condition nécessaire et suffisante pour que le plan* (Π) *passe par* P, *est que l'on ait la relation*

$$mx + ny + qz = 1.$$

En effet, plaçons en D, A, B, C, des poids proportionnels à 1, $m$, $n$, $q$, et soient $P_a$, $P_b$, $P_c$, les points de concours des droites (BC', CB'), (CA', AC'), (AB', BA'). On sait que les centres de

gravité des poids (1, $n$, $q$), (1, $m$, $q$), (1, $m$, $n$), appliqués respectivement en (D, B, C), (D, A, C), (D, A, B), sont $P_a$, $P_b$, $P_c$. Celui des poids 1, $m$, $n$, $q$, en D, A, B, C, coïncide donc avec le point de concours P des droites $AP_a$, $BP_b$, $CP_c$.

Dès lors, si on appelle $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$, les distances *dirigées* de D, A, B, C, au plan (Π), et si l'on écrit que la somme algébrique des moments des poids, par rapport à un plan (Π) passant par le centre de gravité est *nulle*, on a

$$d_1 + d_2 m + d_3 n + d_4 q = 0.$$

Si l'on remarque de plus que les rapports

$$d_2 : d_1,\ d_3 : d_1,\ d_4 : d_1,$$

valent $-x$, $-y$, $-z$, on obtient

$$mx + ny + qz = 1. \qquad (1)$$

Inversement, si la relation (1) existe, la somme algébrique des moments des poids 1, $m$, $n$, $q$, par rapport au plan (Π) est nulle, et il en résulte que (Π) passe par le centre de gravité du système de poids considérés. La relation (1) est donc *nécessaire* et *suffisante* pour que α, β, γ et P, soient situés dans un même plan.

**2. Cas particuliers.** Soient G le centre de gravité, I celui de la sphère inscrite ; $S_a$, $S_b$, $S_c$, $S_d$, les expressions des aires des faces BCD, CDA, DAB, ABC, du tétraèdre ABCD.

*a)* P ≡ G. $m = n = q = 1$ ; $x + y + z = 1$, (2)

*b)* P ≡ I. On sait que

$$m = S_a : S_d\ ,\quad n = S_b : S_d\ ,\quad q = S_c : S_d\ .$$

Alors

$$S_a x + S_b y + S_c z = S_d\ . \qquad (3)$$

*Remarque.* — Ces relations (2), (3), montrent, par exemple, que dans le *tétraèdre isoscèle*, dans lequel $S_a = S_b = S_c = S_d$, *le centre de gravité* G *et le centre de la sphère inscrite coïncident*[1]).

**3. Théorème II.** *Quatre plans* (Π), ($\Pi_1$), ($\Pi_2$), ($\Pi_3$), *rencontrent les arêtes* DA, DB, DC, *du tétraèdre en des points* (α, β, γ), ($\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$), ($\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$), ($\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$). *Les droites qui joignent les*

1) Propriété connue.

*isotomiques de ces points, sur les arêtes* DA, DB, DC, *aux sommets* A, B, C, *déterminent par leurs intersections unies aux sommets* A, B, C, *des points* Q, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$. *La condition nécessaire et suffisante pour que les plans* (Π), ($Π_1$), ($Π_2$), ($Π_3$), *passent par un même point* P, *est que les points* Q, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, *soient situés dans un même plan.*

Soient $(x, y, z)$, $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$, les rapports qui caractérisent les points $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$; P le point de concours des plans (Π), ($Π_1$), ($Π_2$), ($Π_3$); $Q_a$, $Q_{1a}$, $Q_{2a}$, $Q_{3a}$, . . . , $Q_c$, $Q_{1c}$, $Q_{2c}$, $Q_{3c}$, les points des intersections des droites qui unissent les isotomiques de $(\alpha, \beta, \gamma)$, . . . , $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, aux sommets opposés des faces correspondantes; Q, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, les points de concours des droites ($AQ_a$, $BQ_b$, $CQ_c$) . . . , ($AQ_{3a}$, $BQ_{3b}$, $CQ_{3c}$).

Désignons par $(\lambda, \mu, \nu)$, $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, $(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$, les rapports analogues à *m, n, q,* pour Q, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$. On voit que

$$x = \lambda, \; y = \mu, \; z = \nu \quad ; \quad x_1 = \lambda_1, \; y_1 = \mu_1, \; z_1 = \nu_1 ;$$

$$x_2 = \lambda_2, \; y_2 = \mu_2, \; z_2 = \nu_2 \quad ; \quad x_3 = \lambda_3, \; y_3 = \mu_3, \; z_3 = \nu_3 .$$

Les relations

$$mx + ny + qz = 1 \quad , \quad mx_1 + ny_1 + qz_1 = 1,$$

$$mx_2 + ny_2 + qz_2 = 1 \quad , \quad mx_3 + ny_3 + qz_3 = 1,$$

qui expriment que (Π), ($Π_1$), ($Π_2$), ($Π_3$), passent par P, entraînent les suivantes

$$m\lambda + n\mu + q\nu = 1 \quad , \quad m\lambda_1 + n\mu_1 + q\nu_1 = 1,$$

$$m\lambda_2 + n\mu_2 + q\nu_2 = 1 \quad , \quad m\lambda_3 + n\mu_3 + q\nu_3 = 1,$$

*et réciproquement.* Or les dernières relations expriment que les points Q, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, appartiennent au plan qui détermine sur les arêtes DA, DB, DC du tétraèdre, des rapports *m, n, q,* c'est-à-dire au *plan réciproque* du plan A'B'C' qui contient les intersections de ($BP_c$, $CP_b$), ($CP_a$, $AP_c$), ($AP_b$, $BP_a$), avec DA, DB, DC.

Donc Q, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, sont coplanaires et les plans (Π), ($Π_1$), ($Π_2$), ($Π_3$), concourent en un point P.

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

# ASUPRA UNOR MEDII

Să considerăm $n$ cantităţi pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi funcţiile simetrice

$$S_1 = \Sigma a_1 , S_2 = \Sigma a_1 a_2 , \ldots , S_n = a_1 a_2 \ldots a_n .$$

Cu funcţiile simetrice $S_1$ şi $S_n$ se formează mediile aritmetică şi geometrică $M_1$ şi $M_n$ a cantităţilor $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$, adică:

$$M_1 = \frac{S_1}{n} , \quad M_n = \sqrt[n]{S_n}.$$

Se ştie că:

$$(1) \qquad M_1 \geqslant M_n ,$$

având semnul egal, între aceste medii, numai când $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Cu funcţia simetrică $S_k$ se poate forma media:

$$(2) \qquad M_k = \sqrt[k]{\frac{S_k}{C_n^k}} ,$$

care pentru $k = 1$ şi $k = n$ devine media aritmetică şi media geometrică a cantităţilor $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$.

Îmi propun să extind relaţia (1) şi să arăt că:

$$(3) \qquad M_1 \geqslant M_2 \geqslant \ldots \geqslant M_n$$

neputând avea un semn egal între două medii decât dacă

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n .$$

Să arăt mai întâiu că $M_1 \geqslant M_2$, adică:

$$(n-1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 2n \Sigma a_1 a_2 \geqslant 0,$$

ceeace se vede cu uşurinţă, căci prima parte a acestei neegalităţi se mai poate scrie:

$$\Sigma (a_i - a_j)^2$$

sumă în care intră $C_n^2$ termeni pozitivi. Rezultă că nu putem avea $M_1 = M_2$ decât dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Să demonstrăm acum că $M_{k-1} \geqslant M_k$. Vom presupune că am arătat că:

$$M_1 \geqslant M_2 \geqslant \ldots \geqslant M_{k-1}.$$

Fie ecuația:

$$x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n S_n = 0$$

ale cărei rădăcini sunt $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Din (2) deducem

$$S_k = C_n^k (M_k)^k$$

așa că ecuația precedentă se mai poate scrie

$$P_n(x) = x^n - C_n^1 M_1 x^{n-1} + C_n^2 (M_2)^2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n (M_n)^n = 0.$$

Această ecuație având toate rădăcinile reale și ecuația

$$P_n^{(n-k)} = 0$$

va avea toate rădăcinile reale. Se vede cu ușurință însă că

$$P_n^{(n-k)} = n(n-1)\ldots(k+1) P_k.$$

Prin urmare ecuația

$$x^k - C_k^1 M_1 x^{k-1} + C_k^2 (M_2)^2 x^{k-2} - \ldots + (-1)^k (M_k)^k = 0$$

are toate rădăcinile reale, deci și derivata de ordinul $k-2$ a ecuației ce are ca rădăcini inversele rădăcinilor ecuației precedente, adică ecuația

$$(M_k)^k x^2 - 2 (M_{k-1})^{k-1} x + (M_{k-2})^{k-2} = 0$$

va avea rădăcinile reale. Vom avea deci

$$\left(\frac{M_{k-1}}{M_k}\right)^k \geqslant \left(\frac{M_{k-2}}{M_{k-1}}\right)^{k-2}.$$

Dar prin ipoteză $\frac{M_{k-2}}{M_{k-1}} \geqslant 1$, deci a fortiori $\frac{M_{k-1}}{M_k} \geqslant 1$, adică ceeace urmăream să dovedim. Nu putem avea $M_{k-1} = M_k$ decât dacă $M_{k-2} = M_{k-1}$; tot astfel se vede că nu putem avea $M_{k-2} = M_{k-1}$ decât dacă $M_{k-3} = M_{k-2}$ și așa mai departe până ce ajungem la concluzia că trebuie să avem $M_1 = M_2$, adică $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

*Observări.*

I. Să presupunem că şirul

$$a_1 , a_2 , \ldots , a_n , \ldots$$

este convergent şi că $\lim a_n = A$. Vom avea şi

$$\lim_{n=\infty} M_k = A.$$

In adevăr, se ştie că

$$\lim_{n=\infty} M_1 = \lim_{n=\infty} M_n = A$$

aşa că din (3) rezultă imediat că $\lim M_k = A$.

II. Să presupunem că cantităţile pozitive $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$ variază astfel încât $S_k$ rămâne constantă. In acest caz $S_{k+p}$ este maximă atunci când $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, căci

$$S_{k+p} \leqslant C_n^{k+p} (M_k)^{p+k}$$

unde $M_k$ este constantă şi nu putem avea egalitate decât dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Tot astfel se vede că dacă $S_{k+p}$ este constantă, atunci $S_k$ este minimă când $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

* * *

Media aritmetică a cantităţilor pozitive $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$ mai poate fi generalizată considerând mediile :

$$(4) \qquad M_k = \frac{\lambda_1 a_1^k + \lambda_2 a_2^k + \ldots + \lambda_n a_n^k}{\lambda_1 a_1^{k-1} + \lambda_2 a_2^{k-1} + \ldots + \lambda_n a_n^{k-1}}$$

unde $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n$ sunt numere pozitive. Şi aceste medii, ca şi cele precedente, sunt cuprinse între cea mai mică şi cea mai mare din cantităţile $a_i$ .

Imi propun să arăt că :

$$M_1 \leqslant M_2 \leqslant M_3 \leqslant \ldots$$

In adevăr, fie:

$$u_k = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \, a_i^k \, .$$

Se vede imediat că:

$$(5) \qquad u_{k-1} \, x^2 - 2u_k \, x + u_{k+1} = \Sigma \, \lambda_i \, (x - a_i)^2 \, a_i^{k-1}.$$

Cum partea a doua a acestei egalități este pozitivă oricare ar fi $x$, urmează că ecuația

$$(6) \qquad u_{k-1} \, x^2 - 2u_k \, x + u_{k+1} = 0$$

are rădăcinile imaginare sau egale, deci

$$u_k^2 - u_{k+1} \, u_{k-1} \leqslant 0,$$

adică:

$$M_k \leqslant M_{k+1}.$$

Ca să avem semnul egal între aceste medii, trebuie ca ecuația (6) să aibă rădăcinile egale, adică să existe o valoare reală pentru $x$ care să anuleze și partea doua a egalității (5), ceeace nu se poate decât în cazul când

$$x = a_1 = a_2 = \ldots = a_n \, .$$

In acest caz toate mediile $M_k$ sunt egale între ele.

Șirul $M_1 \, , M_2 \, , \ldots , M_k \, , \ldots$ este crescător și mărginit superior; el are deci o limită. Fie $a_m$ cea mai mare din cantitățile $a_1 \, , a_2 \, , \ldots , a_n \, .$

In expresia lui $M_k$ dacă împărțim fiecare termen al sumelor dela numărător și numitor cu $a_m^{k-1}$ și facem apoi pe $k$ să crească indefinit, se vede că:

$$\lim_{k=\infty} M_k = a_m.$$

*Observare.*

Și asupra acestor medii se pot pune probleme interesante referitoare la limita lui $M_k$ când $n$ crește indefinit, precum și problema de maxim și minim; las aceste probleme pe seama cititorului.

A. Angelescu.

# CÂTEVA LOCURI GEOMETRICE ELEMENTARE

In *Gazeta Matematică* Vol. XXXIII pagina 378 s'a dat o frumoasă soluție geometrică problemei 2546, propusă de D-l L. HAMBURGER, cu următorul enunț:

*Fie* B' *și* C' *picioarele înălțimelor duse din vârfurile* B *și* C *ale triunghiului* ABC. *Se consideră centrul* I' *al cercului înscris în triunghiul* AB'C'. *Cercul circumscris triunghiului* ABC *fiind dat, se cere:*

a) *Locul geometric al centrului* I' *când latura* BC *este fixă în cercul circumscris* ABC, *iar vârful* A *mobil pe acest cerc.*

b) *Când vârful* A *e fix iar* BC *o coardă de lungime constantă în cercul* ABC.

Imi propun ca în cele ce urmează să dau problemei 2546 o soluție diferită de cea dată în volumul XXXIII și să caut și locul altor puncte de ale figurei.

Voi păstra notațiunile din figura care a servit la rezolvarea problemei 2546 pentru a se putea urmări mai ușor legătura dintre acea problemă și cele ce urmează.

**Problema I.** *Triunghiul* ABC *are baza* BC *fixă și unghiul* A *constant. Fie întâlnirea înălțimelor* BB', CC'; D *mijlocul lui* BC; O' *centrul cercului* AB'C'; $A'_1$ *intersecția lui* DO' *cu bisectoarea* $AA_1$ *a unghiului* A; $A_1$ *mijlocul arcului* $BA_1C$; $D'_1$ *intersecția cercului* O' *cu* DO'.

1°. *Locul lui* $A'_1$. Se știe că AH este dublul lui OD, deci DOAO' este paralelogram. Din triunghiul isoscel $A_1OA$ și din considerarea paralelelor $OA_1$, AH tăiate de $AA_1$ se scoate:

$$(1) \qquad \sphericalangle OAA_1 = \sphericalangle OA_1A = \sphericalangle A_1AH$$

iar din considerația paralelelor OA, DO' tăiate de $AA_1$

$$(2) \qquad \sphericalangle DA'_1A_1 = \sphericalangle OAA_1 = \sphericalangle AA'_1O'.$$

Din (1) și (2) se deduce că triunghiurile $A_1DA'_1$ și $AOA'_1$ sunt isoscele, deci

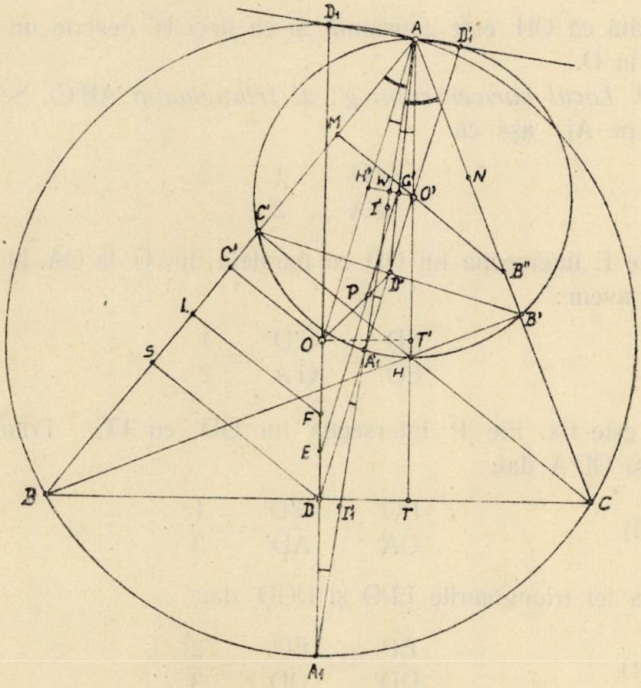
$$DA'_1 = DA_1 = C^t.$$

Rezultă că $A'_1$ descrie un cerc cu centrul în D și cu raza $DA_1$. Acest cerc este tangent în $A_1$ cercului O.

2°. *Locul lui* $D'_1$. Unghiul $A'_1AD$ este drept ca fiind înscris în jumătatea cercului O'. Deci $AD'_1$ este bisectoarea exterioară a unghiului A și trece prin $D_1$, diametral opus lui $A_1$ în cercul O. Unghiurile egale $AA'_1D'_1$, $AA_1D_1$ au suplimentele lor $AD'_1D$, $AD_1D$ egale. Triunghiul $D_1DD'_1$ este isoscel și deci

$$DD'_1 = DD_1 = C^t ,$$

care arată că $D'_1$ descrie un cerc cu centrul în D și cu raza $DD_1$. Acest cerc este tangent în $D_1$ cercului O și în $D'_1$ cercului O'.




3°. *Locul lui* O'. AH fiind constant iar O' fiind la mijlocul lui AH se vede imediat că O' vă descrie cercul O deplasat cu lungimea AO' pe direcția lui OD.

Locul lui O' se poate deduce și observând că în paralelogramul DOAO' vârful D este fix iar latura DO' constant egală cu OA.

4°. *Locul lui* D', *mijlocul lui* B'C'. In cercul AB'C' având diametrul AH constant iar unghiul A fiind şi el constant coarda B'C' este de mărime constantă. Dar B'C' este coardă şi în cercul BC'B'C, rezultă că

$$DD' = \sqrt{DC^2 - D'B'^2} = C^t$$

şi deci D' descrie un cerc cu centrul în D.

5°. *Locul lui* H', *ortocentrul lui* AB'C'. De oare ce DO' şi DD' sunt constante rezultă că O'D' este constant. Dar

$$AH' = 2O'D' = C^t$$

care arată că OH' este constantă şi că deci H' descrie un cerc cu centrul în O.

6°. *Locul baricentrului g', al triunghiului* AB'C'. Se ştie că $g'$ este pe AD' aşa că

$$\frac{g'D'}{g'A} = \frac{1}{2}.$$

Fie E intersecţia lui OD cu paralela din G' la OA. In trapezul DOAG' avem:

$$\frac{ED}{EO} = \frac{G'D'}{G'A} = \frac{1}{2}$$

deci E este fix. Fie P intersecţia lui OD' cu EG'. Triunghiurile PD'G' şi OD'A dau

$$(3) \qquad \frac{PG'}{OA} = \frac{G'D'}{AD'} = \frac{1}{3}.$$

La fel triunghiurile EPO şi DOD' dau

$$(4) \qquad \frac{EP}{DD'} = \frac{EO}{OD} = \frac{2}{3}.$$

Din (3) şi (4) se scoate

$$\frac{PG'}{OA} = \frac{EP}{2DD'} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \qquad \frac{PG' + EP}{OA + 2DD'} = \frac{EG'}{OA + 2DD'} = \frac{1}{3}.$$

Cum OA şi DD' sunt constante rezultă că G' descrie un cerc cu centrul în E şi cu raza egală cu o treime din suma $OA + 2DD'$.

7°. *Locul lui* I'. S'a văzut la 1° că $A'_1$ se află pe cercul O', cum însă $A'_1$ e şi pe bisectoarea unghiului A, urmează că $A'_1$ este mijlocul arcului $B'A'_1C'$ din cercul AB'C'. După o proprietate cunoscută şi uşor de demonstrat urmează că

$$A'_1I' = A'_1B' = A'_1C' = C^t$$

căci B'C' fiind constantă şi $A'_1B'$ este constantă în cercul de mărime constantă O'. Dar $A'_1$ descrie un cerc, după cum s'a văzut la 1°. Cum $I'A'_1$ trece prin punctul fix $A_1$ de pe acel cerc, rezultă că I' descrie un melc al lui PASCAL având pe $A_1$ ca punct dublu şi pe $OA_1$ ca axă de simetrie, rezultat găsit pe altă cale în soluţia problemei 2546.

8°. *Locul lui* $I'_1$ *centrul cercului exînscris unghiului* A *în triunghiul* AB'C'. Se ştie că $A'_1$ este centrul cercului circumscris patrulaterului $I'_1B'I'C'$. Deci

$$A'_1I'_1 = A'_1I' = C^t$$

adică $I'_1$ descrie acelaşi melc al lui PASCAL ca şi I'.

9°. *Locul lui w, centrul cercului celor 9 puncte al triunghiului* AB'C'. Se ştie că *w* este la mijlocul lui O'H'. Paralela din *w* la OA' taie pe OD în mijlocul său F. In trapezul DOH'O' avem

$$wF = \frac{OH' + DO'}{2} = C^t$$

deci *w* descrie un cerc cu centrul în F.

10°. *Locul mijloacelor laturilor triunghiului* AB'C'. Locul lui D' s'a găsit la 4°. Fie M şi N mijloacele lui AB' şi AC', B'', C'' mijloacele lui AC şi BC. Fie încă L mijlocul lui BM iar S proecţia lui D pe AB. Triunghiurile dreptunghice BSD, C''MB'' sunt egale căci DS şi B''M sunt egale cu jumătatea lui CC' iar BD şi B''C'' egale după cum se ştie. Deci

$$BS = C''M$$

de unde rezultă că L este mijlocul lui SC''. In trapezul DSC''O perpendiculara în L pe SC'' va trece prin mijlocul F al lui OD. Rezultă

$$FM = FB = C^t .$$

Se arată la fel că FN este egal cu FC. Deci M şi N descriu un cerc cu centrul în F.

**Problema II.** *Triunghiul* ABC, *înscris în cercul fix* O, *are vârful* A *fix şi unghiul* A *constant.*

11°. *Locul lui* O'. Coarda BC din cercul O fiind constantă distanţa OD este constantă. Deci O' descrie cercul cu centrul în A şi cu raza

$$\overline{AO'} = \overline{OD} = C^t .$$

12°. *Locul lui* H este un cerc concentric cu precedentul şi cu raza

$$AH = 2OD.$$

13°. *Locul lui* $A'_1$. Triunghiul $AOA_1$ tăiat de $DA'_1$ paralelă a OA dă

$$\frac{AA'_1}{AA_1} = \frac{OD}{OA_1} = C^t .$$

Deci $A'_1$ descrie un cerc omotetic cu O, centrul de omotetie fiind A.

14°. *Locul lui* $D'_1$. Din triunghiul $DD_1D'_1$ tăiat de AO', paralelă la $DD_1$, se scoate

$$\frac{AD'_1}{D_1D'_1} = \frac{AO'}{D_1O} = C^t .$$

Deci $D'_1$ descrie un cerc omotetic cu O. Se poate arăta că acest cerc este tot cel dela 13°. In adevăr din triunghiurile dreptunghice asemeni $A'_1AD'_1$, $A_1AD_1$ se scoate

$$\frac{AD'_1}{AD_1} = \frac{AA'_1}{AA_1}$$

care arată centrul şi raportul de omotetie sunt tot cele dela 13°.

15°. *Locul lui* I' *şi* $I'_1$. Cercul $AB'HA'_1C'$ de diametru constant este constant ca mărime, deci şi coarda B'C' este constantă, ea

subîntinzând unghiul constant A. Urmează că lungimile egale $A'_1B'$, $A'_1C'$, $A'_1I'$, $A'_1I'_1$ sunt constante. Cum s'a găsit la 13° că $A'_1$ descrie un cerc, care trece neapărat prin A, urmează că I' şi $I'_1$ descriu un melc al lui PASCAL cu punctul dublu în A şi cu axa pe direcţia OA.

16°. *Locul lui* H'. In cercul constant O' distanţa O'D' este constant, deci AH' este constant şi cum AH' trece prin O rezultă că H' este un punct fix.

17°. *Locul lui* D'. Este un cerc, egal cu locul lui O', şi deplasat cu O'D' pe direcţia AO.

18°. *Locul lui* G'. De oarece raportul G'O' la G'H' este constant, G' va descrie un cerc omotetic cu locul lui O.

19°. *Locul lui* $w$ va fi pentru acelaşi motiv tot un cerc omotetic cu locul lui O'.

20°. *Locul lui* T, piciorul înălţimei AH. Fie T' proecţia lui O pe AH. Locul lui T' este cercul de diametru AO, cum

$$TT = OD = C'$$

urmează că T descrie un melc PASCAL cu punctul dublu în A şi cu axa pe direcţia OA.

Mă opresc aici cu locurile de căutat. Atât la problema I cât şi la II se mai pot găsi pe cale geometrică locul a încă multe puncte remarcabile de ale triunghiurilor ABC şi AB'C'. Corespondenţii noştri vor putea deduce, din consideraţiile de până aici, bogăţia de proprietăţi la care conduc unele din problemele, în aparenţă simple, care se propun în gazetă. Aşa bunăoară locurile geometrice examinate până aici, şi din care unele sunt probabil cunoscute, au pus în evidenţă proprietăţile că

α) Linia DO' taie bisectoarele unghiului A, în 2 puncte de pe cercul AB'C'.

β) Mijlocul mediatricei OD este cercul circumscris patrulaterului BMNC.

Aceste proprietăţi mi se par noi, nu-mi amintesc să le fi întâlnit undeva.

COL. GH. BUICLIU.

# RAPORTUL COMISIUNII

## ASUPRA DECERNĂRII PREMIULUI „GENERAL SC. PANAITESCU“ PE ANUL 1930 — 1931

Comisiunea însărcinată cu acordarea premiului «GENERAL SC. PANAITESCU», cercetând revistele şi publicaţiunile de specialitate, a constatat următoarele:

In *Revista Aeronautică* nu există nici un articol care să întrunească condiţiunile acordării acestui premiu.

In *Revista Artileriei* idem;

In *Revista Geniului* este de semnalat o serie de articole ale CPT. VASILE EMANUEL relativ la *„Măsurători pe teren“*, pe care însă nu-l putem propune pentru premiu.

In consecinţă, propunem ca pentru anul 1930 — 1931 să se acorde premiul *„Revistei Geniului“*, revista Armei din care a făcut parte, acel care a creat premiul.

Comisiunea pentru premiul „GENERAL SC. PANAITESCU“

ING. ION ANTONIU, CĂPIT. ING. GR. ZAPAN.

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea Generală din 2 Februarie 1932.

# NOTE MATEMATICE

23. *Al doilea congres al matematicienilor români.*

Cluj, 20 Februarie 1932

*Stimat Domn,*

In baza hotărîrei primului congres al matematicienilor români, cel de al doilea congres va avea loc la *Turnu-Severin* dela 5 Mai 1932 la 10 Mai 1932 (în vacanţa de Paşte).

Societatea Română de Matematici mi-a dat însărcinarea să fac lucrările pregătitoare pentru acest congres.

Având în vedere marea criză în care ne sbatem, am decis să nu lăsăm nici o cheltuială la întâmplare. De aceea am fixat cotizaţia

de participare a fiecărei persoane la 600 lei, în care se cuprinde întreţinerea completă (casă şi masă) precum şi toate taxele de excursiuni, pe toată durata congresului.

Pe de altă parte, D-l Ministru al Comunicaţiilor a promis că va acorda o reducere de 50% pe C. F. R. la participanţii la Congres.

Din punct de vedere ştiinţific, sperăm că reuşita va fi analoagă celei a congresului din Cluj din 1929. In adevăr, ni s'a anunţat de pe acum participarea următorilor matematicieni străini:

Din Franţa: P. MONTEL şi A. DENJOY (Paris); MANDELBROJT (Clermont).

Din Polonia: W. SIERPINSKI, F. LEJA, O. NIKODYM (Varşovia); M. BIERNACKI (Poznan); A. ROSENBLATT, HOBORSKI (Cracovia); S. BANACH, RUZIEWICZ, KURATOWSKI, STOZEK (Lwow); S. KEMPISTY şi S. ZYGMUND (Vilna).

Din Yugoslavia: M. PETROVICI, N. SALTYKOW, J. KARAMATA, PEYOVICI (Belgrad).

E probabil că vor veni şi alţi străini ca DE DONDER şi A. ERRERA din Bruxelles, etc.

Sperăm că la şedinţa de deschidere vor lua cuvântul câţiva D-ni Miniştri. Iar congresul va comporta o excursiune pe Dunăre cu vizitarea insulei Ada-Kaleh şi a Porţilor de Fer; apoi vizita ruinelor romane, a piciorului podului lui Traian, etc.

Lucrările ştiinţifice se vor grupa în conferinţe generale şi în următoarele secţiuni:

Secţia I. Teoria mulţimiilor şi fundamentele matematicei.

Secţia II. Algebra, Analiza şi Teoria Funcţiunilor.

Secţia III. Geometria.

Secţia IV. Mecanica, Astronomia, Fizica Matematică, Statistica.

Secţia V. Istoria şi filosofia matematicei.

Secţia VI. Didactica matematicei.

Lucrările secţiei VI prevăd o discuţie amplă asupra programului cel mai nimerit al învăţământului matematicei în şcoala secundară.

Vă rugăm să binevoiţi a ne da ajutorul Dv. pentru reuşita congresului; înscriindu-vă ca participant şi făcând comunicări. Durata unei comunicări e cel mult 20 minute.

Lucrările congresului vor fi publicate în un volum al revistei *Mathematica*.

Pentru buna organizare a congresului, vă rugăm să binevoiți a ne răspunde *cel mai târziu până la 10 Aprilie 1932,* dacă doriți să luați parte la congres, precum și dacă doriți a face vre-o comunicare, trimițându-ne titlul.

Cotizațiile și un rezumat în 5 — 10 rânduri al comunicărei trebuesc trimise pe adresa mea până la *20 Aprilie,* cel mai târziu, ca să putem lua măsurile de găzduire și de imprimarea programului.

In speranța că vom avea ajutorul Dv., vă rog să binevoiți a primi încredințarea sentimentelor cele mai distinse.

In numele Comitetului de Organizare al celui de al Doilea Congres al Matematicienilor Români

PROF. PETRE SERGESCU
Universitatea Cluj.

P. S. In Aprilie se va trimite celor inscriși o circulară cu preciziuni asupra organizărei pe zile și ore a congresului.

24. *Asupra numărului 5041.* D-l V. THÉBAULT, căutând patratele *abcd* în care

$$a + b = c + d$$

a găsit în articolul publicat la pagina 41 Vol. XXXVII numărul

$$N = 5041 = 71^2$$

și a observat la finele articolului că

$$N = 7! + 1 = 71^2.$$

Această din urmă proprietate a numărului 5041, enunțată în o formă mai generală, am găsit-o și eu mai de mult și am propus-o în *Gazeta Matematică* sub numărul 2824 cu enunțul: *Să se găsească numărul întreg* **ab** *format din numerele* **a** *și* **b** *scrise unul după altul știind că*

$$a! + b = (ab)^2.$$

Această problemă are ca soluțiune unică

$$7! + 1 = (71)^2.$$

Soluția problemei 2824 este publicată în *Gazeta Matematică* Vol. XXVI pagina 334.

Posed și soluția în numere întregi a ecuației

$$a! + b! = (ab)^2$$

pe care o voi propune mai târziu în *Gazeta Matematică*.

COL. GH. BUICLIU.

25. *Asupra problemei 3967.*

In soluția acestei probleme (pag. 472, Vol. XXXVI) se presupune că trenurile nu s'au întâlnit în primele 6 ore.

Cum enunțul nu precizează acest lucru, înseamnă că se poate studia și cazul când trenurile s'ar fi întâlnit după $t < 6$ ore.

Insemnând cu $v_1$ și $v_2$ respectiv viteza trenurilor, distanța parcursă în 6 ore este 6 $(v_1 + v_2)$.

Distanța dintre trenuri este deci 4 $(v_1 + v_2)$.

Atunci drumul întreg este $2(v_1 + v_2) = 1000$,
de unde:

$$v_1 + v_2 = 500 \quad , \quad t = 2 \text{ ore.}$$

Punând și condiția a treia, găsim soluțiile

$$v_1 = 275 \text{ km/oră și } v_2 = 225 \text{ km/oră}$$

neverosimile în datele problemei.

N. N. MIHĂILEANU.

26. *Asupra exercițiului 72 — XXXV — 479.*

Acest exercițiu este identic cu exercițiul 1 — «G. M» — XXXV — 39 și trebuie observat că: $41^2 = 1681$ iar nu 1081, unde pot fi considerate și soluțiile:

$$0000 \quad , \quad 0100 \quad , \quad 0400 \quad , \quad 0900.$$

HARALAMB P. IONESCU-BISS
Student-Matematici (Oltenița).

# BIBLIOGRAFIE

**Bulletin of the American Mathematical Society.** Vol. XXXVII, No. 12 December 1931. New-York. Ideale în algebra lineară, de C. C. MACDUFFER. O notă asupra elementelor primitive indempotente ale algebrei matricelor totale, de F. S. NOWLAN. Reprezentarea unui grup ca grup de permutații transitive, de G. A. MILLER. O notă asupra ordinalelor transfinite, de BEN DUSHNIK. Asupra aplicațiunii unei formule teta la reprezentarea în forme binare cuadratice, de G. PALL. Partitițiuni cuadratice I, de E. T. BELL. Produse simetrice ale spațiilor topologice, de K. BORSUK & S. ULAM. Asupra aplicării teoremei lui MARKOFF la probleme de aproximațiuni în domeniul complex, de D. JACKSON. Notă asupra produselor de sâmburi simetrici ai lui VOLTERA și FREDHOLM, de I. M. BLUMENTHAL.

**Mathesis** *). Tomul XLVI. No. 1, lanuarie 1932. Gembloux. Asupra dreptelor care divid în un acelaș raport trei segmente coplanare și asupra triunghiurilor paralelogice, de R. GOORMAGHTIGH. Curiozități aritmetice de V. THÉBAULT. Asupra ecuațiilor vectoriale elementare, de R. DEAUX. Asupra numerelor de forma $A = 3a^2 + b^2$ de G. LAMBERT. Asupra unei ecuații recurente, de L. BRUWIER. Asupra reciprocităților spațiului, de J. VANDENBERGHE.

**Boletin matematico.** Anul IV, No. 11, lanuarie 1932. Buenos-Aires. Scurtă privire asupra istoricului semnelor algebrice de † TR. DORDEA. Viitorul Buletinului matematic, de B. I. BAIDAFF.

**Anales de la Sociedad cientifica Argentina.** Tomul CXII, Fascicola I, lanuarie 1932. Buenos-Aires. Liniile de influiență și statica naturală, de O. GOTTSCHALK.

**Journal de mathématiques elementaires** publié par H. VUIBERT. Anul 56, No. 9, Februarie 1932. Paris. Problema lui MALFATTI, de L. GÉRARD.

**Revista matematică din Timișoara.** Anul XI, No. 12, Fevruarie 1932, Timișoara. Exprimarea elementelor unui triunghiu în funcție de razele cercurilor exînscrise, de H. D. IONESCU.

A. DEVRESSE. *Le problème de Pothénot résolu à l'aide de la règle seulement.* Bruxelles. (Supliment la *Mathesis*).

*) Prix de l'abonament payable par anticipation :

Pour l'étranger : fr. 30 (6 belgas), plus 10 fr. pour le port.

On s'abonne en versant le prix de l'abonnement. par chèque, ou par mandat, au compte chèque postal

239385, MATHESIS, BRUXELLES,

avec la mention : *Pour abonnement à Mathesis.*

ALFRED ERRERA. *Les mathématiques en Belgique de 1830 à 1930* (Extras din *Livre d'or du Centenaire de l'Indépendance Belge*. (Supliment la *Mathesis*). Bruxelles 1931.

RADU BĂDESCU. *Sur le troisième théorème de* FREDHOLM *relatif à une équation intégrale particulière.* (Extras din *Mathematica*). Vol. VI. Cluj 1931.

RADU BĂDESCU. *Sull'equazione di* FREDHOLM *nel campo complesso.* (Extras din *Bolletino dell'Unione Matematica Italiana*). Bologna 1931.

RADU BĂDESCU. *Sur une équation fonctionelle.* (Extras din *Bulletins d la classe de sciences de l'Académie royale de Belgique*). Bruxelles 1930.

RADU BĂDESCU. *Résolution d'une équation fonctionelle et fonctions itératives généralisées.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris*). Paris 1931.

G. CĂLUGĂREANU. *Asupra unor serii cu termeni complexi.* (Extras din *Gazeta Matematică*). Bucureşti 1932.

G. CĂLUGĂREANU. *Sur un complément au théorème de* E. BOREL. (Extras din *Mathematica*). Cluj 1931.

G. CĂLUGĂREANU. *Sur la condition nécessaire et suffisante pour l'univalence d'une fonction dans un cercle.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*). Paris 1931.

EMILE PICARD. *Quelques applications analitiques de la Théorie des courbes et des surfaces algébriques.* Paris, 1931, Gauthier-Villars et Cie.

Acest volum al ilustrului geometru PICARD e fascicula IX din *Cahiers scientifiques*, publicate sub direcţia D-lui GASTON JULIA. El cuprinde lecţiunile făcute de autor la Sorbona în anul 1930. Ceeace caracterizează aceste lecţiuni este faptul, instructiv pentru matematicii actuali, că leagă chestiile studiate astăzi cu metodele moderne de chestiile studiate acum vreo 50 de ani. Funcţiuni abeliane, inversiunea integralelor, suprafeţele lui RIEMANN de o parte, uniformizarea curbelor algebrice, functiuni automorfe, integrale de diferenţiale totale şi integrale duble în legătură cu suprafeţele algebrice de altă parte. Toate acestea, precum şi multe alte chestiuni strâns legate cu ele, expuse clar, elegant, desăvârşit.

G. Ţ.

E. CARTAN. *Leçons sur la Géométrie projective complexe.* Paris, 1931, Gauthier-Villars et Cie.

Acest volum, ca şi cel precedent, face parte din *Cahiers scientifiques*, constituind fascicula X. Şi el cuprinde lecţii făcute la Sorbona. Lecţii noui cu metode noui. Se cuprind în ele chestiuni elementare privitoare la transformări

lineare. Se cuprind chestii privitoare la geometria neeuclidiană, Se cuprind mai ales vederi noi asupra spaţiilor riemaniane şi a geodezicelor lor. O varietate de chestiuni de o bogăţie rară, studiate sistematic şi elegant. Geometria, analiza şi teoria grupurilor se întâlnesc în aceste lecţiuni sugestive. Până şi teoria numerelor e atinsă în treacăt.

Volumul merită să fie studiat de tinerii geometri care vor să se iniţieze în câmpul nou al geometriei superioare.

G. Ţ.

## CERERI

215. Care sunt aritmeticele române în manuscris sau tipărite, în care se tratează adunarea, scăderea şi înmulţirea, dar nu se vorbeşte de împărţire.

I. I.

## DIVERSE

Societatea română de Ştiinţe, secţiunea matematică, a ţinut şedinţă în seara zilei de 8 Fevruarie, când D-l O. Onicescu a făcut o comunicare despre teoria câmpului unitar.

## PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1807. *Printre toate triunghiurile dreptunghice de aceiaşi arie, care este acela în care suma medianei, a înălţimei şi a bisectoarei care pleacă din vârful unghiului drept este cât mai mare? Când ele sunt laturile unui triunghiu de arie cât mai mare?*

I. Ionescu.

Fie $a$ ipotenusa, $b$ şi $c$ catetele şi $s^2$ aria triunghiului dreptunghic ABC. Să însemnăm cu $m$, $h$ şi $t$ mediana, înălţimea şi bisectoara pornind din A. Se cunosc relaţiunile:

$$s^2 = \tfrac{1}{2}bc = \tfrac{1}{2}ah \ , \ m = \tfrac{1}{2}a \ , \ t = bc\sqrt{2}/(b+c) \ , \ a^2 = b^2 + c^2$$

Dar:

$$(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 4s^2,$$

$$\therefore \quad b + c = \sqrt{a^2 + 4s^2}\,.$$

Inlocuind găsim:

$$m = \tfrac{1}{2}a\,,\quad h = 2s^2/a\,,\quad t = 2\sqrt{2}s^2/\sqrt{a^2+4s^2}\,.$$

Să punem:

$$a = 2sx.$$

Factorul $x$ este evident pozitiv. Mai mult încă, el nu se poate scoborî sub 1. In adevăr, pentru o ipotenusă dată $a$, aria triunghiului dreptunghic nu poate fi oricât de mare. Dacă ipotenusa BC e dată, vârful a nu se poate mişca decât pe semicercul descris pe BC ca diametru. Inălţimea cea mai mare va fi a triunghiului care are vârful la mijlocul semicercului, adică $h = \frac{1}{2}a$. Deci avem:

$$s^2 \leqslant \tfrac{1}{2}\,.\,a\,.\,\tfrac{1}{2}a \quad,\quad 4s^2 \leqslant a^2,$$

$$\therefore \quad a \geqslant 2s,$$

pe care comparând-o cu egalitatea de mai sus rezultă imediat $x \geqslant 1$.

Cu această restricţie $m$, $h$, $t$ devin:

$$m = sx\,,\quad h = s/x\,,\quad t = \sqrt{2}s/\sqrt{x^2+1}\,.$$

Suma S, care se cere a o face cât mai mare, este dar:

$$S = m + h + t = sx + s/x + \sqrt{2}s/\sqrt{x^2+1},$$

$$\therefore \quad S = s\left[(x^2+1)/x + (\sqrt{2}/\sqrt{x^2+1})\right].$$

Cum $s$ rămâne invariabil, rămâne să studiem variaţiunea parentezei celei mari când $x$ ia valori pozitive peste 1. Să punem:

$$y = (x^2+1)/x + (\sqrt{2}/\sqrt{x^2+1})\,.$$

Se vede imediat că nu poate fi vorba decât de un maximum relativ, căci pentru $x = +\infty$ avem $y = +\infty$, ceeace se vede şi direct, căci dacă luăm $h$ foarte mic, cum $s$ e dat, va trebui să luăm $a$ foarte mare şi deci $m$ care intră în S va fi foarte mare. Dacă $x$ tinde către 0 prin valori pozitive, y tinde către $+\infty$. Reese de aci

că $y$ are neapărat un minimum pentru $x > 0$. Pentru $x = 1$ (limita lui inferioară), găsim $y = 3$. De altfel se vede că $y > 0$ pentru valori pozitive ale lui $x$. Pentru a studia variațiunea lui $y$ să luăm derivata lui în raport cu $x$. Găsim:

$$y' = \frac{2x^2 - (x^2 + 1)}{x^2} - \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2x}{(\sqrt{x^2 + 1})^3} = \frac{x^2 - 1}{x^2} - \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{x^2 + 1})^3},$$

$$\therefore \quad y' = \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x^2 + 1})^3 - \sqrt{2}\, x^3}{x^2 (\sqrt{x^2 + 1})^3}.$$

Se vede că pentru $x < 1$, $y' < 0$ și că pentru $x = 1$ avem $y' = \frac{1}{2}$. Așa dar, dela $x = 1$ înainte $y$ începe să descrească. Pentru această valoare $y = 3$. Găsim atunci $S = 3s$, $m = h = t$. Deci triunghiul dreptunghic este isoscel. Acest triunghiu are dar S mai mare decât cele apropiate de el.

Pentru a vedea dacă nu sunt alte maxime relative, să anulăm pe $y'$. Găsim că trebuie să avem:

$$(x^2 - 1)(\sqrt{x^2 + 1}) = \sqrt{2}\, x^3,$$

$$\therefore \quad (x^2 - 1)^2 (x^2 + 1)^3 = 2 \cdot x^6,$$

$$\therefore \quad x^{10} + x^8 - 4x^6 - 2x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

Pentru $x = 0$, $x = 1$ și $x = \sqrt{2}$ prima parte devine respectiv $+ 1$, $- 2$, $+ 11$. Ecuația are dar o rădăcină pozitivă între 0 și 1 și alta între 1 și $\sqrt{2} = 1{,}4141\ldots$ Ea nu mai are alte rădăcini pozitive, căci nu are decât două variațiuni. Rădăcina dintre 0 și 1 este străină, introdusă prin ridicarea la patrat, căci am arătat că $y'$ este necontenit negativ pentru $0 < x < 1$. Reiese că cea mai mare rădăcină pozitivă este singura admisibilă și ea corespunde deci minimului de care am vorbit. Dacă se calculează această rădăcină se găsește $1{,}13\ldots$, așa că pentru $a = 2{,}26\ldots s$, suma S are un minimum, care calculat este de $2{,}931\ldots s$, deci nu tocmai depărtat de maximum relativ găsit 3S.

Pentru a rezolva partea a doua a problemei trebue să vedem dacă, și când, cu mediana, înălțimea și bisectoara unui triunghiu dreptunghic putem face un triunghiu. Dintre toate aceste linii cea mai mare este mediana. In adevăr, din valorile lor în funcție

de $s$ și $x$, se vede imediat că pentru $x > 1$ avem $sx > s/x$, deci $m > h$, și $t < s < sx$. Cea mai scurtă este $h$, căci $s/x < s$, pentru $x > 1$. Pentru ca triunghiul să poată exista e iar destul ca să avem:

$$m < h + t,$$

pe care înlocuindu-le cu valorile lor găsim:

$$sx < s/x + \sqrt{2}s/\sqrt{x^2 + 1},$$

$$\therefore \quad (x^2 - 1)/x < \sqrt{2}/\sqrt{x^2 + 1},$$

$$\therefore \quad (x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1} < \sqrt{2}\, x.$$

Cum $x > 1$ toți termenii sunt pozitivi și putem ridica la patrat. Obținem:

$$(x^2 - 1)^2 (x^2 + 1) > 2x.$$

$$\therefore \quad x^6 - x^4 - 3x^2 + 1 < 0.$$

Pentru $x = 0$, $x = 1$ și $x = 2$ prima parte devine $+1, -2, +37$. De aci rezultă că ecuația are două rădăcini pozitive, una între 0 și 1, care nu ne interesează, și alta între 1 și 2. Alte rădăcini pozitive nu mai sunt, căci ecuația are numai două variațiuni. Dacă calculăm rădăcina, găsim $x = 1{,}47\ldots$ Pentru $x$ superior acestei rădăcini, prima parte a ecuației are același semn ca și pentru $x = \infty$, adică $+$ și condiția nu poate fi îndeplinită. Deci trebuie să avem $1 \leqslant x \leqslant 1{,}47\ldots$ Limitei inferioare îi corespunde un triunghiu dreptunghic isoscel, celei superioare un triunghiu redus la o dreaptă, deci cu aria nulă. Să căutăm dar între aceste limite ale lui $x$ care este triunghiul cel mai mare pe care l'am putea forma cu $m, h, t$.

Fie în acest triunghiu $\alpha$ unghiul opus laturii $t$. Aria A a lui va fi:

$$A = \tfrac{1}{2}\, mh \sin\alpha,$$

și înlocuind $m$ și $h$ prin valorile lor, găsim:

$$A = \tfrac{1}{2}\, sx \,.\, (s/x) \sin\alpha = \tfrac{1}{2}\, s^2 \sin\alpha.$$

De aci se vede că A va fi cel mai mare când $\sin\alpha$ va fi cel mai mare. Insă în triunghiul format avem:

$$t^2 = m^2 + h^2 - 2mh\cos\alpha = m^2 + h^2 - 2s^2\cos\alpha,$$

$$\therefore \quad \cos\alpha = (m^2 + h^2 - t^2)/2s^2.$$

Insă $m \geqslant t$ şi prin urmare $\cos\alpha$ e totdeauna pozitiv. Deci $\alpha \leqslant \frac{1}{2}\pi$ şi prin urmare, când $\sin\alpha$ e cel mai mare, $\cos\alpha$ va fi cel mai mic. Cum $s$ rămâne constant, se vede că suntem conduşi să studiem minimum lui $(m^2 + h^2 - t^2)$. Dacă înlocuim aceste linii prin valorile lor în funcţie de $s$ şi de $x$, şi lăsăm la o parte factorul comun $s^2$, ca fiind constant, suntem conduşi să căutăm minimum lui $z$ dat de:

$$z = x^2 + (1/x^2) - [2/(x^2 + 1)]. = (x^4 + 1)/x^2 + [2/(x^2 + 1)].$$

Ca să studiem variaţia lui $z$, să luăm derivata lui. Avem:

$$z' = \frac{4x^3 . x^2 - 2x(x^4 + 1)}{x^4} + \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x(x^4 - 1)}{x^4} + \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Sub această formă se vede că $z' > 0$ dacă $x \geqslant 1$. Deci $z$ creşte necontenit când $x$ creşte. Aşa dar avem minimum lui $z$ când $x = 1$, adică pentru cazul triunghiului dreptunghic isoscel. Dar atunci $m = h = t$ şi triunghiul format cu ele este echilateral. Deci $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ şi avem:

$$A = \tfrac{1}{2}s^2 \sin\tfrac{1}{3}\pi = \sqrt{3}s^2/4 = 0{,}433\ldots s^2.$$

*Notă.* Am propus această problemă în scopul ca să arăt corespondenţilor *Gazetei Matematice* că nu toate maximele şi minimele referitoare la triunghiurile dreptunghice corespund triunghiurilor isoscele, cum se crede de mulţi. Problema a fost încercată de foarte mulţi corespondenţi însă nu s'a ţinut seamă că *«Algebra e generoasă»* căci dă mai mult de cât i se cere, şi de aceia s'au găsit maxime incompatibile cu natura geometrică a problemei. Nu citez numele celor ce au cercetat chestiunea aceasta din cauză că unii sunt doctori în matematici, ingineri şefi şi profesori de matematici, pe care nu-i mai interesează asemenea chestiuni.

I. I.

PROBLEMA 3438. *Un avion sboară cu o viteză* u, *uniformă, urmând o traectorie rectilină în planul orizontal de altitudine* H. *Un tun antiaerian, în planul de altitudine „zero", trage un proectil în avion cu viteza inițială* $V_0$. *Cunoscând în momentul tragerei distanța* $D_0$ *între tun și avion, cum ar trebui ochit cu tunul (cum ar trebui decolat axul țevei), pentru ca proectilul să lovească avionul, tragerea considerându-se în vid?*

*Aplicație:*

$u = 150^{km}/_{oră}$ ; $V_0 = 800^{m}/_{sec.}$ H = 3000m. și $D_0 = 6000$m.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

*Introducere:*

Un punct în spațiu poate fi lovit de două traectorii ale unei aceleași guri de foc (fig. 1), ambele traectorii fiind situate în același plan vertical.

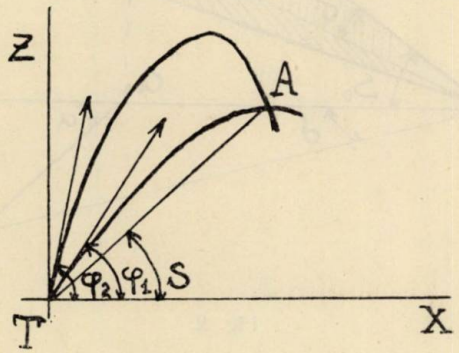



Fig. 1.

Din ecuația generală a traectoriei în vid:

$$1) \qquad z = x \cdot \operatorname{tg}\varphi - \frac{g \cdot x^2}{2V_0^2 \cdot \cos^2\varphi}$$

se pot deduce lesne cele două unghiuri de tragere $\varphi_1$ și $\varphi_2$ ale celor două traectorii cari pornesc dela același tun T și trec prin punctul A. Ambele unghiuri de tragere sunt legate de relația:

$$2) \qquad \varphi_1 + \varphi_3 = 90^0 + S$$

S fiind unghiul format de dreapta TA cu orizontala.

In tragerile antiaeriene însă se admite numai traectoria cea mai scurtă, deoarece este mai precisă şi mai rapidă.

*Reprezentarea geometrică a problemei:*

Presupunând tunul antiaerian în T drept origină a axelor coordonate $xTyz$ (fig. 2), vom alege planul vertical $zTx$ astfel orientat încât să treacă prin poziţia $A_0$ unde s'ar găsi avionul când este ochit de tun.

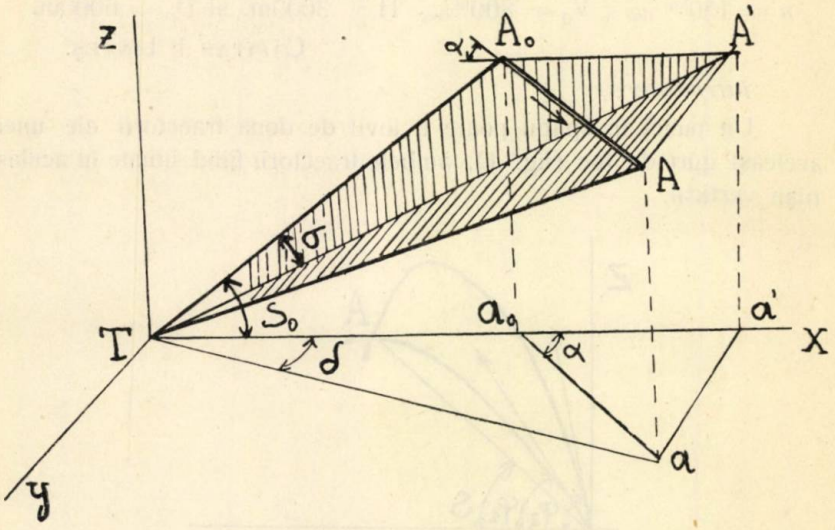



Fig. 2.

Dar, pentru ca proectilul să poată lovi avionul, trebuie trimis într'un alt punct A, unde avionul s'ar găsi după timpul $t$, care este tocmai durata traectului proectilului.

$A_0$, se zice «poziţia actuală» a avionului;

A, se zice «poziţia viitoare» a avionului.

Presupunând, ca în problemă, că avionul merge cu o viteză uniformă, în linie dreaptă şi în acelaş plan orizontal, urmează că vom avea:

$$\overline{A_0A} = u \cdot t.$$

Dar pentru ca să ochim avionul în $A_0$ şi să trimitem proectilul în A, va trebui să decolăm axul ţevei astfel:

1) — Față de planul vertical $zTx$, să-l decolăm în direcție de un unghiu $\delta = \widehat{a'Ta}$, astfel încât traectoria să fie cuprinsă în planul vertical $zTAa$.

2) — Față de direcția $TA_0$, axul țevei va fi coborît de un unghiu :

$$\sigma = \widehat{A_0TA'}$$

datorit mobilității avionului. Apoi odată axul țevei adus dealungul dreptei TA' și apoi prin darea unghiului $\delta$ dealungul dreptei TA, se mai dă țevei un unghiu $i$ față de dreapta TA, pentru ca traectoria să treacă prin A.

In cazul când avionul s'ar mișca în sens invers, unghiul $\sigma$ s'ar aduna la unghiul $S_0$.

*In rezumat :*

Va trebui să calculăm unghiul $\delta$, denumit și *corecție de direcție,* apoi unghiul $\sigma$, denumit și *corecție de înălțare* și în sfârșit unghiul $i$, denumit *unghiu de înălțător.*

Așa dar, linia de miră a aparatelor de ochire fiind îndreptată în spre $A_0$, axul țevei va avea înclinarea :

$\delta$, în planul orizontal, față de planul $zTx$ ; $\varphi = (S_0 - \sigma + i)$, în planul vertical față de planul orizontal $yTx$.

*Calculul lui* $\delta$.

In triunghiul $a'Ta$, avem :

$$\frac{\sin\delta}{a_0a} = \frac{\sin(180^0 - \alpha)}{Ta} = \frac{\sin\alpha}{Ta}$$

unde $\alpha$ este unghiul pe care îl face avionul cu planul vertical $zTx$.

Dar :

$$a_0a = u \,.\, t \quad \text{și} \quad Ta = D \,.\, \cos(S_0 - \sigma)$$

unde

$$D = TA.$$

Insă avem :

$$D \,.\, \sin(S_0 - \sigma) = H.$$

Prin urmare :

$$Ta = \frac{H}{\operatorname{tg}(S_0 - \sigma)} \,.$$

Deci:

$$3)\qquad \sin\delta = \frac{u \cdot t}{H} \cdot \operatorname{tg}(S_0 - \sigma) \cdot \sin\alpha.$$

Dar în vid avem:

$$x = V_0 \cdot t \cdot \sin\varphi$$

unde:

$$\begin{cases} x = D \cdot \cos(S_0 - \sigma) = \dfrac{H}{\operatorname{tg}(S_0 - \sigma)} \\ \varphi = S_0 - \sigma + i \end{cases}$$

deci:

$$4)\qquad \frac{H}{\operatorname{tg}(S_0 - \sigma)} = V_0 \cdot t \cdot \sin(S_0 - \sigma + i).$$

De unde scoţând pe $t$ şi introducându-l în 3), obţinem:

$$5)\qquad \sin\delta = \frac{u}{V_0} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(S_0 - \sigma + i)}.$$

Formulă care ne dă valoarea lui $\delta$ numai atunci când vom cunoaşte pe $\sigma$ şi $i$.

Rezolvând însă pe $\operatorname{tg}\varphi$ din ecuaţia 1) şi luând numai rădăcina cu semn negativ, corespunzătoare lui $\varphi$ cel mai mic, avem:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{V_0^2}{g \cdot x} - \sqrt{\frac{V_0^4}{g^2 \cdot x^2} - \frac{2V_0^2 \cdot z}{g \cdot x^2} - 1}$$

Dar cum:

$$\begin{cases} \varphi = S_0 - \sigma + i \\ z = H \\ x = D \cdot \cos(S_0 - \sigma) = \dfrac{H}{\operatorname{tg}(S_0 - \sigma)} \end{cases}$$

urmează că:

$$6)\qquad \operatorname{tg}(S_0 - \sigma + i) = \frac{V_0^2}{g \cdot H} \cdot \operatorname{tg}(S_0 - \sigma) - \sqrt{\frac{V_0^4}{g^2 \cdot H^2} \operatorname{tg}^2(S_0 - \sigma) - \frac{2V_0^2}{g \cdot H} \operatorname{tg}^2(S_0 - \sigma) - 1}.$$

Deci această formulă ne permite să calculăm pe :

$$\varphi = S_0 - \sigma + i$$

pe care îl putem introduce în 5), însă este nevoe să calculăm pe $\sigma$.

*Calculul lui* $\sigma$.

In triunghiul $TA_0A'$ avem :

$$\frac{\sin\sigma}{A_0A'} = \frac{\sin(S_0 - \sigma)}{TA_0}.$$

Dar :

$$A_0A' = A_0A \cdot \cos\alpha = u \cdot t \cdot \cos\alpha$$

și

$$TA_0 = D_0.$$

Deci :

$$\frac{\sin\sigma}{u \cdot t \cdot \cos\alpha} = \frac{\sin(S_0 - \sigma)}{D_0}$$

Sau :

$$\frac{\sin(S_0 - \sigma)}{\sin\sigma} = \frac{D_0}{u \cdot t \cdot \cos\alpha}$$

de unde :

7) $$t = \frac{D_0 \cdot \sin\sigma}{u \cdot \sin(S_0 - \sigma) \cdot \cos\alpha}.$$

Pe de altă parte, în vid avem ecuațiunile :

$$\begin{cases} x = V_0 \cdot t \cdot \cos\varphi \\ z = V_0 \cdot t \cdot \sin\varphi - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

unde eliminând pe $\varphi$ obținem :

$$x^2 + z^2 + g \cdot t^2 \cdot z + \frac{g^2}{4} \cdot t^4 = V_0^2 \cdot t^2.$$

Rezolvând pe $t$ și luând numai rădăcina pozitivă și cu semnul *minus*, corespunzătoare duratei de traect traectoriei celei mai scurte, avem :

$$t = \frac{1}{g} \cdot \sqrt{2\left[V_0^2 - gz - \sqrt{V_0^4 - 2gz\,V_0^2 - g^2x^2}\right]}.$$

Inlocuind pe $x$ şi pe $z$ cu valorile cunoscute, avem:

$$8)\quad t = \frac{1}{g}\sqrt{2\left[V_0^2 - g.H - \sqrt{V_0^4 - 2gH.V_0^2 - \frac{g^2.H^2}{tg^2(S_0-\sigma)}}\right]}.$$

Egalând acum 7) cu 8) vom obţine o relaţie de forma:

$$9)\quad \frac{g^2 D_0^2 - \sin^2\sigma}{2u^2.\sin^2(S_0-\sigma).\cos^2\alpha} = V_0^2 - g.H - \sqrt{V_0^4 - 2g.H.V_0^2 - \frac{g^2.H^2}{tg^2(S_0-\sigma)}}$$

unde singura necunoscută este $\sigma$.

Dar această relaţie cu greu va fi rezolvată în cazul general, pentru a obţine pe $\sigma$, în practică ea rezolvându-se fie grafic, prin reprezentarea grafică a celor doi membri şi găsirea punctului de intersecţie, corespunzător valorii lui $\sigma$, fie făcându-se oarecari aproximaţii, suficiente preciziei tragerilor antiaeriene în anumite cazuri.

Existenţa relaţiei 9) ne arată însă că rezolvarea lui $\sigma$ în funcţie de celelalte elemente este posibilă, deci problema are soluţie.

Ori cunoscând pe $\sigma$ vom cunoaşte pe $\delta$ şi pe $\varphi$, adică condiţiunile problemei.

**Aplicaţie:**

$$u = 150^{km}/_{oră} = \frac{150}{3{,}6} = 41{,}67^{m}/_{sec}.$$

$$V_0 = 800^{m}/_{sec} \quad ; \quad H = 3000m \text{ şi } D_0 = 6000m.$$

Considerăm acum pentru $\alpha$ două valori particulare distincte,

$$\alpha = 0^0 \quad \text{şi} \quad \alpha = 90^0.$$

1) *Fie* $\alpha = 0^0$, în acest caz avionul nu se deplasează din planul vertical $zTx$ ci rămâne mereu în el, sensul de mers al lui fiind «vine» sau «se duce» în raport cu tunul.

*Calculul lui* $\sigma$.

In relaţia 9) vom înlocui:

$$g = 9{,}805 \; ; \; D_0 = 6000 \; ; \; u = 41{,}67$$

$$\alpha = 0^0 \quad ; \; V_0 = 800 \; ; \; H = 3000$$

şi găsim:

$$67{,}6 . \frac{\sin^2\sigma}{\sin^2(S_0-\sigma)} = 20{,}7 - \sqrt{430 - \frac{1}{tg^2(S_0-\sigma)}}.$$

Dar făcând notația: $X = tg\sigma$ și desvoltând pe $\sin(S_0 - \sigma)$ și $tg(S_0 - \sigma)$ apoi ținând seamă că:

$$\sin S_0 = \tfrac{1}{2} \; ; \; \cos S_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{și} \quad tg S_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

atunci obținem relația:

$$\frac{270{,}4 \cdot X^2}{(1 - \sqrt{3} \cdot X)^2} = 20{,}7 - \sqrt{429{,}7 - \left(\frac{\sqrt{3} + X}{1 - \sqrt{3} \cdot X}\right)^2}$$

unde X variază dela 0 la $+\infty$, dar practic rămâne inferior lui 0,3.

Reprezentând grafic atât membrul I cât și II, vedem că cele două curbe se întretaie pentru:

$$X = 0{,}03$$

deci rezulă:

$$\sigma = 1^0\ 43'6''.$$

*Calculul lui* $\delta$.

Inlocuind datele cunoscute în relația 5) și ținând seamă că:

$$S_0 = 30^0$$

avem:

$$\sin\delta = \frac{41{,}67}{800} \cdot \frac{0}{\sin(28^0 16'54'' + i)} = 0.$$

Și în adevăr avionul nedeplasându-se din planul vertical $zTx$, avem:

$$\delta = 0.$$

*Calculul lui* $\varphi$.

Inlocuind datele cunoscute în relația 6) avem:

$$tg\varphi = \frac{640000}{9{,}805 \times 3000} tg 28^0 16'54''$$

$$- \sqrt{\frac{409600000000}{(9{,}805 \times 3000)^2} \cdot tg^2 28^0 16'54'' - \frac{1280000}{9{,}805 \times 3000} \cdot tg^2 28^0 16'54'' - 1}$$

$$= 11{,}77 - \sqrt{138{,}54 - 12{,}71 - 1} = 0{,}60.$$

Deci :

$$\varphi = 30^0 57' 50''.$$

Apoi cum :

$$\varphi = S_0 - \sigma + i$$

urmează că :

$$i = 2^0 40' 56''.$$

2) *Fie* $\alpha = 90^0$, în acest caz avionul se mișcă pe un plan perpendicular planului vertical $zTx$, deci :

$$\sigma = 0.$$

Prin urmare rămâne să calculăm pe $\delta$ și $\varphi$.

*Calculul lui* $\delta$. Utilizând relația 5), avem :

$$\sin\delta = \frac{41{,}67}{800} \cdot \frac{1}{\sin(S_0 + i)} = \frac{0{,}052}{\sin(S_0 + i)}.$$

Dar este necesar să cunoaștem pe :

$$\varphi = S_0 + i.$$

*Calculul lui* $\varphi$. După relația 6) avem :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{640000}{(9{,}805 \times 3000)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$- \sqrt{\frac{409600000000}{(9{,}805 \times 3000)^2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1280000}{(9{,}805 \times 3000)} \cdot \frac{1}{3} - 1}$$

$$= 12{,}60 - \sqrt{158{,}76} - 14{,}50 - 1 = 0{,}64.$$

Prin urmare :

$$\varphi = 32^0 37' 8''.$$

De unde :

$$i = 2^0 37' 8''.$$

Apoi :

$$\sin\delta = \frac{0{,}052}{\sin 32^0 37' 8''} = 0{,}096.$$

De unde :

$$\delta = 5^0 30'.$$

*Observaţiuni :*

1. Soluţia analitică a problemelor de acest gen este aproape imposibilă, din cauza ecuaţiunilor implicite ce rezultă.

Am dat această problemă pentru a face o aplicaţiune în vid, a unor problemi ce în realitate *«Teoria Tragerilor-Antiaeriene»* le rezolvă pentru tragerile în aer. Dar soluţiunile sunt obţinute numai pe cale grafică, iar rezultatele numerice sunt transformate în aparate mecanice, deoarece asemenea problemi trebuesc rezolvat în practică, de către trăgători, în cel mult *8 secunde* (atât se socoteşte timpul zis „mort de manevră").

Iată dar dificultăţi de a rezolva o problemă exact şi repede (în 8 secunde), pe care numai matematicele le poate învinge.

2. Ipotezele admise în problema 3438, cum că avionul merge cu viteză uniformă ; pe o traectorie rectilină şi într'un plan orizontal, sunt valabile numai pe timpul duratei de traect al proectilului (cel mult *20 de secunde*), altfel erorile soluţiunilor problemei ar întrece „abaterile probabile" inerente unor fenomene cari se repetă.

3. Calculele numerice din aplicaţiunea de mai sus, sunt făcute cu oarecare aproximaţie, deoarece rezultatul lor interesează numai ca indicaţiuni pentru înţelegerea soluţiei generale a problemei.

4. Singurul corespondent, care a încercat să rezolve această problemă, a fost D-l V. Dorneanu (Student Şc. Politechnică din Bucureşti).

Căpitan I. Lintes.

---

PROBLEMA 3960. *Să se afle derivata funcţiunei :*

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{2x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 1}{x\,(2\sqrt{1 - x^2} - 1)}$$

*şi să se explice rezultatul.*

N. Ciorănescu.

*Soluţie :* Punând

$$u = \frac{2x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 1}{x\,(2\sqrt{1 - x^2} - 1)}$$

avem

$$y' = \frac{u'}{1 + u^2}.$$

Dar

$$u' = \frac{3(1 - \sqrt{1 - x^2})}{\sqrt{1 - x^2}\,[x(2\sqrt{1 - x^2} - 1)]^2} ; \quad \frac{1}{1 + u^2} = \frac{x^2\,[2\sqrt{1 - x^2} - 1]^2}{2(1 - \sqrt{1 - x^2})}.$$

Deci

$$y' = \frac{3}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

Funcţiunea dată are aceiaş derivată ca funcţiunea:

$$z = \frac{3}{2}\arcsin x.$$

Trebuie arătat că ele diferă prin o constantă. Eliminând pe $x$ găsim:

$$\operatorname{tg} y = \frac{2\sin^2\frac{2z}{3} + \cos\frac{2z}{3} - 1}{2\sin\frac{2z}{3}\cdot\cos\frac{2z}{3} - \sin\frac{2z}{3}} = \frac{\cos\frac{2z}{3} - \cos\frac{4z}{3}}{\sin\frac{4z}{3} - \sin\frac{2z}{3}} = \frac{\sin z}{\cos z} = \operatorname{tg} z.$$

Deci

$$y - z = k\pi.$$

Au rezolvat problema D-nii: Marius Cioc, Const. W. Cinsky, Şt. Cuciureanu, I. Craiu, N. Donciu, P. I. Ghişoiu, Tudor Gospodin, Mircea Ionescu (Lic. Mil. Tg.-Mureş), Em. Mereuţă, Mircea L. A. Negrea, C. Paliţa, St. Olteanu, G. Şt. Roşca, Mircea Ţiucra, V. Vasu, Mihail Velea, I. Zarda.

N. C.

PROBLEMA 3968. *Să se arate că în orice triunghiu există relaţia*

$$AB(\sin^2 A - \sin^2 B) = \sin^2 C(BC\cos B - AC\cos A).$$

Iuliu Deac.

*I-a Soluţie* dată de D-l Floricel V. N. Şerbănescu.

Fie triunghiul ABC în care ducem înălţimea CD şi luăm apoi $CE = AC$.

Avem

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Deoarece $AC = CE$ şi însemnând cu $\alpha$ unghiul BCE, putem egala rapoartele de mai sus, cu acele ce le obţinem din triunghiul BCE, adică

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{CE}{\sin B} = \frac{BE}{\sin\alpha}.$$

Dar $\alpha = A - B$ şi deci

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BE}{\sin(A - B)}.$$

Impărţind egalitatea aceasta cu $\sin(A + B) \neq 0$ şi ţinând seamă că

$$\sin C = \sin(A + B),$$

avem

$$\frac{AB}{\sin^2 C} = \frac{BE}{\sin(A + B)\sin(A - B)} = \frac{BE}{\sin^2 A - \sin B}.$$

Cum

$$BE = BD - ED = BD - AD,$$

iar

$$BD = BC\ \cos B \text{ şi } AD = AC\ \cos A,$$

rezultă

$$\frac{AB}{\sin^2 C} = \frac{BC\ \cos B - AC\ \cos A}{\sin^2 A - \sin^2 B}$$

de unde se deduce relaţia din enunţ.

*II-a Soluţie* dată de D-na Ştefania Căpitan Truţescu şi D-nii: Aurel Constantinescu, G. Şt. Roşca, Sub.-Loc. I. C. Savin, I. C. Şova, M. Velea, I. Zarda, C. I. Naforniţă.

Din

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AC \cdot AB\ \cos A$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - 2BC \cdot AB\ \cos B$$

se obţine

$$(1) \qquad \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = AB\,(BC\ \cos B - AC\ \cos A).$$

Dar

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{AB}^2}{\sin^2 C} = \frac{\overline{BC}^2}{\sin^2 A} = \frac{\overline{AC}^2}{\sin^2 B}$$

ne dau

$$(2) \qquad \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = \frac{\overline{AB}^2(\sin^2 A - \sin^2 B)}{\sin^2 C}.$$

Comparând (1) cu (2) se deduce relaţia din enunţ.

*III-a Soluție* dată de D-nii: P. I. Ghișoiu și Sub.-Loc. A. I. Stan.

Avem succesiv relațiile

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A + B)\sin(A - B).$$

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin C(\sin A \cos B - \sin B \cos A).$$

Inmulțind ambele părți ale ultimei relații cu $AB = 2R \sin C$ și punând $2R \sin A = BC$ și $2R \sin B = AC$, avem

$$AB(\sin^2 A - \sin^2 B) = \sin C(BC \cos B - AC \cos A),$$

adică relația din enunț.

*Notă.* 1. Domnii: N. N. Aldea, Vl. I. Crivăț, N. N Mihăileanu, I. I. Petrescu, A. Zoe Cristeanu & Roșu, N. N. Velicescu au arătat că relația din enunț e adevărată bazându-se pe relația

$$a^2 - b^2 = c(a \cos B - b \cos A)$$

cunoscută din: C. Bourlet *(Leçons de Trig.), C. P. Trig. XVIII, G. M. XXXIII, pag. 34,* Abramescu N. *(Trig. pag. 139),* S. Haret *(Trig. pag. 166).* F. G. M. *(Ex. de Trig. p. 267);* iar D-nii: I. Gh. Popa și H. P. Ionescu-Biss bazându-se pe

$$\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a^2 - b^2}{C^2} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C}$$

cunoscute din: „H. Vuibert". *(Relations entre les éléments d'un triangle p. 138).*

2. Au arătat că relația din enunț este adevărată, verificând-o prin transformări succesive D-rele: Mariana Abramescu și Eleonora Antoniu; Domnii: Emilian Mereuță, N. Glușco, C. Gh. Lupescu, I. Macoschi, M. D. Motoc, Șt. Olteanu, Sublt. Th. N. Panaite, N. Patraulea, V. Vasu, Iulian Alexiu, Cornel Andreescu, A. M. Butan, G. A. Călinescu, C. Cinsky, I. Cojocaru, C. Constantiniu, I. N. Craiu, R. N. Dumitrașcu, A. H. Halperin, V. I. Ionescu, Em. Mareș, Fațe Mărgărit, M. Leonte A. Negrea, I. Parepeanu, C. D. Rusu, I. St. Sachelariade, P. A. Sullă, M. P. Țiucra, Sublt. I. Gh. Zamfirescu.

Colonel G. I. Liteanu.

---

PROBLEMA 3995. *In orice triunghiu avem relația:*

$$\frac{1}{r} abc \sum \sin(B + C) = 4p^2.$$

Iulian Alexiu.

*Soluție* dată de D-rele Ștefania Căpitan Trutescu, Alice Zoe Cristeanu (Al. Roșu), Mariana Abramescu, Eleonora Antoniu-Cluj și de D-nii: I. C. Șova-Grigoreni, P. I. Ghișoiu, M. Velea, N. N. Mihăileanu, V. Vasu, I. Parepeanu, N. N. Aldea, L. C. Burchi, Gab. A. Călinescu, I. D. Cârstoiu, I. Cojocaru, C. Constantiniu, Vl. Crivăț, I. A. Epuran, G. V. Ghiuță, N. Glușco, Al. Halperin, C. D. Ionescu-Țiu, H. P. Ionescu-Biss, M. Gh. Ionescu, I. Macovschi-Cluj, Em. Mereuță, Subloc. E. G. Milea, C. I. Naforniță, Subloc. Th. N. Panaite, N. N. Patraulea, Radu N. Patraulea, I. Gh. Popa, M. Popescu-Stănești, Tr. Puta, G. St. Roșca, C. D. Rusu, Subloc. I. C. Savin, Subloc. A. I. Stan-Cluj, Subloc. I. Zamfirescu, N. D. Zane.

Avem

$$\sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\therefore \quad \Sigma \sin(B + C) = \frac{p}{R} \tag{1}$$

de altfel cunoscută (G. M. XIV, p. 181).

Cum

$$abc = 4Rpr$$

sau

$$\frac{1}{r} abc = 4Rp \tag{2}$$

prin înmulțirea relațiilor (1) și (2) se obține relația din enunț.

Relațiile (1) și (2) ridicate la puterea $n^a$ dau relația de forma generală

$$\frac{1}{r^n} a^n b^n c^n [\Sigma \sin(B + C)]^n = 2^{2n} . p^{2n}.$$

*Observare.*

Domnii: A. Em. Bădescu, A. M. Butan, Victor I. Ionescu, C. Gh. Lupescu, M. D. Motoc, Negrea A. M. Leonte, C. D. Rusu, N. N. Velicescu au stabilit relația din enunț în modul următor:

$$\Sigma (B + C) = \Sigma \sin A = 4 \cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C = \frac{4pS}{abc} = \frac{r}{abc} . 4p^2.$$

*Notă.* 1. D-l Em. Mereuță a citat câteva relații ce se pot stabili în mod analog.

2. S'a primit o altă soluție dela D-l R. N. Dumitrașcu.

3. Alte soluții primite ulterior dela D-nii: Șt. E. Olteanu, I. I. Petrescu, Cr. I. Ștefănescu.

Colonel Gh. I. Liteanu.

## *EXERCIŢII

23. Să se stabiliască identitatea:

$$\sum_{0}^{n}\left[\sum_{0}^{k} a_i\, x^k\right] = \sum_{0}^{n}\left[a_k \sum_{k}^{n} x^i\right].$$

N. N. MIHĂILEANU.

R. Desvoltând ambii membri, găsim acelaş polinom:

$$P(x) = a_0 + (a_0 + a_1)\, x + (a_0 + a_1 + a_2)\, x^2 + \ldots + (a_0 + a_1 + \ldots + a_k) x^k + \ldots$$

$$+ (a_0 + a_1 + \ldots + a_k + \ldots + a_n)\, x^n = a_0 (1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots + x^n)$$

$$+ a_1 (x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots + x^n) + \ldots + a_k (x^k + \ldots + x^n) + \ldots + a_n\, x^n.$$

24. Să se arate că ecuaţia:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

are rădăcinile reale şi pozitive dacă $pq \leqslant 9r$, $p$, $q$ şi $r$ fiind reale.

C. D. IONESCU-ŢIU.

R. Folosim relaţia:

$$(a + b + c)\,(ab + bc + ca) \geqslant 9abc,$$

$a$, $b$ şi $c$ fiind reale şi pozitive. (Problema 227 rezolvată în R. M. T. vol. IV pag. 137).

Fie $a$, $b$ şi $c$ rădăcinile ecuaţiei de gradul III.

$$a + b + c = -p \quad ; \quad ab + bc + ca = q \quad ; \quad abc = -r$$

adică:

$$-pq \geqslant -9r \quad \text{sau} \quad pq \leqslant 9r.$$

25. Să se găsească minimul funcţiei

$$u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

când

$$\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} = 3.$$

ION C. VASILIU.

R. Se găseşte că pentru $x = y = z$

$$\therefore \quad u_{min} = 3.$$

# PROBLEME PROPUSE

4111. Care sunt persoanele care îşi pot serba ziua naşterii în aceiaşi zi a lunii ?

I. Ionescu.

4112. Când numerele întregi $m^n$ şi $n^m$ au acelaş număr de cifre ?

Col. Gh. Buicliu.

*4113 Se cere suma complimentelor aritmetice ale numerelor: 101, 2112, 32223, 433334, ... pentru $n \leqslant 9$.

V. I. Crivăţ.

*4114. Deux triangles égaux et superposables $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sont inscrits dans un même cercle (O). Leurs côtés égaux se coupent en M, N, P. Démontrer que: 1. — Les perpendiculaires abaissées de ces points sur les droites $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$ concourent au centre du cercle MNP; 2. — Le triangle MNP est semblable au triangle $A_1B_1C_1$; 3. — Les projections orthogonales des sommets de $A_1B_1C_1$ sur les côtés homologues du triangle $A_2B_2C_2$, et inversement, sont six points collinéaires; 4. — Les symétriques des sommets $A_1, B_1, C_1$, par rapport aux côtés homologues de $A_2B_2C_2$, et inversement, déterminent deux triangles, symétriquement égaux à $A_2B_2C_2$ et $A_1B_1C_1$, dont les orthocentres sont situés sur la circonférence (O).

V. Thébault.

4115. Se consideră triunghiul ABC şi punctele B' pe AC, C' pe AB, între A şi C, A şi B. Pe BB' şi CC' ca baze se construesc triunghiurile isoscele $B\beta B'$ ($B\beta = B'\beta$), $C\gamma C'$ ($C\gamma = C'\gamma$), care au unghiurile din $\beta$ şi $\gamma$ egale cu A, $B\beta B' = C\gamma C' = BAC$, astfel ca vârfurile $\beta$ şi $\gamma$ să fie de aceeaşi parte ca şi A în raport cu BC.

Să se arate că punctele $\beta$, A şi $\gamma$ sunt în linie dreaptă, care este bisectoarea exterioară a unghiului A.

N. Abramescu.

4116. Să se rezolve sistemul:

$$x - y + \frac{x}{z} + \frac{y}{z^2} = 0$$

$$y - z + \frac{y}{x} + \frac{z}{x^2} = 0$$

$$z - x + \frac{z}{y} + \frac{x}{y^2} = 0.$$

O. Orănescu.

*4117. Să se demonstreze că într'un triunghiu oarecare există relația

$$16R^2\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{c_1^2}\right) = \sum \frac{bc}{p(p-a)},$$

$a_1$, $b_1$, $c_1$ fiind distanțele între centrele cercurilor exînscrise, iar celelalte notații cunoscute.

M. I. Popescu-Stănești.

*4118. Laturile unui triunghiu formează o progresie aritmetică în care $a$ (latura opusă unghiului A) este termenul mediu.

Se cere:

1°. Maximul lui $y$ dat de relația $y = \cos B \cos C + \cos^2 A$.

2°. Să se rezolve triunghiul ABC pentru $y = \frac{1}{4}$.

Șt. E. Olteanu.

4119. Să se rezolve cu ajutorul tablelor trigonometrice naturale ecuația:

$$4x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0.$$

Ion S. Antoniu.

*4120. Să se discute și rezolve ecuația:

$$\sin^2\alpha \sec^2 x + \cos^2\alpha \operatorname{cosec}^2 x - \lambda = 0$$

în care $\alpha$ este dat, iar $\lambda$ variază.

N. C.

---

*ERATĂ.* La observația care însoțește soluția problemei 4040 din numărul precedent al *Gazetei Matematice* (pag. 237) s'a cules ca litere drepte literile rotunde $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$. Se naște de aici o confuzie întrucât, în acea soluție, literile drepte deja introduse M, N, $M_1$, $N_1$ numesc alte puncte ale figurii. Deasemenea s'a amestecat notația D, $D_1$, cu notația D, $D_1$.

Cititorul e rugat să facă îndreptările cuvenite.

BIBLIOTECA „ASOCIAȚIUNII" SIBIU

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

---

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Acikgheozian A. N.* (4078, 87, 100); *Cârstoiu D. I.* (4084, 100, 10, P); *Efstate Şt. Sorin* (4097); *Florescu B. I.* (P); *Gheorghiu C. Ad.* (2956, 3960, 4090, 95, N); *Goormatigh R.* (A); *Margulius Marius* (4064, 76, 78, 81, 83, 84, 89, 97, 100, 01); *Mătieş V. I.* (P); *Mihăileanu N. N.* (3710, 64, 80, 879, 83, 977, 4006, 91, 93, 95, 96, 100, 05, 07, N, P); *Negrea A. L. M.* (4087, 89, 91, 97, 100); *Olteanu E. Şt.* (2422, 3935, 95, 4031, 60, 74, 78, 81, 82, 83, 84, 87, 88, 89, E); *Panaite Gh. Subloc.* (3675, 749, 4075, 84); *Panaite Th. Subloc.* (3649, 4081, 87, N); *Pănoiu Em.* (4097, 100); *Parepeanu C. I.* (4078, 83, 97, 100); *Patraulea N.* (4060, 89, 91, 93, 96, 100, 05, 07, 08, 10); *Petrescu I. I.* (3995, 4097, 100); *Râmniceanu Cristian* (3768); *Roşca St. Gh.* (4035, 43, 56, 82, 83, 84, 87, 89, 91, 100); *Sachelarescu Z. A.* (4084, 87); *Savin C. I. Subloc.* (4074, 77, 108, 10, P); *Şova-Grigoreni C. I.* (4089, 97, 100); *Ştefănescu Cristea* (3995, 4093); *Trifon I. Ch.* (4097); *Varlam M. P.* (4007, 47); *Vissarion I. C. V.* (4066); *Zamfirescu Gh. I. Subloc.* (3935, 4083, 88, 89, 105, 10).

---

*Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

---

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

---

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

# Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

**La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.**

# GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVII

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1932

## SUMARUL

1. Sur le point et la conique de Frégier . *R. Goormaghtigh*
2. Triunghiuri „de laturi inverse" . . . *Căpitan Gh. Niculescu*
3. Generalizări ale şirului lui Fibonacci . *I. B. Florescu*
4. Note matematice: 27 — 31.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 216.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2383, 2956, 3704, 3886, 4006, 4020, 4047, 4065.
10. Exerciţii: 26 — 30.
11. Probleme propuse: 4114, 4121 — 4130.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1932

# SPRE ȘTIINȚA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în București, compusă din Doctori sau Licențiați în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat și Ofițeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegație de 3 membri, care pentru anul XXXVII se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orășanu**, Inginer, Licențiat în Matematici, Conferențiar la Școala Politechnică «Regele Carol II» din București, Profesor la Școalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui Inginer-Șef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, București 6.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse și exercițiile se vor redijà în conformitate cu instrucțiunile ce se pot procurà dela „*Gazeta Matematică*“ („Monitorul Oficial“. B-dul Elisabeta, 29 București 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poștă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor și spre a se evità confuziuni, corespondenții sunt rugați a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 84, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 72, 76, 83, 87, 4010, 13, 24, 30, 34, 44, 45, 48, 53, 57, 59, 62, 68, 70, 71, 73, 79, 80, 85, 92, 94, 102, 03, 06, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

Enunțurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela „*Gazeta Matematică*“ („Monitorul Oficial“. B-dul Elisabeta, 29. București 1), cu prețul de 12 lei.

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XXXVII *SUPLIMENT* No. 8

## RECREAȚIUNI

1. **Curiozități aritmetice.**

$$\begin{aligned}
1 \times 9 + 2 &= 11\\
21 \times 9 + 33 &= 222\\
321 \times 9 + 444 &= 3333\\
4321 \times 9 + 5555 &= 44444\\
54321 \times 9 + 66666 &= 555555\\
654321 \times 9 + 777777 &= 6666666\\
7654321 \times 9 + 8888888 &= 77777777\\
87654321 \times 9 + 99999999 &= 888888888
\end{aligned}$$

N. N. VELICESCU.

* * *

$$\begin{aligned}
80 \times 22 + 22^2 &= 2244 \qquad 70 \times 33 = 3399\\
780 \times 222 + 222^2 &= 222444 \qquad 670 \times 333 = 333999\\
7780 \times 2222 + 2222^2 &= 22224444 \qquad 6670 \times 3333 = 3333999\\
77780 \times 22222 + 22222^2 &= 2222244444 \qquad 66670 \times 33333 = 3333399999
\end{aligned}$$

. . . . . .

N. N. VELICESCU.

* * *

2. **Numărul 13 și Primo de Rivera.** Numele lui se compune din 13 litere. Ministrul lui de interne, MARTINEZ AMDO, la fel. Dictatura lui a început la 13 Septemvrie 1923 și a durat 2326 zile, care are ca sumă a cifrelor pe 13. Aceasta face 76 luni care dă $7 + 6 = 13$. Dictatura s'a terminat în anul 1930 care are suma cifrelor 13. Cabinetul lui era compus din 13 Miniștri.

(După un ziar francez) V. C. POPESCU și M. D. MOȚOC.

Un corespondent a mai adăogat: „Septemvrie are 31 zile, deci răsturnatul lui 13". Asta e a căuta pe 13 cu lumânarea! Ca să demonstrăm aceasta, publicăm recreația următoare:

I. I.

* * *

3. 30 zile, e Septemvrie,
April, Iunie și Noemvrie.
28 e numai una,
Celelalte 31.

LT. A. I. STAN.

* * *

4. **Problemă dată la un concurs de Școală militară.** Știindu-se că un soldat ocupă în front 0,73 m., iar distanța dintre rânduri dela un piept la altul este de 0,65 m. și că soldații unui batalion sunt așezați pe teren în forma unui triunghiu isoscel, să se determine:

1. In ce punct al triunghiului urmează să se aşeze comandantul de batalion pentru ca el să fie punctul de intersecţie al perpendicularei duse pe jumătatea secantei unui cerc care ar trece prin vârful triunghiului de soldaţi şi prin jumătatea bazei acestui triunghiu.

2. Să se arate şi construcţia geometrică a figurii ce va rezulta.

(Manuscris rămas dela regretatul I. D. Teodor spre a se publica mai târziu în *Gazeta Matematică*).

I. I.

* * *

5. **Quadrilater juridic.** V. A. Urechia povesteşte în *Istoria Şcoalelor* următoarele :

„Mult timp, până la 1864, cei patru profesori vechi ai Facultăţii de drept, se opuneau în mod indirect la introducerea de noi profesori, respingând dela concurs pe solicitatori. Ei constituiseră, ceeace Satira numiă la 1864: *„Quadrilaterul dela Drept"*.

I. I.

* * *

6. **Notaţia lui Diophante.** Extrag din introducerea la Calculul diferenţial şi integral tipărit în ungureşte de Beke Mano, expresia:

CC3QC4QQ7C9Q12N3U5

cu care Diophante nota polinomul:

$$3x^6 + 4x^5 + 7x^4 + 9x^3 + 12x^2 + 3x + 5.$$

El nota U unităţile, cu N necunoscuta, cu Q patratul, cu C cubul. CC era cub cub, adică puterea 6-a; QC patrat cub, adică puterea cincea, etc.

J. Deac.

* * *

7. **Algebra în şcoalele de fete.** Kraitchik povesteşte că la o lecţie de algebră, unei fete i se dă să împartă pe $(a^2 - b^2)$ prin $(a - b)$ şi zice: $a^2$ împărţit cu $a$, dă $a$; — împărţit cu — dă +; $b^2$ împărţit cu $b$, dă $b$. Deci rezultatul este $(a + b)$ pe care nici un doctor în matematici nu l'ar da mai exact!

Probabil însă că profesoara nu a fost mulţumită cu asemenea raţionament. Nu ştiu dacă fetiţa a avut prezenţa de spirit să-i spună că e în stare să verifice rezultatul găsit împărţind pe deîmpărţit cu câtul: $(a^2 - b^2) : (a + b)$. Căci $a^2$ împărţit cu $a$ dă $a$, — cu + dă —; şi $b^2$ împărţit cu $b$, dă $b$. Rezultatul e $(a - b)$, adică tocmai împărţitorul!

I. I.

* * *

8. **Legea atracţiei.** In *«La Depêche»* din 30/VI 1930 găsim:

— Zece ani de închisoare pentru că am aruncat pe nevasta mea afară pe fereastră! E prea mult!

— Aţi căzut amândoi sub loviturile legii: ea sub legea greutăţii şi tu sub greutatea legii.

V. C. Popescu.

* * *

9. **Cosmografie.** In Aritmetica de clasa I de C. GÂDEA găsim la pagina 126 următoarea problemă:

„Distanţa dela pământ la lună este de 403.800 km. Câte raze pământeşti sunt dela pământ la soare, ştiind că raza pământului este de 6730 km. ?"

V. CRIVĂŢ.

* * *

10. **Păreri despre geometrie.** Iată ce scrie ANATOLE FRANCE în *«La vie littéraire»*, IV, pag. 212:

„La géométrie est à la base de tout, ou plutôt elle est dans tout comme le squellette dans l'animal. Elle est l'abstraction et elle est la réalité. Le monde visible la recouvre... Elle règne dans la beauté des femmes, dans l'harmonie des musiques, dans le rythme des poésies et dans l'ordre des pensées. Elle est la mesure de tout. En elle est le mouvement; en elle est la stabilité. Heureux celui qui suit longtemps le bel ordre de ses figures, qui en découvre les propriétés immuables, et qui sait l'art.

De poursuivre une sphère en ces cercles nombreaux!..

Sans la géométrie, l'enfant pourrait-il marcher, l'abeille faire son miel? Non, certes, la géométrie n'exclut rien..."

Acest citat poate servi ca expunere de motive a raportului viitoarei legi care va readuce matematicile în primul plan în programele liceelor noastre.

GH. B.

* * *

11. Un matematician german fiind întrebat: *«Ce este femeia?»* a dat răspunsul:

„Das Weib ist eine Reihe sondergleiche, Den sie nimmt ab, je mehr die Zeit addiert, Nur eine Grösse sucht sie zu erreichen, Bei der ihr Wert nicht selten, sich quadriert, Ja, sie ist X mit negativen Zeichen, Das nach den positiven Gatten spürt — Und hat sie's zur Verbindung dann gebracht, Wie Er von Ihr zur Null gemacht".

I. I.

* * *

12. **O curbă nouă, naţională.** Pe lângă curba lui HARET şi a lui LALESCU o nouă curbă a fost descoperită în România: *«Curba de sacrificiu»*.

A. I. S.

* * *

13. **Matematica în literatură.** Triunghiu cu 4 laturi: In *«l'Escalier de service»* de GEORGES OLTRAMARE găsim, la actul I scena III, următoarele:

VALACUMIR. J'étais très fort en mathématiques. Je me rapelle encore la règle de trois et la géométrie:

Le carré de l'hypothénuse
FÉNELON Est égal, si je ne m'abuse...
VALACUMIR A la somme des carrés
De trois autres côtés...

lar în scena IV:

VALACUMIR (vers son fils). Je t'apprendrais toute la table des logarithmes!

In scena V mai găsim:

SANDRA. — M-lle Nounouche est la soeur de M. Fénelon, si je ne me trompe?

FÉNELON. — Ma demi-soeur.

SANDRA. Alors je me trompais qu'à moitié.

V. CRIVĂŢ.

* * *

14. **Etate variabilă cu locul.** Un conductor de tren către un copil care nu avea bilet.

— Câţi ani ai puiule?

— 5 ani în tren şi 7 acasă.

V. C. POPESCU.

* * *

15. **Teoreme absurde.** Un candidat de profesorat făcea o lecţie de matematici la Seminarul pedagogic din Cluj şi a demonstrat o teoremă prin reducerea la absurd. După ce candidatul dăduse toate lămuririle asupra acestei metode, întreabă pe un elev:

— Despre ce am vorbit eu în această oră?

— Despre metodele absurde!

I. V. MATIEŞ.

* * *

16. **Cuvinte lungi.** Cu privire la recreaţia 2 din No. 1 Vol. XXXIV dau aci cuvântul bulgar echivalent cu *anticonstituţional*, care are 45 litere

НЕПРОТИВОЗАКОНОКОНСТИТУЦИОНСТВУВАТЕЛСТВУВАЙТЕ.

In limba lugoslavă cuvântul analog este *anticonstitutiono* cu 17 litere. Acelaş cuvânt în limba spaniolă are 13 litere. In limba română *anticonstituţionaliştilor* are 25 litere. Suntem însă departe de cuvântul german de 49 litere, datorit Mizilului!

V. C. POPESCU.

* * *

17. **Minune matematică.** Ziarul *Temeswarer Zeitung* din 19/1 1930 dă sub acest titlu, informaţia că profesorul grec ZERVOS a descoperit minunea că dacă se înmulţeşte numărul 142 857 cu 2, 3, 4, 5, 6 se obţin produsele 285.714 428.571, 571.428, 714.285, 857.142, care se scriu cu aceleaş cifre ca şi numărul iniţial.

Nu e nici o minune ca ziariştii să califice drept minune ceeace în matematică se zice curiozitate aritmetică. Ceeace este minune este ca profesorul grec să minuneze lumea cu o curiozitate aritmetică pe care o găsim în mai toate culegerile de asemenea curiozităţi. In particular minunea numărului 142.857 este dată şi în „Récréations arithmétiques par E. FOURREY" unde mai sunt date şi alte minuni ale acestui număr.

*Gazeta Matematică* publică de 37 ani de o dată mai multe minuni şi din alte domenii decât aritmetica şi până acum nici un ziar nu se întreabă de minunea care face să reziste această revistă în faţa greutăţilor actuale de tipar şi lipsei de cititori.

GH. B.

# SUR LE POINT ET LA CONIQUE DE FRÉGIER

On connaît le théorème de FRÉGIER :

*Les cordes d'une conique* $\Sigma$ *vues d'un point fixe* M *de* $\Sigma$ *sous un angle droit passent par un point fixe* P, *point de* FRÉGIER *relatif au point* M.

On sait en outre que, *lorsque* M *décrit la conique* $\Sigma$, *le point* P *décrit une conique homothétique.*

Nous nous proposons de donner ici des démonstrations géométriques simples de ces proprietés.

1. Si l'on transforme la figure par polaires réciproques par rapport à un cercle $\Gamma$ de centre M, la conique $\Sigma$ se transforme en une parabole $\omega$ dont l'axe est parallèle à la normale à $\Sigma$ en M. Deux cordes rectangulaires issues de M recoupent $\Sigma$ en deux points Q, R, dont les polaires par rapport à $\Gamma$ sont deux tangentes rectangulaires à la parabole $\omega$. Or l'intersection de ces tangentes, pôle de QR par rapport à $\Gamma$, décrit la directrice $\Delta$ de $\omega$ ; dès lors QR pivote autour d'un point fixe P, qui est le pôle de $\Delta$ par rapport à $\Gamma$ et qui, par suite, appartient à la normale en M à $\Sigma$.

2. Une détermination simple du point P se déduit de ce qui précède, en considérant le cas particulier où l'angle droit mobile, de sommet M, a ses côtés parallèles aux axes de $\Sigma$ ; la corde QR coïncide alors avec le diamètre symétrique de OM par rapport aux axes.

Le point de FRÉGIER P relatif à un point M appartient donc au diamètre de $\Sigma$ qui passe par le symétrique M′ de M par rapport à l'axe focal.

3. Supposons maintenant que $\Sigma$ soit une conique à centre et appelons N l'intersection de la normale MP avec l'axe focal.

L'on sait que, $a$, $b$ désignant les demi-axes de $\Sigma$, le point N divise dans un rapport constant le segment compris entre le centre O et la projection K de M sur ON, et que l'on a

$$\frac{\text{ON}}{\text{NK}} = \pm \frac{a^2 \mp b^2}{b^2} .$$

Or la considération du triangle OM'K, coupé par la transversale MNP donne lieu à la relation

$$\frac{NO}{NK} \times \frac{MK}{MM'} \times \frac{PM'}{PO} = 1,$$

de sorte que

$$\frac{PO}{PM'} = \frac{-}{+} \frac{a^2 \mp b^2}{2b^2},$$

et

$$\frac{OP}{OM'} = \frac{a^2 \mp b^2}{a^2 \pm b^2}.$$

Le lieu du point P est dès lors une conique homothétique à $\Sigma$, le pôle d'homothétie étant le centre de $\Sigma$ et le rapport d'homothétie $(a^2 \mp b^2) : (a^2 \pm b^2)$.

4. Considérons le cas où $\Sigma$ est une parabole. En raisonnant comme au paragraphe 2, l'on voit que P appartient au diamètre de la parabole passant par le symétrique M' de M par rapport à l'axe.

Comme, d'autre part, d'après une propriété connue, le segment compris entre la projection K de M sur l'axe et le point N où la normale MP coupe cet axe est constant et égal au paramètre $p$ de la parabole, la distance M'P est constante et égale à $2p$.

Dans le cas de la parabole, le lieu du point P est une parabole égale à celle donnée et déduite de celle-ci par une translation égale au double du paramètre.

R. GOORMAGHTIGH
(Bruges, Belgique).

## TRIUNGHIURI „DE LATURI INVERSE"

Să considerăm un triunghiu ABC de laturi $a > b > c$. Dacă laturile acestui triunghiu îndeplinesc condiţiunea:

$$c(a + b) > ab \tag{1}$$

atunci triunghiurile ABC pot da naştere la triunghiuri ale căror laturi vor fi:

$$1/a\,;\ 1/b\,;\ 1/c.$$

Vom numi pe acestea din urmă *„triunghiuri de laturi inverse"* şi le vom însemna cu $A_0B_0C_0$ sau mai prescurtat cu $\Delta_0$, iar pe triunghiurile ABC îndeplinind condiţiunea (1) cu $(ABC)_0$ sau, mai prescurtat, cu $(\Delta)_0$. Vom notà cu:

$$a_0 = 1/a\ ;\ b_0 = 1/b\ ;\ c_0 = 1/c$$
$$\sphericalangle A_0\ ;\ \sphericalangle B_0\ ;\ \sphericalangle C_0$$

laturile şi unghiurile triunghiurilor $\Delta_0$.

Inegalitatea (1) rezolvă problema No. 3907 propusă de subsemnatul în «G. M».

In cele ce urmează vom analiza unele din legăturile ce există între triunghiul $(\Delta)_0$ şi triunghiul de laturi inverse $\Delta_0$.

1°. Inegalitatea (1) ne arată că: *orice triunghiu echilateral dă naştere la un triunghiu* $\Delta_0$, *de asemenea tot echilateral.*

Făcând în aceiaşi inegalitate $a = b$, obţinem $2c > a$, care este condiţiunea ca un triunghiu isoscel ($a = b$) să poată da naştere la triunghiul său $\Delta_0$, care va fi şi el tot un triunghiu isoscel.

2°. Pentruca $\Delta_0$ să fie un triunghiu dreptunghic, trebuie ca între laturile triunghiului $(\Delta)_0$ să existe relaţia:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

sau:

$$(a^2 + b^2)\ c^2 = a^2b^2 \tag{2}$$

şi ne'ntrebăm dacă această condiţiune poate exista în acelaş timp cu inegalitatea (1), cu alte cuvinte dacă ea este posibilă la un

triunghiu $(\Delta)_0$. Pentru a ne răspunde, vom ridica ambii membri ai inegalității (1) la pătrat:

$$(a+b)^2\ c^2 > a^2b^2$$

$$\therefore\quad (a^2+b^2)\ c^2 + 2abc^2 > a^2b^2. \qquad (3)$$

Comparând (2) cu (3), vedem că acest lucru este posibil. Dacă însă $(\Delta)_0$ este tot un triunghiu dreptunghic, condițiunea (2) devine:

$$(b^2+c^2+b^2)\ c^2 = (b^2+c^2)\ b^2$$

reducându-se la:

$$b^2 = ac, \qquad (4)$$

condițiune de asemenea posibilă, căci am presupus $a > b > c$. Cu alte cuvinte:

*Orice triunghiu dreptunghic, ale cărui laturi mai verifică și egalitatea* $b^2 = ac$, *dă naștere la un triunghiu tot dreptunghic de laturi inverse.*

Remarcând încă că triunghiurile în care laturile îndeplinesc condițiunea (4), au fost amplu studiate în trecut în «G. M», putem acum adăuga la acele rezultate și pe acesta de mai sus.

Triunghiurile dreptunghice de mai sus vor avea laturile date

de ecuațiile: $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ b^2 = ac \end{cases}$

sau de ecuațiile: $\begin{cases} a^2 = c^2 + ac = c\,(a+c) \\ b^2 = ac. \end{cases}$

Rezolvind aceste ecuațiuni și păstrând numai rădăcinele posibile, cele care dau: $a > 0\ ;\ b > 0\ ;\ c > 0$, obținem:

$$\begin{cases} a = c\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \\ b = c\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} c = a\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ b = a\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} \end{cases}.$$

Dacă vom privi acum pe $c$ ca rază a unui cerc, atunci:

*Ipotenuza triunghiului dreptunghic este diametrul cercului înscris în pentagonul căruia i s'a circumscris cercul de rază* c.

Dacă însă vom privi pe *a* ca rază a unui cerc, atunci :

*Cateta* c *a triunghiului dreptunghic este latura decagonului înscris în cercul ce are drept rază ipotenuza aceluiaş triunghiu.*

3°. Aranjând rapoartele între laturile triunghiurilor $(\Delta)_0$ şi $\Delta_0$ în toate modurile posibile, obţinem următoarele condiţiuni distincte de asemănare ale acestor triunghiuri:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 = c^2 \\ ab = bc = ac \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = ac \\ c^2 = ab \\ a^2 = bc. \end{cases}$$

Primele două condiţiuni se reduc la :

$$a = b = c,$$

adică în cazul triunghiurilor echilaterale.

Condiţiunile : $a^2 = bc$ şi $c^2 = ab$ se exclud, căci am presupus $a > b > c$. Mai rămâne posibilă condiţiunea :

$$b^2 = ac$$

dar numai în cazul când această condiţiune este în concordanţă şi cu inegalitatea (1) pe care trebuie s'o verifice. In acest scop voiu scrie inegalitatea (1) astfel :

$$ca + cb > ab$$

şi făcând înlocuirea necesară, obţinem :

$$b^2 + cb > ab \text{ sau : } b + c > a$$

inegalitate adevărată.

Din cele de mai sus tragem următoarele concluziuni :

I. *Triunghiurile, ale căror laturi verifică relaţia* $b^2 = ac$, *se mai bucură încă de proprietatea de a fi triunghiuri* $(\Delta)_0$.

II. *Triunghiul* $\Delta_0$ *rezultat este un triunghiu asemenea cu triunghiul* $(\Delta)_0$.

III. *Triunghiurile dreptunghice* $(\Delta)_0$ *sunt totdeauna asemenea cu triunghiurile* $\Delta_0$ *dreptunghice, conform condiţiunei (4) de sub punctul 2°.*

Tot în legătură cu asemănarea triunghiurilor să considerăm două triunghiuri $(\Delta)_0$ şi $(\Delta_1)_0$, de laturi respectiv $a > b > c$ şi $a_1 > b_1 > c_1$, triunghiuri pe cari să le presupunem asemenea.

In acest caz vom avea :

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} .$$

Dar aceste egalităţi se mai pot scrie:

$$\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a_1}} = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{b_1}} = \frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{c_1}}$$

de unde rezultă că :

*Două triunghiuri asemenea:* $(\Delta)$ *şi* $(\Delta_1)_0$ *dau naştere la două triunghiuri asemenea:* $\Delta_0$ *şi* $\Delta_{01}$.

4°. Unghiurile triunghiului $\Delta_0$ sunt date de relaţiile:

$$\cos A_0 = \frac{b_0^2 + c_0^2 - a_0^2}{2b_0c_0} = \frac{a^2c^2 + a^2b^2 - b^2c^2}{2a^2\,bc}$$

$$\cos B_0 = \frac{a_0^2 + c_0^2 - b_0^2}{2a_0c_0} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 - a^2c^2}{2ab^2c}$$

$$\cos C_0 = \frac{a_0^2 + b_0^2 - c_0^2}{2a_0b_0} = \frac{a^2c^2 + b^2c^2 - a^2b^2}{2abc^2} .$$

Dacă triunghiul $\Delta_0$ este dreptunghic, atunci unghiul $C_0$ trebuie să fie drept, căci $1/c$ fiind cea mai mare latură a lui $\Delta_0$ este ipotenuza în acest triunghiu. Ca atare trebuie să avem :

$$\cos C_0 = \frac{a^2c^2 + b^2c^2 - a^2b^2}{2abc^2} = 0,$$

sau

$$a^2c^2 + b^2c^2 - a^2b^2 = 0,$$

adică am regăsit pe această cale condiţia (2).

Dacă triunghiul $(\Delta)_0$ este dreptunghic, atunci unghiurile lui $\Delta_0$ se scriu:

$$\cos A_0 = \frac{b^4 + c^4 + b^2c^2}{2a^2bc}$$

$$\cos B_0 = \frac{b^4 - c^4 + b^2c^2}{2ab^2c}$$

$$\cos C_0 = \frac{c^4 - b^4 + b^2c^2}{2abc^2}$$

și dacă și $\Delta_0$ este dreptunghic, atunci trebuie să avem:

$$\cos C_0 = \frac{c^4 - b^4 + b^2c^2}{2abc^2} = 0$$

sau

$$c^4 + b^2c^2 = b^4 = c^2 \mid c^2 + b^2 \mid = c^2a^2$$

$$\therefore \quad b^2 = ac$$

adică regăsim pe această cale condiția de sub (4).

5°. Dacă avem: $\begin{cases} a < b + c \\ c\,(a + b) > ab \\ a > b > c \end{cases}$

atunci avem și:

$$\mid a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2 \mid \leqslant 2a^2bc$$

$$\mid a^2b^2 + b^2c^2 - a^2c^2 \mid \leqslant 2ab^2c$$

$$\mid a^2c^2 + b^2c^2 - a^2b^2 \mid \leqslant 2abc^2$$

inegalități ce sunt evidente ținând seama că:

$$\mid \cos A_0 \mid \leqslant 1\,; \mid \cos B_0 \mid \leqslant 1\,;\ \text{etc.}$$

Acest exemplu l-am dat pentru a se vedea cum se pot deduce pe această cale o serie întreagă de inegalități algebrice.

6°. Plecând dela expresiunile elementelor principale ale unui triunghiu $(\Delta)_0$: înălțimi, mediane, bisectoare, razele cercului înscris, circumscris, exînscris, etc., putem calcula expresiunile aceloraşi elemente, referitoare la triunghiurile $\Delta_0$, înlocuind laturile $a, b, c$ prin $1/a\,;\ 1/b\,;\ 1/c$.

Spre exemplu:

$$2p = a + b + c$$

iar:

$$2p_0 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc}.$$

Dar legăturile dintre două elemente corespunzătoare lui $(\Delta)_0$ și $\Delta_0$ sunt greoaie iar în unele cazuri chiar greu de făcut.

In cazul însă al triunghiurilor cari au: $b^2 = ac$, obținem unele relațiuni cu totul simple. Servindu-ne de acelaș exemplu, avem în acest caz:

$$2p_0 = \frac{ab + bc + b^2}{abc} = \frac{a + b + c}{ac} = \frac{2p}{ac} = \frac{2p}{b^2}$$

$$p_0 = \frac{p}{ac} = \frac{p}{b^2}.$$

7°. Dacă laturile triunghiului $\Delta_0$ vor fi:

$$\frac{1}{a^m}\ ;\ \frac{1}{b^m}\ ;\ \frac{1}{c^m}$$

atunci vom face notația $\Delta_0^m$ și-l vom numi: *triunghiu de laturi inverse de ordinul* m. Condițiunea de existență a triunghiului $(\Delta)_0$, adică inegalitatea (1) se transformă în:

$$c^m\ (a^m + b^m) > a^m\ b^m$$

și unele din proprietățile enunțate mai sus se repetă și pentru triunghiurile $\Delta_0$ de ordin superior.

Mă opresc aci cu studiul triunghiurilor de laturi inverse, studiu care nu poate fi întreprins (în afară de legăturile dintre relațiunile metrice) în altă direcție, pentru a găsi noi proprietăți, decât atunci când vom supune triunghiurile $(\Delta)_0$ și $\Delta_0^m$ la condițiuni relative de figură.

Sunt însă în strânsă legătură cu triunghiurile de laturi $b^2 = ac$ și din acest punct de vedere ele prezintă interes.

CĂPITAN GH. NICULESCU.

# GENERALIZĂRI ALE ŞIRULUI LUI FIBONACCI

Fie şirul:

(P) $P_0 = 1, P_1 = p, P_2 = p\,P_{1+Q}\,P_0, \ldots P_n = p\,P_{n-1} + q\,P_{n-2}.$

*Gazeta Matematică* s'a ocupat deseori cu asemenea şiruri, şi s'au studiat relaţiuni între termenii lor. Iată câteva din ele:

(1) $$P_{n+s} = P_n P_s + q\,P_{n-1}\,P_{s-1}.$$

(2) $$P_{-s} = (-1)^s P_{s-2}/q^{s-1}.$$

(3) $$(-q)^{s-1} P_{n-s} = P_{n-1} P_{s-1} - P_n P_{s-2}.$$

Fie apoi şirul:

(U) $$U_0\ ,\ U_1\ ,\ U_2, \ldots U_n = p\,U_{n-1} + q\,U_{n-2},$$

în care primii doi termeni nu sunt supuşi la nici o restricţiune. Intre termenii şirurilor (P) şi (U) există relaţia:

(4) $$U_{n+s} = P_n U_s + q\,P_{n-1}\,U_{s-1},$$

care se demonstrează uşor prin inducţiune. Voi demonstra că între termenii şirului (U) există o relaţie de forma:

(5) $$U_n^r = a_1 U_{n-1}^r + a_2 U_{n-2}^r + \ldots + a_{r+1} U_{n-r-1}^r.$$

Să determinăm coeficienţii $a_i$. Din (4) deducem:

$$\left\{\begin{array}{l} U_n = P_r\ U_{n-r} + q\,P_{r-1}\,U_{n-r-1}, \\ U_{n-1} = P_{r-1}\,U_{n-r} + q\,P_{r-2}\,U_{n-r-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{n-r+1} = P_1\,U_{n-r} + q\,P_0\ U_{n-r-1}. \end{array}\right.$$

Introducem aceste valori în (5) şi găsim:

$$P_r^r U_{n-r}^r + C_r^1 q\,P_r^{r-1} P_{r-1} U_{n-r}^{r-1} U_{n-r-1} + \ldots + q\,P_{r-1}^r U_{n-r-1}^r =$$

$$(a_1 P_{r-1}^r + a_2 P_{r-2}^r + a_{r-1} P_1^r)\,U_{n-r}^r +$$

$$C_r^1 q\,(a_1 P_{r-1}^{r-1} P_{r-2} + a_2 P_{r-2}^{r-1} P_{r-3} + a_{r-1} P_1^{r-1} P_0)\,U_{n-r}^{r-1} U_{n-r-1} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$q^r \left(a_1 P_{r-2}^r + a_2 P_{r-3}^r + a_{r-1} P_0^r + \frac{1}{q^r}\,a_{r+1}\right) U_{n-r-1}^r.$$

Identificând coeficienţii lui $U^{i}_{n-r}\, U^{n-i}_{n-r-1}$ obţinem:

$$\begin{cases} a_1 P^{r}_{r-1} + a_2 P^{r}_{r-2} + a_r P_0 + a_{r+1} P^{r}_{1} = P^{r}_{r}, \\ a_1 P^{r-1}_{r-1} P_{r-2} + a_2 P^{r-1}_{r-2} P_{r-3} + a_r P^{n}_{0} P_{-1} + a_{r+1} P^{r-1}_{-1} P_{-2} = P^{r-1}_{r} P_{r-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1 P_{r-1} P^{r-1}_{r-2} + a_2 P_{r-2} P^{r-1}_{r-3} + a_r P_0 P^{r-1}_{-1} + a_{r+1} P_{-1} P^{r-1}_{-2} = P_r P^{r-1}_{r-l}, \\ a_1 P^{r}_{r-2} + a_2 P^{r}_{r-3} + a_r P^{r-1}_{-1} + a_{r+1} P^{r-1}_{-2} = P^{r}_{r-1}. \end{cases}$$

Pentru simetrie am complectat ecuaţiile cu termenii în $P_{-1}$ și $P_{-2}$, care nu le schimbă întru nimic, căci $P_{-1} = 0$ și $P_{-2} = 1/q$.

Coeficienţii $a_i$ se pot exprima uşor prin câtul a doi determinanţi de forma:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A^{r}_{1} & A^{r}_{2} & \ldots & A^{r}_{r+1} \\ A^{r-1}_{1} B_1 & A^{r-1}_{2} B_2 & \ldots & A^{r-1}_{r+1} B_{r+1} \\ A^{r-2}_{1} B^{2}_{1} & A^{r-2}_{2} B^{2}_{2} & \ldots & A^{r-2}_{r+1} B^{2}_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B^{r}_{1} & B^{r}_{2} & \ldots & B^{r}_{r+1} \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ \Delta = (A_1B_2 - B_1A_2)(A_1B_3 - B_1A_3)\ldots(A_1 B_{r+1} - B_1 A_{r+1}) \times$$
$$(A_2B_3 - B_2A_3)\ldots(A_2 B_{r+1} - B_2 A_{r+1}) \times$$
$$\ldots\ldots\ldots \times$$
$$(A_r B_{r+1} - B_r A_{r+1}).$$

Ţinând seamă de această factorizare şi suprimând factorii comuni găsim:

$$a_i = [(P_{r-1} P_{r-1} - P_{r-2} P_r)(P_{r-2} P_{r-1} - P_{r-3} P_3)\ldots(P_{r-i+1} P_{r-1} - P_{r-i} P_r) \times$$
$$(P_{r-i-1} P_{r-1} - P_{r-i-2} P_r) \ldots\ldots (P_{-1} P_{r-1} - P_{-2} P_r)] /$$
$$[(P_{r-1} P_{r-i-1} - P_{r-2} P_{r-i})(P_{r-2} P_{r-i-1} - P_{r-3} P_{r-i})\ldots(P_{r-i+1} P_{r-i-1} - P_{r-i} P_{r-i}) \times$$
$$(P_{r-i-1} P_{r-i-1} - P_{r-i-2} P_{r-i}) \ldots\ldots (P_{-1} P_{r-i-1} - P_{-2} P_{r-i})].$$

Ţinând seamă de (2) și (4) găsim:

$$a_i = [(-q)^{r-2} P_0\, (-q)^{r-2} P_1 \ldots (-q)^{r-i-1} P_{i-2} (-q)^{r-i+1} P_i \ldots (-q)^{-1} P_r] /$$
$$[(-q)^{r-1} P_{-i} (-q)^{r-2} P_{-i+1} \ldots (-q)^{r-i+1} P_{-2} (-q)^{r-i+1} P_0 \ldots (-q)^{-1} P_{r-i}],$$

$$\therefore \quad a_i = (P_0 P_1 \dots P_{i-2} P_i \dots P_r)/(P_{-i} P_{-i+1} \dots P_{-2} P_0 \dots P_{r-i}),$$

$$\therefore \quad a_i = [q^{i-1} P_0 q^{i-2} P_1 \dots q P_{i-2} P_i \dots P_r]/$$

$$[(-1)^i P_{i-2} (-1)^{i-2} P_{i-1} \dots (-1)^2 P_0 . P_0 \dots P_{r-i}],$$

$$\therefore \quad (6) \quad a_i = (-1)^{i-1} (-q)^{\frac{i(i-1)}{2}} P_i P_{i+1} \dots P_r / P_0 P_1 P_2 \dots P_{r-i}.$$

Posibilitatea determinării coeficienților $a_i$ este o probă a existenței relațiunii (5).

Să facem câteva aplicațiuni. Fie șirul:

$$\alpha_1 + 1 \ , \ \alpha_1 + 2 \ , \ \alpha_1 + 3 , \dots \alpha_1 + n,$$

care este șirul U cu $p = 2$, $q = -1$. Șirul P corespondent este:

$$P_0 = 1 \ , P_1 = 2 \ , P_2 = 3 , \dots P_n = n + 1.$$

Deci:

$$(7) \quad a_i = (-1)^{i-1} (i+1)(i+2)(i+3) \dots (r+1)/$$

$$1 . 2 . 3 \dots (r - i + 1) = (-1)^{i-1} C_{r+1}^{r-i+1} .$$

Relația (5) devine în acest caz, cu oarecare transformări.

$$(8) \quad (\alpha_1 + n)^r - C_{r+1}^1 (\alpha_1 + n - 1)^r + C_{r+1}^2 (\alpha_1 + n - 2)^r + \dots$$

$$\dots + (-1)^i C_{r+1}^i (\alpha_1 + n - 1)^r + \dots + (-1)^{r+1} (\alpha_1 + n - r - 1)^r = 0.$$

Dacă facem aci $\alpha_1 = 0$, rezultă

$$\sum_{i=0}^{i=r+1} C_{r+1}^i (-1)^i (n - i)^r = 0,$$

relațiune remarcabilă între puterile asemenea a numerelor naturale, care se găsește astfel demonstrată pe calea de mai sus dacă eventual nu ar fi cunoscută.

Din relația (8) mai ese:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^r & (\alpha_1 + 1)^r & (\alpha_1 + 2)^r & \dots & (\alpha_1 + r + 1)^r \\ \alpha_2^r & (\alpha_2 + 1)^r & (\alpha_2 + 2)^r & \dots & (\alpha_2 + r + 1)^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r+2}^r & (\alpha_{r+2} + 1)^r & (\alpha_{r+2} + 2)^r & \dots & (\alpha_{r+1} + r + 1)^r \end{vmatrix} = 0,$$

oricare ar fi $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{r+2}$, ceeace cred că nu ar fi ușor de găsit pe altă cale.

In cazul şirului lui FIBONACCI relaţia (5) ne dă:

$$U_n^2 = 2U_{n-1}^2 + 2U_{n-2}^2 - U_{n-3}^2,$$

$$U_n^3 = 3U_{n-1}^3 + 6U_{n-2}^3 - 3U_{n-3}^3 - U_{n-4}^3$$

$$U_n^4 = 5U_{n-1}^4 + 15U_{n-2}^4 - 15U_{n-3}^4 - 5U_{n-4}^4 + U_{n-5}^4$$

$$U_n^5 = 8U_{n-1}^5 + 40U_{n-2}^5 - 60U_{n-3}^5 - 40U_{n-4}^5 + 8U_{n+5}^5 + U_{n-6}^5.$$

Se pot avea propietăţi interesante examinând ecuaţiile caracteristice ale şirurilor ce se formează cu puterile asemenea ale unui şir (U). Voi reveni mai târziu asupra acestei chestiuni.

I. B. FLORESCU.

## NOTE MATEMATICE

27. *Sur la relation du triangle* $rr_a = (p-b)(p-c)$. Voici une vérification simple, *purement géométrique,* de cette formule classique.

Soient un triangle ABC, (O), (I), ($I_a$), les cercles circonscrit, inscrit et exinscrit dans l'angle A ; D et $D_a$, les contacts de (I), ($I_a$), sur BC.

Le quadrilatère $BICI_a$ est inscrit dans une circonférence ($\omega$) de diamètre $II_a$, dont le centre est l'intersection de (O) avec la bissectrice AI. De plus, D et $D_a$ sont symétriques par rapport au milieu de BC. La droite $I_aM$, qui joint l'intersection M du rayon ID avec la circonférence ($\omega$) est donc parallèle à BC, et

$$rr_a = ID \cdot DM = BD \cdot DC = (p-b)(p-c).$$

De même

$$rr_b = (p-a)(p-c) \quad ; \quad rr_c = (p-a)(p-b).$$

V. THÉBAULT.

28. *Asupra notei No. 39 vol. XXXVI.*

Premizele dela cari s'au pornit au făcut ca multe din formulele stabilite în această notă să nu fie adevărate. Pentru a învederà

aceasta, voi notà cu $n(N)$ ordinul $n$ al indicatorilor lui N pentru care avem :

$$\varphi_{n-1}(N) = 2 \qquad \text{şi} \qquad \varphi_n(N) = 1.$$

1) Din raportul de mărime a două numere N şi M nu se pot trage concluziuni asupra raportului de mărime ale lui $n(N)$ şi $n(M)$. Astfel :

$17 \cdot 19 < 19^2$, şi totuşi $n(17 \cdot 19) = 8$, $n(19^2) = 7$

$$\therefore \quad n(17 \cdot 19) > n(19^2).$$

De asemenea :

$$83 \cdot 109^2 \cdot 127^3 > 83^6 \quad , \quad n(83 \cdot 109^2 \cdot 127^3) = 32$$

$$n(83^6) = 37$$

$$\therefore \quad n(83 \cdot 109^2 \cdot 127^3) < n(83^6).$$

Exemplele s'ar puteà multiplicà la infinit. Aceasta în ceeace priveşte premizele.

2) Formula (11)

$$n \geqslant \sum_1^m \alpha_i (m - i + 1) + 1$$

unde $m$ este numărul factorilor primi ai unui număr impar, iar $\alpha_i$ sunt exponenţi în ordinea mărimii

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_m ,$$

nu este exactă. Astfel pentru

$$N = 3^3 5^2 7 :$$

$$n = 10, \quad \sum_1^m \alpha_i (m - i + 1) + 1 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 = 11$$

deci

$$n < \sum_1^m \alpha_i (m - i + 1) + 1.$$

Deasemenea pentru

$$N = 3^5 7^4 11^3 13^2 :$$

$$n = 29, \quad \sum_1^m \alpha_i (m - i + 1) + 1 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 1 = 31$$

$$\therefore \quad n < \sum_1^m \alpha_i (m - i + 1) + 1.$$

3) Formula (13)

$$n \leqslant (t-1)\ \Sigma\alpha + 1$$

în care $\Sigma\alpha$ e suma exponenţilor cu care intră numerile prime în compunerea lui N, $t$ numărul întreg sau zecimal dedus din $l = 2^t + 1$, iar $l$ cel mai mare factor prim conţinut de N; este deasemenea neexactă în cazul general.

De exemplu pentru

$$N = 17^3 . 19:$$

$$19 = 2^t + 1 \quad \therefore \quad 2^{t-1} = 9,$$

şi ar trebui după (13)

$$n < 4\frac{\log 9}{\log 2} + 1 = 12{,}6\ .\ .\ .\ + 1 < 14$$

pe când

$$n = 16.$$

De altfel limitările lui $n$ ce se încearcă, după cum se vede de mai sus, să se stabilească, sunt de prisos, având în vedere articolul D-lui Tiberiu Popovici care dă metoda de a determină repede chiar valoarea exactă a lui $n$.

I. B. Fl.

29. *Două teoreme asupra triunghiurilor cosogonale.*

1) Fie ABC şi MNP două triunghiuri în plan. Dacă tangentele în M, N, P respectiv la cercurile BMC, ANC şi APB determină pe laturile triunghiului ABC în 3 puncte colineare — neapărat şi tangentele în A, B, C respectiv la cercurile NAP, MBP şi MCN, determină pe laturile triunghiului MNP în trei puncte colineare. Triunghiurile ABC şi MNP se numesc triunghiuri cosogonale.

Tangentele în M, N, P respectiv la cercurile BMC, ANC şi APB taie laturile BC, CA şi AB respectiv în $T_a$, $T_b$, $T_c$.

Avem:

$$\frac{T_a B}{T_a C} = \frac{\overline{MB}^2}{\overline{MC}^2}\ ;\ \frac{T_b C}{T_b A} = \frac{\overline{NC}^2}{\overline{NA}^2}\ ;\ \frac{T_c A}{T_c B} = \frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2}$$

şi deci ca punctele $T_a$, $T_b$, $T_c$ să fie colineare trebuie să existe relaţia:

$$(1) \qquad \frac{\overline{MB}^2}{\overline{MC}^2} \cdot \frac{\overline{NC}^2}{\overline{NA}^2} \cdot \frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2} = 1$$

sau

$$(2) \qquad \frac{\overline{AP}^2}{\overline{AN}^2} \cdot \frac{\overline{BM}^2}{\overline{BP}^2} \cdot \frac{\overline{CN}^2}{\overline{CM}^2} = 1$$

şi cum relaţia (1) exprimă condiţia ca tangentele în M, N, P respectiv la cercurile BMC, ANC şi APB să determine pe laturile triunghiului ABC trei puncte colineare, — relaţia (2) dedusă din (1) fiind de aceiaş formă cu (1), rolurile triunghiurilor fiind schimbate,— ea exprimă că tangentele în A, B, C respectiv la cercurile NAP, MBP şi MCN determină pe laturile triunghiului MNP trei puncte colineare.

2) Fiind date 2 triunghiuri cosogonale ABC şi MNP: trei perechi de isogonale $MA_1$, $MA_2$; $NB_1$, $NB_2$; $PC_1$, $PC_2$ considerate respectiv în unghiurile BMC, CNA şi APB, determină pe laturile triunghiului ABC, şease puncte $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ situate pe aceiaş conică. Şi anume: când $A_1B_1C_1$ sunt colineare şi $A_2B_2C_2$ sunt colineare; iar când $A_1B_1C_1$ sunt picioarele a trei ceviene şi $A_2B_2C_2$ sunt picioarele a trei ceviene.

In triunghiul BMC, după teorema lui STEINER, isogonalele $MA_1$, $MA_2$ determină relaţia:

$$(3') \qquad \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{A_2B}{A_2C} = \frac{\overline{MB}^2}{\overline{MC}^2} \cdot$$

Analog în triunghiurile CNA şi APB avem:

$$(3'') \quad \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{B_2C}{B_2A} = \frac{\overline{NC}^2}{\overline{NA}^2}\,; \quad (3''') \quad \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{C_2A}{C_2B} = \frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2} \cdot$$

Inmulţind relaţiile (3'), (3''), (3''') şi ţinând seamă de (1) avem:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=+1$$

Q. E. A.

Cazuri particulare interesante sunt nenumărate, unele din ele le-am publicat în «Foaia Matematică».

MICU GRÜNBAUM.

30. *Câteva forme trigonometrice ale relaţiilor* MENELAUS şi CÉVA.

In Nota 14, *Gazeta Matematică,* vol. 37, s'a arătat că condiţia de concurenţă a trei ceviene, poate fi pusă sub forma:

$$(1)\qquad \frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(B-\beta)}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin(C-\gamma)}=1$$

unde $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sunt unghiurile pe care cevienele le fac în acelaş sens cu laturile triunghiului ABC.

Vom căuta să vedem ce devine relaţia de coliniaritate în aceleaşi condiţii, adică $A_1$, $B_1$, $C_1$ fiind picioarele cevienelor

$$\sphericalangle A_1AB=\alpha\ ,\ \sphericalangle B_1BC=\beta\ ,\ \sphericalangle C_1CA=\gamma.$$

Avem:

$$\begin{cases} A_1B = A_1A\ .\ \sin\alpha/\sin B \\ A_1C = A_1A\ .\ \sin(\alpha-A)/\sin C \end{cases}$$

deci:

$$\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-A)}\cdot\frac{\sin C}{\sin B}\ .$$

Calculând în acelaş mod şi analoagele şi multiplicând, se obţine:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-A)}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+B)}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-C)}\ .$$

Condiţia devine:

$$(2)\qquad \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-A)}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+B)}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-C)}=1.$$

[Forma nesimetrică a acestei relații se traduce prin faptul că nu toate unghiurile $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ au aceeaș mărime față de unghiurile corespunzătoare].

* * *

Presupunând acum că $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sunt unghiurile ascuțite pe care cevienele $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ le fac cu laturile opuse, să cercetăm ce devin aceste relații.

Considerăm pentru precizare,

$$\sphericalangle AA_1B = \alpha \ , \ \sphericalangle BB_1A = \beta \ , \ \sphericalangle CC_1A = \gamma.$$

Condiția de coliniaritate devine:

$$(3) \qquad \frac{\sin(B+\alpha)}{\sin(C-\alpha)} \cdot \frac{\sin(C-\beta)}{\sin(A+\beta)} \cdot \frac{\sin(A+\gamma)}{\sin(B-\gamma)} = 1.$$

Și condiția de concurență:

$$(4) \qquad \frac{\sin(B+\alpha)}{\sin(C-\alpha)} \cdot \frac{\sin(C-\beta)}{\sin(A+\beta)} \cdot \frac{\sin(A-\gamma)}{\sin(B+\gamma)} = 1.$$

Deduse în acelaș mod, ca și anterioarele.

* * *

Se observă că relațiile (1) și (2) cât și (3) și (4) conduc la aceeaș formulă:

$$\frac{\sin A_1AB}{\sin A_1AC} \cdot \frac{\sin B_1BC}{\sin B_1BA} \cdot \frac{\sin C_1CA}{\sin C_1CB} = 1$$

semnul afectat membrului al doilea, depinzând de poziția punctelor $A_1$, $B_1$, $C_1$ pe laturi: (+) pentru coliniaritate și (—) pentru concurență.

* * *

Deși remarcabile, aceste relații, găsite mai mult din spirit de curiozitate, decât din punct de vedere practic, n'am pretenția să se compare cu metodele geometrice, în rezolvarea problemelor.

N. N. Mihăileanu.

31. *Asupra Notei 15.* La punctul 4 a Notei matematice 15 dela pagina 135 Vol. XXXVII să se șteargă ... «*unde o tangentă* (t) *la* ($\Gamma$) *taie dreptele izotrope duse prin punctele imaginare* b' c'».

Adrian C. Gheorghiu.

# CHESTIUNI DE EXAMEN

## UNIVERSITATEA DIN CLUJ, FACULTATEA DE ȘTIINȚE

*Chestiuni de examen în sesiunea Octombrie 1931*

### Anul preparator

### ALGEBRĂ

I. 1°. Cunoscând laturile unui triunghiu să se calculeze înălțimile.

2°. Cunoscând laturile $a$ și $b$ precum și înălțimea $h$ relativă la laturea $a$, să se formeze ecuația care dă laturea necunoscută a triunghiului.

Aplicație:

$$a = 21\ ;\ b = 20,\ h = 12.$$

3°. Să se discute ecuația care dă laturea necunoscută, laturile $a$, $b$ și înălțimea $h$ fiind date, dar oarecare.

II. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x^2 - 2y^2 - 3x + 3 = 0 \\ 4xy - 3y + 1 = 0. \end{cases}$$

### GEOMETRIE

Se dă într'un cerc coarda AB și punctul variabil M. Fie C polul dreptei AB în raport cu cercul. Paralela dusă din C la AB tae dreptele MA și MB în punctele D și E.

1°. Să se arate că AC = CB.

2°. Să se arate că unghiurile $\widehat{ADC} = \widehat{EBC}$.

3°. Din asemănarea triunghiurilor ADC și EBC să se deducă $CD \cdot CE = \overline{CA}^2$, oricare ar fi punctul M pe cerc.

### MATEMATICI ELEMENTARE

*Seria I*

I. Printr'un robinet $a$ se poate umplea un bazin în 7 ore, printr'un alt robinet $b$ se poate goli acest bazin în 11 ore. O treime din bazin fiind plin cu apă, deschidem deodată amândouă robinetele $a$ și $b$. Să se calculeze după cât timp $^3/_4$ din bazin va fi plin cu apă.

II. Luna se află la o distanță de 384.436 Km. de Pământ și are diametrul de 3476 Km. Planeta Jupiter are un diametru de 140.778 Km. Să se calculeze la ce distanță ar trebui să fie Jupiter față de Pământ, pentru ca să vedem această planetă tot așa de mare ca și Luna. (Adică sub același unghiu).

III. Să se afle distanţa dintre două vapoare A şi B pe mare, ştiind că unghiurile din punctele C şi D depe mal sunt:

$$BCD = 40^0\ ;\ ACD = 69^0\ ,\ ADC = 38^0\ 30'\ ;\ BDC = 70^0\ 30',$$

iar distanţa

$$CD = 150\ \text{m}.$$

*Seria II*

I. Pe un teren sunt aşezaţi trei observatori la vârfurile unui triunghiu echilateral cu laturile de 800 m. Din centrul acestui triunghiu se ridică un balon, înălţându-se vertical, şi după un timp se opreşte; toţi observatorii îl văd atunci la o înclinare de $76^0\ 21'$ deasupra orizontului. La ce înălţime s'a oprit balonul?

II. Intr'un bazin de forma unui paralelipiped dreptunghic care are lăţimea egală cu $^2/_5$ din lungime, se toarnă apă pânăla o înălţime de 28 cm. Bazinul conţine astfel 2940 litri apă. Să se calculeze lungimea şi lăţimea bazinului.

III. Preţul unui diamant este proporţional cu patratul greutăţii lui. Ştiind că un diamant de un carat (1 carat cântăreşte 212 miligrame) costă 15.000 lei, cât va costa un diamant greu de 7,36 grame?

## Anul I (Secţia matematici)

## MATEMATICI GENERALE

*Proba teoretică*

1°. Să se determine curba reprezentativă a funcţiunii:

$$y = \frac{3x^3 + 4x^2}{x^2 + 2x + 1}$$

precum şi coordonatele punctului de intersecţie al curbei cu asimptota sa oblică

2°. Să se găsiască soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale:

$$2y' - 5y' - 12y = 22e^{4x} + \sin x - 47\cos x.$$

*Proba practică*

1°. Să se calculeze cu 3 zecimale exacte valoarea integralei:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{2x^3 + 8x^2 + 11x}{(x^2 + 3x + 4)(x^2 + 4x + 4)}\, dx.$$

2°. Fiind dată familia de curbe:

$$y^2 + axy - 6x - \frac{a^2}{2} = 0,$$

să se găsiască ecuaţia înfăşurătoarei şi să se scrie ecuaţiile tangentelor duse la înfăşurătoare în punctele de contact cu abscisa $x = 1$.

## ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

*Proba teoretică*

I. Se dă ecuaţia:

$$2x^5 + 2px^4 + p^3x^2 + q = 0$$

coeficienţii $p$ şi $q$ fiind reali.

1°. Să se aplice acestei ecuaţii teorema lui DESCARTES.

2°. Să se găsiască condiţia ca să aibă maximum de rădăcini reale.

3°. Să se calculeze funcţia simetrică $\Sigma x_1^2 x_2$ relativă la rădăcinile ecuaţiei date.

II. Să se calculeze suma seriei:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{40} + \frac{1}{88} + \cdots + \frac{1}{9x^2 + 3x - 2} + \cdots$$

Să se determine câţi termeni trebue să luăm din această serie pentruca suma lor să reprezinte suma seriei cu aproximaţia de $\frac{1}{10^4}$.

*Proba practică*

Să se determine baza unui triunghiu isoscel inscris într'un cerc de rază 1, astfel ca aria lui să fie egală cu 1.

Se va calcula baza cu aproximaţie de $\frac{1}{10^3}$.

## GEOMETRIE ANALITICĂ

*Proba teoretică*

Se consideră iperbola de centru C care are ca asimtote bisectoarea primului cadran şi dreapta $y = 1$. Unul din vârfurile reale, A, este pe axa $Oy$. Fie B punctul în care iperbola tae axa $Ox$.

1°. Să se calculeze coordonatele punctului D, simetricul lui B în raport cu C.

2°. Ecuaţia tangentei în D.

3°. Să se verifice că tangenta în punctul D la iperbolă e tăiată de asimtote în două puncte echidistante de D.

4°. Aria triunghiului ABC.

*Proba practică*

Să se reprezinte grafic curba:

$$x^3 + (y + 1)^3 = 3x(y + 1).$$

## GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

Intersecţia unui con cu un cilindru.

Cadrul are dimensiunile orizontală şi verticală de 420 mm. şi 270 mm. Linia de pământ este paralelă cu marginea orizontală la distanţa de 100 mm. de sus jos.

Conul are baza în planul orizontal cu centrul în punctul $O_1$ (—67, 120, 0) şi raza $R_1 = 42{,}5$ mm. şi vârful S (58, 0, 85).

Cilindrul are baza în planul orizontal în punctul $O_2$ (44, 108, 0) şi raza $R_2 = 35$ mm. Generatoarele cilindrului fac în orizontal şi vertical cu linia de pământ unghiurile $\alpha$ şi $\beta$ astfel că $\operatorname{tg}\alpha = \frac{48}{31}$ şi $\operatorname{tg}\beta = \frac{52}{50}$.

# BIBLIOGRAFIE

**Bulletin of the American Mathematical Society.** Vol. XXXVIII, No. 1. Partea I. Ianuarie 1932. New-York. Adunarea din Columbus, de M. H. Ingraham. Adunarea din Noemvrie din Pasadena, de T. M. Putnam. Raportul asupra geometrii algebrice din *Bulletin of the Natimal Research Council*, de T. R. Hollcroft. Extrase din comunicări.

**Bulletin of the American Mathematical Society.** Vol. XXXVIII. No. 2. Februarie 1932. New-York. Notă asupra matricei discriminant al unei algebre, de L. E. Bush. Apolaritate în câmpurile lui Galois de ordinul $2^n$, de A. D. Campbell. O clasă de funcţiuni universale, de G. Pall. Figura plană formată de 7 linii reale, de H. S. White. Funcţiuni poligenice de variabile hipercomplexe, de P. W. Ketchum & T. Martin. Secuenţe complect monotonice finite şi infinite, de I. J. Schoenberg. Asupra suprafeţelor în spaţiul cu $r$ dimensiuni, de B. C. Wong. Compacitatea spaţiului $L_p$, de J. D. Tamarkin. Privitor la adaose la algebre, de J. L. Dorroh. Asupra rangului produsului unor matrice patrate, de W. O. Menge. O triadă de suprafeţe rostogolitoare definite prin polare reciproce, de A. F. Carpenter. Notă asupra algebrelor reductibile fără o bază finită, de M. H. Ingraham. Sistem exagonal de şapte linii în un plan, de L. D. Cummings. O metodă practică pentru o reprezentare modulară a operaţiunilor finite şi a relaţiunilor, de B. A. Bernstein & N. Debely. Uzul integrărilor şi diferenţierilor fracţionale pentru obţinerea unor desvoltări în termeni de funcţiuni Bessel sau de sinusuri ori cosinusuri, de W. O. Pennell. Asupra integrării funcţiunilor nemărginite, de W. M. Whyburn. Reflecţiuni în spaţiu de funcţiuni, de L. S. Kennison. O extensiune a ecuaţiilor lui Lagrange, de C. A. Shook.

**American Mathematical Society.** *Catalogue of the library.* Ianuarie 1932.

**Boletin matematico elemental.** Anul II, No. 4, Iunie 1931. Buenos-Aires. Curiozităţi aritmetice.

**Idem.** No. 10. Decemvrie 1931. Al doilea concurs al Buletinului matematic elementar.

**Idem.** No. 11. Ianuarie 1932. Teorema lui MENELAUS.

**Journal de mathématiques elementaires** publié par H. VUIBERT. Anul 56. No. 10. Fevruarie 1932.

**Journal de mathématiques elementaires** publié par H. VUIBERT. Anul 56. No. 11. Martie 1932. Paris.

D. BARBILIAN. *Untersuchungen über die Cliffordschen Ketten.* Bukarest 1932.

D. BARBILIAN. *Beitrag zu einem Satz des Herrn* POMPEIU. (Extras din *Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique «Roi Carol II»*). Anul III. Bucureşti 1932.

G. VRÂNCEANU. *Sur quelques points de la théorie des espaces non holonomes.* (Extras din *Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi*). Cernăuţi 1932.

G. VRÂNCEANU. *Parallélisme et courbure dans une variété non holonomes.* (Extras din *Atti del Congresso internazionale dei Matematici*). Bologna 1928.

G. VRÂNCEANU. *Memoriu de titluri şi lucrări.* Iaşi 1929.

N. CIORANESCO. *Sur les fonctions harmoniques conjugquées.* (Extras din *Bulletin des sciences mathématiques*). Paris 1932.

N. CIORANESCO. *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires avec les conditions initiales linéaires les plus générales.* (Extras din *Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi*). Cernăuţi 1931.

G. DEMETRESCU. *Dare de seamă asupra activităţii observatorului în cursul anului 1931.* (Publicaţiune a *Observatorului astronomic din Bucureşti*). Bucureşti 1932.

ALFRED HENRI. *Le calcul des differences finies et ses applications.* Tradus din englezeşte de A. SALLIN. Paris. Librairie scientifique Herman et Cie. Rue de la Sorbonne 6. 1932.

Cartea este făcută pentru Societăţi de actuari şi de capitalizare, şi e scrisă concis şi clar, cu exemple tratate complect şi exerciţii numeroase, bine şi cu gust alese. Ea poate fi folositoare şi celor ce se ocupă cu ştiinţele experimentale, la care sunt de calculat interpolări, tabele, formule empirice, etc.

Primul capitol tratează despre funcţiuni şi reprezentarea lor ; alte două capitole despre diferenţele finite, apoi altele cu interpolări, diferenţe centrale, interpolări inverse, sumări, integrări, diferenţe subdivizate, diferenţele funcţiunilor de două variabile. Capitolele X—XIV dau noţiuni de calculul diferenţial, iar cel următor relaţiunile dintre acest calcul şi calculul diferenţelor finite. Capitolele XVI—XIX dau noţiuni de calculul integral, Capitolul XX despre integrarea aproximativă, iar ultimul capitol noţiuni de calculul probabilităţilor.

I. I.

Gheorghe Naneş. *Lecţiuni de astronomie pentru clasa VII secundară.* Bucureşti 1931. Preţul 138 lei. Depozit la *Agenţia română Hachette*, Strada Lipscani 26.

Intr'un volum de 320 pagini autorul publică lecţiunile pe care le predă ca profesor de cosmografie la Liceul Sft. Sava din Bucureşti împreună cu unele adaose pentru complectarea cunoştinţelor celor ce vor citi această carte. După cum arată şi în prefaţă, s'a căutat ca expunerea să se facă avându-se în vedere mişcările reale iar nu cele aparente. Astfel în loc de a se spune *«Steaua trece la meridian»* s'a scris *«Meridianul locului trece în dreptul stelei»* ceeace dă mai multă preciziune expunerii faptelor.

După câteva pagini în care se arată aspectul cerului şi se dă definiţiuni materia este împărţită în următoarele capitale: Astronomia sferică, Sistemul solar şi pământul, Soarele, Luna, Planetele, Cometele, Noţiuni de gravitaţia universală, Distanţele cereşti, Noţiuni de astronomie stelară, Mecanica cerească. Cartea are numeroase figuri explicative, fotografii şi portretele marilor astronomi. Oriunde cunoştinţele de matematice de azi ale liceenilor nu mai permite priceperea unor chestiuni, s'au dat explicaţiuni, printre care găsim şi noţiunile necesare de mecanică elementară, noţiuni asupra conicelor, etc.

Chestiunea calendarului e tratată mai pe larg. Autorul cunoscător al dorinţei lumei economice de a se termina cu babilonia actualului calendar, închee acest capitol cu următoarele cuvinte:

*«Cel mai nimerit calendar ar fi acela având anul de săptămâni întregi şi Paştile la o dată fixă, d. e. la 14 Aprilie, adică a doua Duminică din Aprilie. Astfel toate sărbătorile ar fi la date fixe.* S'ar câştiga din punct de vedere practic şi al disciplinei bisericeşti».

Expunerea este în general clară şi precisă. Sunt însă şi unele scăpări din vedere care poate da loc la ambiguităţi. Aşa la pag. 241—242 se spune:

„Cuplul de forţe n'are alt efect decât de a da corpului o rotaţie, până ce forţele devin direct opuse, când se anulează".

Cartea se poate citi cu uşurinţă de cei ce posedă cunoştinţele matematice cerute axi în liceele noastre şi poate fi folositoare şi persoanelor care se interesează de problemele elementare ale astronomiei.

I. I.

N. Abramesco. *Le mouvement d'une figure plane variable qui reste semblable à elle même.* (Extras din *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa*). Bologna 1932.

N. ABRAMESCO. *Sur le facteur de convergence uniforme de* M. LEJA *d'une série de polynomes.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences*). Paris 1931.

N. ABRAMESCO. *Sur la détermination des fonctions holomorphes dans des domaines données.* Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*). Paris 1932.

## CERERI

216. Cine-mi poate procura:

1. Cursul de algebră predat de D-l profesor VASILE TEODOREANU elevilor liceului militar din Iaşi?

2. *Foaia Matematică,* anul I numerele 1, 3, 4, 7, 8?

3. Culegere de probleme din Geometria analitică predat de D-l profesor D. VASILOVICI la Liceul real ortodox din Cernăuţi?

S.-LT. PANAITE N. TH.
(Student Bucureşti).

*Răspuns. Asupra cererii 197.* In „V. A. URECHIA" *Opere complecte.* Bucureşti 1882 la articolul *«Veşti escelinte»* pag. 399 găsim: *Cursu de algebră elementară,* profesatu de EL. ANGELESCU, ingineru civile, vechiu elevu alu scolei centrale din Paris. Prima ediţiune. 16°. Bucureşti. Tip. Laboratorilor 1869.

„De câteva zile şcolele nostre dobândescu unu opu, care va facilita inveţământulu şciinţelor, în carele atâta e de lipsită biblioteca şcolară. Să aducem felicitările noastre D-lui ANGELESCU pentru utila sa carte".

N. M.

## DIVERSE

Societatea Română de Ştiinţe a ţinut Adunarea generală anuală în ziua de 7 Martie. A fost ales ca Preşedinte al Societăţii D-l G. ŢIŢEICA.

Secţiunea matematică a acestei Societăţi a ţinut şedinţele următoare:

*a)* In seara zilei de 22 Fevruarie când au vorbit D-l D. BARBILIAN despre o extindere a teoremei lui FEUERBACH şi D-l N. CIORĂNESCU despre Condiţii la limită pentru ecuaţii diferenţiale ordinare.

*b)* In seara zilei de 7 Martie, când a vorbit D-l Inginer EUG. BODEA despre un nou sistem coherent de unităţi practice dotat cu patru dimensiuni de bază, la discuţie luând parte şi D-nii C. BUDEANU şi D. GHERMANI.

*c)* In seara zilei de 21 Martie, când au vorbit D-l AL. PANTAZI asupra perechilor de congruienţe stratificabile şi D-l GH. MIHOC despre câteva proprietăţi ale unor congruienţe particulare de normale afine.

# PROBLEME REZOLVATE

*PROBLEMA 2383. *Să se rezolve sistemul:*

$$2(x^3 + y^3) = ab(a + b)$$
$$3(x^2 + y^2) = a^2 + b^2 + ab.$$

I. LINTEȘ.

Notând că:

$$A^2 = a^2 + b^2 + ab,$$

avem:

$$2(x + y)[x^2 + y^2 - xy] = ab(a + b)$$
$$3(x^2 + y^2) = A^2.$$

Sau:

$$(x + y)[2A^2 - 6xy] = 3ab(a + b)$$
$$3(x + y)^2 - A^2 = 6xy.$$

Eliminând pe $xy$ obținem:

$$(x + y)^3 - A^2(x + y) + ab(a + b) = 0.$$

Sau:

$$(x + y)^3 - (a + b)^2(x + y) + ab(x + y) + ab(a + b) = 0$$
$$\therefore \quad (x + y + a + b)[(x + y)(x + y - a - b) + ab] = 0.$$

Prin urmare avem:

$$x + y = -(a + b)\ ;\ x + y = a\ ;\ x + y = b.$$

Inlocuind mai sus, găsim soluțiunile:

$$xy = \frac{2(a^2 + b^2) + 5ab}{6}$$
$$xy = \frac{2a^2 - b^2 - ab}{6}$$
$$xy = \frac{-a^2 + 2b^2 - ab}{6}.$$

De unde :

1) $$x,\ y = \frac{-3(a+b) \pm i\sqrt{3}(a^2+b^2+4ab)}{6}$$

2) $$x,\ y = \frac{3a \pm \sqrt{3}(-a^2+2b^2+2ab)}{6}$$

3) $$x,\ y = \frac{3b \pm \sqrt{3}(2a^2-b^2+2ab)}{6}.$$

Rădăcinile vor fi reale când :

1) $$:-2-\sqrt{3} < \frac{b}{a} < -2+\sqrt{3}$$

2) $$1-\sqrt{3} < \frac{a}{b} < 1+\sqrt{3}$$

3) $$1-\sqrt{3} < \frac{b}{a} < 1+\sqrt{3}.$$

I. C. VASILIU
(elev-inginer).

---

PROBLEMA 2956. *Să se demonstreze identitatea lui* LAGRANGE *prin consideraţiuni de mecanică.*

I. IONESCU.

Să considerăm un sistem de forţe în spaţiu. Să le raportăm la trei axe dreptunghiulare OX, OY, OZ. Să reducem aceste forţe în raport cu origina O la o rezultantă R cu componentele X, Y, Z şi la un moment $\mathcal{M}$ cu componentele L, M, N. Să reducem acelaşi sistem în raport cu un alt punct O′ cu coordonatele $x$, $y$, $z$.

Vom avea aceiaşi rezultantă R în mărime şi direcţiune şi un nou moment $\mathcal{M}'$ cu componentele L′, M′, N′. Se ştie că avem :

$$L' = L-(yZ-zY),\quad M' = M-(zX-xZ),\quad N' = N-(xY-yX).$$

Dar diferenţa $(\mathcal{M}-\mathcal{M}')$ are ca expresiune $OO'.R.\sin(OO',R)$.

Avem însă:

$$\overline{OO'}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad , \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

$$\sin^2(OO', R) = 1 - \cos^2(OO', R),$$

$$\sin^2(OO', R) = 1 - (xX + yY + zZ)^2/(x^2 + y^2 + z^2)(X^2 + Y^2 + Z^2)^2,$$

$$\therefore \quad \overline{OO'}^2 \cdot R^2 \cdot \sin^2(OO', R) = (x^2+y^2+z^2)(X^2+Y^2+Z^2) - (xX+yY+zZ)^2.$$

Insă o altă expresiune a lui $(\mathcal{M} - \mathcal{M}')$ la patrat este:

$$(L - L')^2 + (M - M')^2 + (N - N')^2 = (yZ - zY)^2 + (zX - xZ)^2 + (xY - yX)^2.$$

Egalând cele două expresiuni găsite pentru pătratul lui $(\mathcal{M} - \mathcal{M}')$ găsim identitatea lui LAGRANGE:

$$(yZ - zY)^2 + (zY - yZ)^2 + (xY - yX)^2$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) - (xY + yY + zZ)^2.$$

ADRIAN C. GHEORGHIU
Student.

O soluţie bazată pe calcul vectorial a fost dată de D-l AL. V. NICULESCU.

---

PROBLEMA 3704. *Să se construiască un triunghiu cu laturile în progresie aritmetică cunoscând cercurile sale înscris şi circumscris.*

P. I. GHIŞOIU.

Fie:

$$BC = a - k \quad ; \quad AB = a \quad ; \quad CA = a + k$$

laturile necunoscute ale triunghiului de construit. Avem:

$$\frac{AB}{BC + CA} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

şi problema revine la un caz cu totul particular al problemei 2656 a cărei soluţie s'a publicat la pagina 218, Vol. XXXVII, *Gazeta Matematică.*

*Observaţiuni.*

1°. D-l Ad. C. Gheorghiu (Student, Bucureşti) a dat o foarte frumoasă şi complectă soluţie, analoagă cu acea pe care a dat-o problemei 2656, pe care i-am publicat-o la pagina 218 din acest an.

2°. Au rezolvat problema prin calcule, utilizând relaţiunile dintre elementele unui triunghiu, D-nii: N. N. Velicescu; E. I. Dumitrescu; I. C. Savin; I. Murăroiu; Gh. I. Balaban şi N. N. Mihăileanu.

3°. Doi corespondenţi, influenţaţi unul de altul, au confundat problema 3704 cu problema 1959 din F. G. M., în care se cere *să se construiască un triunghiu căruia i se cunoaşte o latură şi razele cercurilor circumscris şi înscris*. Rezultatul a fost că au copiat soluţia problemei 1959 din F. G. M. şi au dedus că problema 3704 este supraabondent. Ca răsplată nu le citez numele aici.

Gh. B.

---

*PROBLEMA 3886. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0.$$

Cezar Coşniţă.

*Soluţie şi generalizare* dată de D-nii: Cr. M. Grecu (Lic. Alimănişteanu, Oltenita); P. I. Ghişoiu (Şc. Politechnică Buc.) şi Haralamb P. Ionescu-Biss (Oltenita).

1°. Să considerăm ecuaţia generală:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sin(x + ih) = \frac{\sin\left(x + \frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}} = 0$$

în care dacă facem $h = 2x$, obţinem ecuaţia:

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x} = 0,$$

care generalizează pe cea propusă şi care se reduce la:

$$\sin nx = 0$$

dând soluţiile:

$$x = \frac{2k\pi}{n} \quad \text{şi} \quad x = \frac{(2k+1)\pi}{n}.$$

In cazul particular al problemei propuse, unde avem,

$$2n - 1 = 7 \quad \therefore \quad n = 4,$$

soluţiile vor fi:

$$x = k\frac{\pi}{2} \quad \text{şi} \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \cdot$$

$2^0$. Să considerăm şi ecuaţia generală:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \cos(x + ih) = \frac{\cos\left(x + \frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}} = 0,$$

care pentru $h = 2x$ devine:

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos(2n-1)x = \frac{\cos nx \sin nx}{\sin x} = 0,$$

iar soluţiile vor fi date de ecuaţia:

$$\sin nx = 0$$

deja studiată sub ($1^0$) şi de ecuaţia:

$$\cos nx = 0,$$

care ne dă:

$$x = \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n} \cdot$$

Au mai rezolvat corect problema, fără a o generaliza, D-nii: Iulian Alexiu; N. Donciu (Bârlad); Vasile G. Drăguţ (Târgovişte); Ion V. Măţieş (Cluj) şi Leonte Mircea A. Negrea (Student, Bucureşti).

Cpt. Gh. N.

---

*PROBLEMA 4006. *Să se găsească suma coeficienţilor binomului lui* Newton *luaţi din patru în patru.*

Căpitan I. Linteş.

Avem de calculat patru asemenea sume şi anume:

$$S_0 = C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots$$

$$S_1 = C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + C_n^{13} + \ldots$$

$$S_2 = C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + C_n^{14} + \ldots$$

$$S_3 = C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + C_n^5 + \ldots$$

Desvoltând prima parte a egalității:

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\,\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

și separând partea reală și cea imaginară găsim:

(1) $$S_0 - S_2 = (\sqrt{2})^n \cdot \cos\frac{n\pi}{4}$$

(2) $$S_1 - S_3 = (\sqrt{2})^n \cdot \sin\frac{n\pi}{4}.$$

Deasemenea desvoltând pe $(1+1)^n$ și pe $(1-1)^n$ după formula binomului găsim:

(3) $$S_0 + S_2 - S_1 - S_3 = 0.$$

(4) $$S_0 + S_2 + S_1 + S_3 = 2^n.$$

Rezolvind sistemul format de ecuațiile (1), (2), (3) și (4) obținem valorile:

$$S_0 = 2^{n-2} + (\sqrt{2})^{n-2} \cdot \cos\frac{n\pi}{4}$$

$$S_1 = 2^{n-2} + (\sqrt{2})^{n-2} \cdot \sin\frac{n\pi}{4}$$

$$S_2 = 2^{n-2} - (\sqrt{2})^{n-2} \cdot \cos\frac{n\pi}{4}$$

$$S_3 = 2^{n-2} - (\sqrt{2})^{n-2} \cdot \sin\frac{n\pi}{4}$$

GEORGE ȘT. ROȘCA.

Au dat soluții analoge D-nii: HARALAMB P. IONESCU-BISS, N. N. MIHĂILEANU, JUSTIN AURIAN și N. N. ALDEA.

D-ra ȘTEFANIA TRUȚESCU și D-l VASU VASILE au dat numai soluția lui $S_0$.

D-l P. VARLAM a dat o soluție incomplectă.

D-l N. N. MIHĂILEANU arată că problema a fost rezolvată în alt mod și de D-l TEODOR MARȘIEN în *Revista Matematică* (Nota 22 din Noembrie 1931).

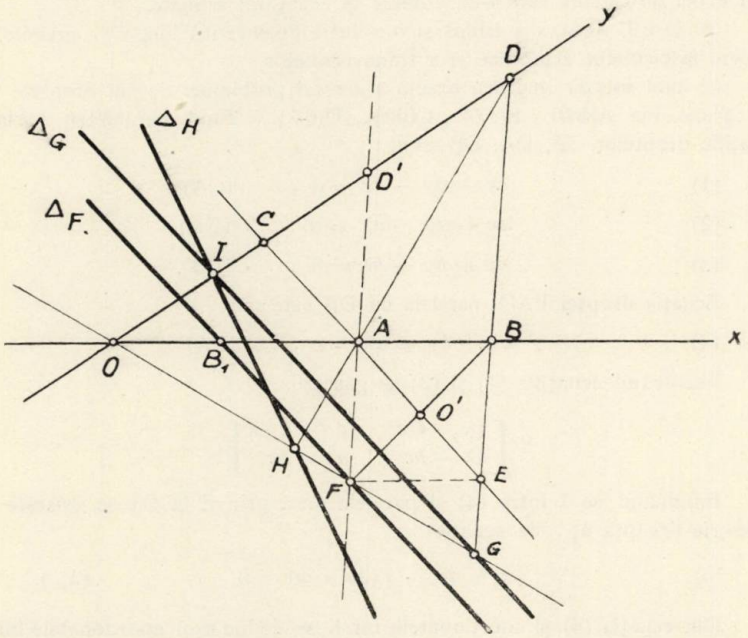
I. L.

PROBLEMA 4020. *Se dă unghiul* xOy. *Fie* A *şi* B *puncte fixe pe* Ox; C *un punct fix şi* D *un punct mobil pe* Oy; E *intersecţia dreptelor* AC, BD; F *al patrulea vârf al paralelogramului* AEFB; H *şi* G *intersecţiile dreptei* OF *cu* AD *şi cu* BD. *Să se găsească locul geometric al punctelor* F, G, H.

COL. GH. BUICLIU.

*Soluţie geometrică*, dată de D-l S.-LT. I. G. ZAMFIRESCU (Reg. 6 Artilerie, Piteşti).

Fie O' centrul paralelogramului ABEF. De oarece B este fix, F este simetricul lui B faţă de O' şi O' descrie dreapta fixă CA




rezultă că F descrie o dreaptă $\Delta_F$ paralelă cu CA, simetrica lui B faţă de CA.

$\Delta_F$ taie pe $Ox$ în $B_1$ simetricul lui B faţă de A.

Din triunghiurile asemeni OAF, OBG se scoate:

$$\frac{OF}{OG} = \frac{OA}{OB} = k,$$

care arată că G descrie omoteticul lui F, centrul de omotetie fiind O şi raportul de omotetie $k$.

Cum F descrie o dreaptă $\Delta_F$ rezultă că G va descrie omotetica lui $\Delta_F$, adică o dreaptă $\Delta_G$ paralelă cu $\Delta_F$.

Laturile triunghiurilor DHG trec prin 3 puncte colineare fixe O, A, B. Deci aceste triunghiuri sunt omologice şi cum 2 vârfuri D şi G descriu 2 drepte fixe care se întâlnesc în I, rezultă că şi al treilea vârf H se va găsi pe o dreaptă $\Delta_H$, care trece prin I.

*Observaţiuni.*

1°. D-na Ştefania Căpitan Truţescu (Cluj; D-nii: N. N. Mihăileanu (Constanţa); Em. Mereuţă (Student matematici); J. Aurian şi C. V. Cinschy au trimis soluţii analitice însă în stabilirea ecuaţiilor dreptelor $\Delta_F$, $\Delta_G$, $\Delta_H$ au făcut erori de calcule care i-au condus la ecuaţiuni eronate.

2°. D-l J. Aurian a trimis şi o soluţie geometrică lungă şi greoaie, cu ajutorul fascicolelor armonice şi a transversalelor.

3°. Iată soluţia analitică exactă a acestei probleme. Se iau dreptele $Ox$, $Oy$ ca axe. Fie $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(0,c)$, $D(0,\lambda)$ $\lambda$ fiind parametru variabil. Ecuaţiile dreptelor CA, DA, DB sunt:

$$(1) \qquad cx + ay - ac = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (CA)$$

$$(2) \qquad \lambda x + ay - a\lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (DA)$$

$$(3) \qquad \lambda x + by - b\lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (DB).$$

Ecuaţia dreptei FAD' paralelă cu DB este:

$$(4) \qquad \lambda x + by - a\lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (FA).$$

Rezolvând ecuaţiile (1) şi (3) se găseşte:

$$E\left[\frac{(\lambda - c)ab}{a\lambda - bc} \; ; \; \frac{(a - b)c\lambda}{a\lambda - bc}\right].$$

Eliminând pe $\lambda$ între (4) şi paralela dusă prin E la $Ox$ se găseşte că F descrie dreapta $\Delta_F$, de ecuaţie

$$(5) \qquad cx + ay - c(2a - b) = 0 \qquad (\Delta_F).$$

Din ecuaţia (4) şi coordonatele lui E se deduc uşor coordonatele lui F:

$$F\left[x_F = \frac{a^2\lambda + b^2c - 2abc}{a\lambda - bc}, \; y_F = \frac{(a - b)c\lambda}{a\lambda - bc}\right].$$

Ecuaţia dreptei OF este:

$$y = \frac{y_F}{x_F}x$$

$$y = \frac{(a - b)c\lambda}{a^2\lambda + b^2c - 2abc}. \qquad (6)$$

Eliminând pe $\lambda$ între (3) şi (6) se găseşte că G se mişcă pe dreapta

$(\Delta_G)$ $$acx + a^2y - bc(2a - b) = 0.$$

Eliminând pe $\lambda$ între (2) şi (6) se găseşte că H descrie dreapta

$(\Delta_H)$ $$c(3ab - b^2 - a^2)x + a^3y - abc(2a - b) = 0.$$

Se vede că $\Delta_F$ şi $\Delta_G$ sunt paralele cu CA. Din ecuaţiile din urmă se găseşte uşor că $\Delta_G$ şi $\Delta_H$ se întâlnesc întrun punct I pe $Oy$, de ordonată

$$OI = \frac{bc(2a - b)}{a^2}.$$

Gh. B.

---

*PROBLEMA 4047. *Să se rezolve în numere întregi ecuaţiunea:*

$$x^2 + y^2 + z^2 + (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 + 8xy = 216.$$

I. Murăroiu.

*Soluţie* dată de D-nii: N. N. Aldea (Student, Bucureşti); A. Em. Bădescu; N. N. Mihăileanu (Constanţa) şi Şt. E. Olteanu.

Efectuând parantezele, ecuaţia dată se poate scrie în mod succesiv:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) + 6xy - 2xz - 2yz = 216$$

$$3(x + y)^2 + 3z^2 - 2xz - 2yz = 216$$

$$3(x + y)^2 - 2z(x + y) + 3z^2 - 216 = 0$$

şi dacă vom însemna:

$$x + y = u$$

obţinem ecuaţia:

$$3u^2 - 2uz + 3z^2 - 216 = 0$$

pe care rezolvând-o în raport cu $u$, găsim:

$$u = \frac{z \pm 2\sqrt{2(81 - z^2)}}{3}. \qquad (1)$$

Pentru a avea pe **u** întreg, aşa cum cere problema, trebuie ca expresia de sub radical, să fie în prim rând pozitivă, ceeace atrage condiţia:

$$-9 < z < 9$$

şi în al doilea să fie un pătrat perfect. Observăm încă că $z$ trebuie să fie un număr impar, deci numerile de cercetat sunt:

$$\pm 1 \; ; \; \pm 3 \; ; \; \pm 5 \; ; \; \pm 7 \quad \text{şi} \quad \pm 9$$

şi din acestea numai numerile $z$:

$$\pm 3 \; ; \; \pm 7 \quad \text{şi} \quad \pm 9$$

fac expresia de sub radical un pătrat perfect. Introducând aceste valori în (1) şi oprind numai pe acelea cari fac pe **u** întreg găsim soluţiile următoare, unde semnele se corespund:

$$z = \pm 3 \quad u = x + y = \pm 9 \quad \text{şi} \quad u = x + y = \mp 7$$
$$z = \pm 7 \quad u = x + y = \mp 3$$
$$z = \pm 9 \quad u = x + y = \pm 3.$$

Au mai rezolvat problema, fără a da toate soluţiile, D-nii: I. CURCHI (Bacaloreat Chişinău) şi SUBLT. I. C. SAVIN (Student Iaşi).

*Observare:* Numerele $x$ şi $y$, pot fi oricum: fracţionare, zecimale, etc. cu condiţia ca suma lor să fie cea indicată în soluţii.

CPT. GH. N.

---

PROBLEMA 4065. *Se dau în cercul de centru* O *razele* OA, OB, OC, *astfel că unghiurile* AOB = BOC = COA. *Fie* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *proecţiile pe* OA, OB, OC *ale unui punct* M *al cercului* O.

1°. *Să se arate că triunghiul* $\alpha\beta\gamma$ *este echilateral şi de mărime constantă.*

2°. *Să se afle locul centrului de greutate al triunghiului* $\alpha\beta\gamma$.

N. ABRAMESCU.

*Soluţie* dată de D-rele: ABRAMESCU MARIANA, FABIUS DORINA, LEBER MARGARETA şi de D-nii: OLTEANU ŞTEFAN, PATRAULEA NICULAE, POPESCU I. MIHAIL-STĂNEŞTI, PETRESCU I. ION, POPESCU N. PETRE, VELICESCU N. 1°. Ducând perpendicularele $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, s'au format patrulaterele inscriptibile $O\gamma M\beta$, $O\alpha\beta M$, $\alpha O\gamma M$, înscrise în cercul de diametru O.M. Deci triunghiul $\alpha\beta\gamma$ este înscris în cercul de diametru OM, cu raza jumătate din raza cercului dat.

Cum unghiurile AOB = BOC = COA = $\frac{1}{3}360^0 = 120^0$, presupunând că Oβ este prelungirea lui BO, atunci ea este bisectoarea unghiului AOC, şi deci unghiurile $\alpha O\beta = \beta O\gamma = 60^0$. Din patrulaterul inscriptibil $\alpha O\gamma\beta$ rezultă că unghiurile $\alpha\gamma\beta = \alpha O\beta = 60^0$, şi $\gamma\alpha\beta = \gamma O\beta = 60^0$. Triunghiul $\alpha\beta\gamma$ având unghiurile egale, este echilateral, şi cum este înscris în cercul de diametru OM de mărime constantă, urmează că şi acest triunghiu $\alpha\beta\gamma$ este de mărime constantă.

$2^0$. Centrul de greutate al triunghiului $\alpha\beta\gamma$, echilateral, este şi centrul cercului circumscris acestui triunghi, adică mijlocul lui OM. Deci când M variază pe cercul dat, locul centrului de greutate este un cerc cu centrul în O şi cu raza jumătatea razei cercului dat.

*Observare.*

D-l N. N. Mihăilescu observă că proprietatea are loc pentru cazul când se consideră $n$ raze $OA_i$, $i = 1, 2, \cdots n$, în cercul cu centrul O şi raza OM = R, care fac între ele unghiuri egale cu

$$\frac{2\pi}{n},\ A_1OA_2 = A_2OA_3 = \cdots = A_n OA_1 = \frac{2\pi}{n}.$$

## *EXERCIŢII

26. Dacă între cantităţile pozitive $c_1, c_2, \ldots c_n$ avem relaţiile:

$$\frac{c_2}{c_1} > \frac{c_3}{c_2} > \ldots > \frac{c_n}{c_{n-1}}$$

vom avea şi:

$$\frac{c_2}{c_1} > \sqrt{\frac{c_3}{c_1}} > \sqrt[3]{\frac{c_4}{c_1}} > \ldots > \sqrt[n-1]{\frac{c_n}{c_1}}.$$

A. Angelescu.

R. Fie $\alpha_i = \frac{c_{i+1}}{c_i}$. Vom avea:

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_{n-1}\ ,\quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_i = \frac{c_{i+1}}{c_1}$$

şi trebuie să arătăm că:

$$\alpha_1 > \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} > \sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} > \ldots > \sqrt[n-1]{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}$$

adică:

$$\sqrt[k]{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} > \sqrt[k+1]{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{k+1}}$$

sau:

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k > (\alpha_{k+1})^k$$

ceeace rezultă din produsul neegalităţilor:

$$\alpha_1 > \alpha_{k+1} \ , \ \alpha_2 > \alpha_{k+1} \ , \ \ldots \ , \ \alpha_k > \alpha_{k+1} .$$

27. Să se verifice relaţia:

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}A \, [\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C - 1] = \frac{a^2}{4Rr} .$$

E. Mereuţă.

R. Se consideră relaţiile:

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C - 1 = \frac{r_a - r}{r} \ ; \ \cos^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{r_b + r_c}{4R} \ ; \text{ şi } (r_a - r)(r_b + r_c) = a^2.$$

28. ACB şi AEB fiind două triunghiuri înscrise în cercul de diametru AB, iar CD şi EF înălţimile lor, să se determine valoarea lineară a lui $x$, care satisface raportul:

$$\frac{CA \cdot CB \cdot CD}{EA \cdot x \cdot EB} = \frac{DB \cdot DA}{FB \cdot FA} .$$

N. N. Mihăileanu.

R. Insemnând $\sphericalangle BAC = \alpha$, şi $\sphericalangle BAF = \beta$, calculăm elementele triunghiurilor, in funcţie de AB, $\alpha$ şi $\beta$, inlocuim în raportul dat, simplificăm şi obţinem:

$$x = AB \sin\beta \cos\beta = EF.$$

29. Să se stabilească identitatea

$$\log \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sum_{n=0}^{n=y} \frac{\cos^{n+1} x}{2n+1} = 0$$

(log însemnând logaritm neperian).

Corneliu Georgescu.

R. Scăzând desvoltările

$$\log(1+y) = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \ldots\ldots$$

$$\log(1-y) = -\frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \ldots\ldots$$

valabile numai pentru $|y| < 1$, avem

$$\log\frac{1-y}{1-y} = -2\left(\frac{y}{1} + \frac{y^3}{3} + \ldots\ldots\right).$$

Punând $y = \cos x$ se obţine

$$2\log \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -2\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos^3 x}{3} + \ldots\ldots\right)$$

care e relaţia din enunţ.

30. In orice triunghiu există relaţia :

$$S = rr_a \frac{O_b O_c}{O'O_a}.$$

$O_a$, $O_b$, $O_c$ fiind centre cercurilor exinscrise, O' centrul cercului inscris, iar celelalte notaţii, cele obişnuite.

MIHAIL I. POPESCU-STĂNEŞTI.

R. Se demonstrează uşor că $\overline{O_b O_c} = 4R\cos\frac{1}{2}A$ şi $\overline{O'O_a} = 4R\sin\frac{1}{2}A$. Inlocuind avem :

$$S = rr_a \frac{4R\cos\frac{1}{2}A}{4R\sin\frac{1}{2}A} = rr_a \operatorname{cotg}\frac{1}{2}A.$$

Se ştie că

$$r_a = p\operatorname{tg}\frac{1}{2}A = \frac{p}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A}.$$

De unde

$$p = r_a \operatorname{cotg}\frac{1}{2}A.$$

Inlocuind obţinem:

$$S = rr_a \operatorname{cotg}\frac{1}{2}A = rp$$

Q. E. D.

## PROBLEME PROPUSE

4114[1]). Soient un triangle ABC inscrit dans un cercle O, de rayon R et circonscrit à un cercle (I), de rayon $r$, ($\Omega$) le cercle qui passe aux milieux des segments AI, BI, CI.

1. Les cercles ($\Omega$) et (I) se coupent sous un angle $x$ tel que :

$$\cos x = \cos A + \cos B + \cos C - \tfrac{1}{2}.$$

2. Le pied de leur axe radical partage le segment OI dans les rapport $(R + r) : (R - r)$.

V. THÉBAULT.

4121. O bancă primeşte depuneri în numerariu, acordă împrumuturi şi scontează polițe (cambii) în următoarele condiţiuni :

*a)* Dobânda pentru depuneri este de 5% şi pentru împrumuturi 15%. Scontul e cel comercial cu 15%.

*b)* Pentru depuneri dobânda curge dela a 10-a zi dela depunerea sumelor până inclusiv în ziua precedentă retragerii sumelor sau a lichidării contului, iar pentru împrumuturi toate zilele, inclusiv cea de facerea împrumutului şi cea de achitarea lui. Pentru sconturi se socotesc şi zilele de scontare şi de scadenţă.

*c)* Dobânzile se calculează pe numărul exact de zile ale anului 1931, adică 365 zile şi cu numărul exact de zile ale fiecărei luni.

*d)* Dobânzile datorite de bancă, sau datorite ei, nu modifică conturile decât la finele anului sau la lichidarea de cont. Sconturile se scad pe ziua depunerii polițelor.

In aceste condiţiuni, o persoană a făcut următoarele operaţiuni cu acea Bancă :

*a)* La 2 Ianuarie a depus 73.000 lei.

*b)* La 20 Ianuarie a depus 29.200 lei.

*c)* La 11 Fevruarie ia dela bancă 219.000 lei.

*d)* La 20 Martie a depus la Bancă pentru încasare o poliţă de 146.000 lei cu scadenţa 31 Mai.

*e)* La 6 Aprilie depune 14.600 lei.

Se cere rezultatul lichidării contului, care a avut loc în ziua de 1 Iunie 1931.

I. IONESCU.

1) Problema 4114 (279, XXXVII), fiind identică cu problema 4104 (239, XXXVII), se înlocueşte cu prezenta.

*4122. La primul congres al Matematicienilor români, ţinut la Cluj în luna Martie 1929, au fost înscrişi N membri şi în realitate au participat M congresişti. Ştiind că atât M cât şi N, nu diferă prea mult de 150, iar numerile:

$$(M + N)^{20m+3} \quad \text{şi} \quad (M - N)^{20n+3}$$

se termină respectiv cu 64 şi 28, ori cari ar fi $m$ şi $n$ întregi; se cere să se calculeze atât numărul celor înscrişi, cât şi acela al membrilor prezenţi.

I. V. Matieş.

*4123. Suma a trei numere de acelaş număr de cifre, formate din cifrele primelor şase patrate perfecte, este un patrat perfect a cărui rădăcină e cuprinsă între ultimele două patrate din cele şase.

Cari sunt soluţiunile problemei?

Sublocot. I. C. Savin.

4124. Tangenta la un cerc O în punctul M, mobil pe cerc, întâlneşte un diametru fix al cercului în E. Se cere să se găsească locul geometric al intersecţiei lui OM cu perpendiculara în E pe OE.

N. Donciu.

*4125. Fie O un punct fix pe o dreaptă şi M alt punct mobil pe dreaptă.

Se consideră cercul de diametru OM. Prin centrul cercului se duce o dreaptă, care taie cercul în N,N'.

Se cere locul punctelor N, N' când M parcurge dreapta. Unghiul dreptei NN' faţă de dreapta dată rămâne constant.

D. Arg. Dumitrescu.

4126. Se consideră un triunghiu ABC la care se duce mediana AD şi fie E şi F respectiv mijloacele laturilor AB şi AC. Din E se duce perpendiculara pe mediana AD şi din F perpendiculara pe latura AC.

Să se găsiască şi să se construiască locul geometric al intersecţiunei perpendicularelor de mai sus, când latura BC este fixă şi unghiul A constant.

Care este locul geometric când unghiul A este drept?

Inginer Octavian Orănescu.

4127. Se dă o dreaptă $\Delta$ şi de o parte şi de alta a ei, două puncte A şi B. Fie $A_1$ şi $B_1$ proecţiunile octogonale ale punctelor A şi B pe dreapta $\Delta$. Prin A şi între punctele $A_1$ şi $B_1$, se duce o dreaptă D care taie pe $\Delta$ în C. Fie E proecţiunea punctului B pe dreapta D şi F proecţiunea punctului E pe $\Delta$. Să se găsească expresiunea care ne dă valoarea segmentului $A_1C = x$ în cazul când avem $A_1C = B_1F$.

M. NICOLAU.

*4128. *a, b, c* şi *x. y, z* fiind două grupe de numere întregi ce satisfac relaţiile:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad ; \quad x^2 + y^2 = z^2$$

(numere pitagoreice), se cere să se examineze în ce caz putem avea între ele una din relaţiile:

$$(1) \quad ax + by = cz \quad ; \quad (2) \quad ay + bx = cz \quad ;$$

$$(3) \quad az + bx = cy.$$

N. C.

4129. A, B şi C fiind unghiurile unui triunghiu, să se demonstreze relaţia

$$\frac{\sin 2(A+B) + \sin 2(B+C) + \sin 2(C+A)}{\sin(A+B) + \sin(B+C) + \sin(C+A)} = -8 \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C.$$

CORNELIU N. POPESCU.

4130. Să se găsească

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}.$$

D. V. IONESCU.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

---

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Acikgheozian N.* (3908, 4054); *Aldea N. N.* (4054, 65, 77, 91, 100); *Bădescu Em. A.* (4054, 65, 69, 87, 98, 100); *Chiriac I. Trifon* (4108, 15); *Fabius Dorina* (4115); *Gheorghiu Adrian* (4054); *Iacobescu P. I.* (4117); *Ionescu-Biss P. H.* (4054, 65, 78, 87, 91, 100, 09, C); *Ionescu D. C.* (4089); *Iordănescu D. M.* (4101); *Leber Margareta* (4109, 15); *Margulius M.* (4091, 99, 108); *Mereuţă Em.* (4054); *Mihăileanu N. N.* (4104, 15, A, P, R); *Olteanu E. Şt.* (4023, 54, 77, 109, 17, P); *Panaite N. Th. Subloc.* (3514, 4088, 115); *Pănoiu Em.* (4083, 108, 09); *Patraulea N.* (3908); *Popescu-Stăneşti I. M.* (4087, 88, 89, 97, P); *Popescu N.* (4054); *Roşca Gh.* (4109); *Sachelarescu A.* (3908); *Savin C. I. Subloc.* (4082, 100); *Şova-Grigoreni C. I.* (4029, 78, 83, 108, 09); *Stan I. C.* (4097); *Ştefănescu Cr.* (3943, 4054); *Stoica D. Al.* (4065); *Ţerna Maria* (4109, 15); *Theoharide G. L.* (4083, 97); *Varlam P.* (4037, 41, 54); *Velicescu N.* (4023, 54); *Vissarion C. I. V.* (3908, 4029, 97); *Zane D. N.* (4037, 54, 117).

---

*Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

---

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

---

# Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

**La aceste prețuri se vor adăogă taxele poștale pentru expediție.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București 4.**

Biblioteca „ASTRA"
— SIBIU —

# GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVII

NUMĂRUL 9. — MAI 1932

## SUMARUL

1. Systèmes de points concycliques . . . . *V. Thébault*
2. Généralisation de la formule du rayon de courbure en coordonnées polaires . . *R. Goormaghtigh*
3. *Reducerea preliminară a necunoscutelor la stabilirea ecuaţiilor . . . . . *I. Ionescu*
4. Note matematice: 32 — 33.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 217.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 3893, 3979, 4048, 4054, 4069, 4081, 4082, 4087.
9. Exerciţii: 31 — 35.
10. Probleme propuse: 4131 — 4140.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1932

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVII se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orăşanu**, Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53. 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 84, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 72, 76, 83, 87, 4010, 13, 24, 30, 34, 44, 45, 53, 57, 59, 62, 68, 70, 71, 73, 79, 80, 85, 94, 102, 03, 06, 11, 12, 13, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

Avem plăcerea a anunţa că dela 20 Aprilie 1932 mai fac parte din Societatea noastră D-nii: Ing. G. Ionescu Zane, Ing. Zaharia Constantinescu, Ing. Dan G. Vasiliu, Ing. Bucur I. Măracine, Gh. Th. Gheorghiu, Licenţiat în Matematici şi Nicolae Botea, Licenţiat în Matematici.

# SYSTÈMES DE POINTS CONCYCLIQUES

1. On doit à M. Ad. Mineur cette propriété générale :

*Pour que six points, distribués par couples* X *et* X', Y *et* Y', Z *et* Z', *sur les côtés* BC, CA, AB, *d'un triangle* ABC, *soient concycliques, il faut et il suffit que l'on ait*

$$AY \cdot AY' = AZ \cdot AZ' \; ; \; BZ \cdot BZ' = BX \cdot BX' \; ; \; CX \cdot CX' = CY \cdot CY'.$$

*Si ces conditions sont remplies, le centre de la circonférence obtenue est le point de concours des médiatrices des segments rectilignes* XX', YY', ZZ' [1]).

Nous avons étendu ce théorème au tétraèdre, donnant la condition similaire pour que *douze* points distribués sur les arêtes soient situés sur une même sphère [2]).

2. La proposition qui précède peut aussi être appliquée à un polygone plan convexe quelconque.

Soient un polygone $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ et des couples de points $X_1$ et $X'_1$, $X_2$ et $X'_2$, $X_3$ et $X'_3$, $\ldots X_n$ et $X'_n$, situés sur les côtés $A_1A_2$, $A_2A_3$, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, de façon que l'on ait

$$A_1X_1 \cdot A_1X'_1 = AX_n \cdot AX'_n \; ; \; A_2X_1 \cdot A_2X'_1 =$$

$$A_2X_2 \cdot A_2X'_2 \; ; \; A_3X_2 \cdot A_3X'_2 = A_3X_3 \cdot A_3X'_3, \ldots$$

Les six points $X_1$, $X'_1$, $X_2$, $X'_2$, $X_3$, $X'_3$, correspondant au triangle $(A_1A_2, A_1A_3, A_3A_2)$, par exemple, peuvent être répartis en trois groupes

$$(X_1, X'_1, X_2, X'_2), \; (X_1, X'_1, X_3, X'_3), \; (X_2, X'_2, X_3, X'_3). \qquad (1)$$

Ces points sont situés sur trois circonférences $(C_1)$, $(C_2)$, $(C_3)$, qui, d'après le théorème de M. Mineur, se confondent.

De même les circonférences $(C_3)$, $(C_4)$, $(C_5)$, relatives aux groupes de points

$$(X_2, X'_2, X_3, X'_3), \; (X_2, X'_2, X_4, X'_4), \; (X_3, X'_3, X_4, X'_4), \qquad (2)$$

coïncident.

---

1) *Mathesis*, 1906 p. 66 et 1927 p. 417.

2) *Mathesis*, 1928 p. 32.

Comme les ensembles (1) et (2) ont une circonférence commune ($C_3$), elles sont toutes confondues, et, ainsi de suite, de proche en proche.

D'où ce théorème :

*Pour que 2n points distribués par couples* $X_1$ *et* $X'_1$, $X_2$ *et* $X'_2, \ldots, X_n$ *et* $X'_n$, *sur les côtés* $A_1A_2$, $A_2A_3, \ldots A_{n-1}A_n$, *d'un polygone* $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, *soient concycliques, il faut et il suffit pue l'on ait*

$$AX_1 . AX'_1 = AX_n . AX'_n ; A_2X_1 . A_2X'_1 = A_2X_2 . A_2X'_2, \ldots$$

*Ces conditions remplies, le centre de la circonférence est le point de concours des médiatrices des segments rectilignes* $X_1X'_1$, $X_2X'_2, \ldots, X_n X'_n$.

3. M. Mineur avait appliqué son théorème au cercle des neuf points d'un triangle ABC [1]).

Voici des résultats plus généraux.

Soient un triangle ABC, (BC = $a$, CA = $b$, AB = $c$) ; AA', BB', CC', les hauteurs; H l'orthocentre; des points quelconques donnés, X, Y, Z, sur BC, CA, AB.

Proposons-nous de déterminer les points X', Y', Z', placés sur les mêmes côtés, de façons que l'on ait

$$AY . AY' = AZ . AZ' ; BZ . BZ' = BX . BX' ; CX . CX' = CY . CY'. \quad (3)$$

Posons

$BX = l$, $CY = m$, $AZ = n$ ; $XC = p$, $YA = q$, $ZB = r$ ;

$BX' = x$, $CY' = y$, $AZ' = z$.

Les égalités (3) conduisent à cette équation

$$r(c - z) = lx \ ; \ p(a - x) = my \ ; \ q(b - y) = nz,$$

dont les racines s'expriment

$$x = \frac{r(mnc + pqa - mqb)}{lmn + pqr},$$

$$y = \frac{p(lna + qrb - nrc)}{lmn + pqr}, \quad (4)$$

$$z = \frac{q(lmb + prc - lpa)}{lmn + pqr}.$$

1) *Mathesis*, 1906. *loc. cit.*

On a aussi

$$a - x = \frac{m\,(lna + qrb - nrc)}{lmn + pqr},$$

$$b - y = \frac{n\,(lmb + prc - lpa)}{lmn + pqr},$$

$$c - z = \frac{l\,(mnc + pqa - mqb)}{lmn + pqr},$$

d'où $xyz : (a - x)\,(b - y)\,(c - z) = pqr : lmn.$

*Trois points* X, Y, Z, *étant donnés sur les côtés* BC, CA, AB. *d'un triangle,* (BX $= l$, CY $= m$, AZ $= n$, . . .), *si l'on marque sur les mêmes côtés trois autres points* X′, Y′, Z′, (BX′ $= x$, CY′ $= y$, AZ′ $= z$), *de manière que les relations* (4) *soient vérifiées, ces six points sont concycliques. Le centre* ω *de la circonférence ainsi déterminée est à l'intersection des médiatrices des segments* XX′, YY′, ZZ′.

Lorsque

$$l = p = \frac{a}{2}\ ,\quad m = q = \frac{b}{2}\ ,\quad n = r = \frac{c}{2},$$

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a} = \mathrm{BA'};\ y = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} = \mathrm{CB'};\ z = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = \mathrm{AC'}.$$

On retrouve ainsi le cercle des neuf points du triangle ABC,

Si $l = p - b\ ,\ m = p - c\ ,\ n = p - a, \ldots$

$x = p - b\ ,\ y = p - c\ ,\ z = p - a.$

(ω) est le cercle inscrit au triangle ABC.

Lorsque les droites AX, BY, CZ, sont concourantes,

$$pqr : lmn = -1 = xyz : (a - x)\,(b - y)\,(c - z),$$

et AX′, BY′, CZ′, sont aussi concourantes, ce qui justifie un théorème de Carnot.

4. Le cercle (ω) coupe les droites AX′, BY′, CZ′, en des points α, β, γ, tels que, par exemple,

$$\mathrm{A}\alpha \,.\, \mathrm{AX'} = \mathrm{AY} \,.\, \mathrm{AY'} = q\,(b - y) = nz.$$

$$\mathrm{A}\alpha = nz : \mathrm{AX'}\ ,\ \mathrm{B}\beta = lx : \mathrm{B}y'\ ,\ \mathrm{C}\gamma = my : \mathrm{C}y'.$$

On finit de reconstituer le cercle des neuf points du triangle avec les points α, β, γ, qui, lorsque X′ ≡ A′ , Y′ ≡ B′ , Z′ ≡ C′, sont déterminés ainsi :

$$\mathrm{A}\alpha = \mathrm{R}\cos\mathrm{A} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{AH}\ ;\ \mathrm{B}\beta = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{BH}\ ;\ \mathrm{C}\gamma = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{CH}.$$

V. Thébault
(Le Mans-France).

# GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DU RAYON DE COURBURE EN COORDONNÉES POLAIRES

Le rayon de courbure d'une courbe plane représentée en coordonnées polaires par l'équation $r = f(\varphi)$ a pour expression

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''},$$

$r'$ et $r''$ désignant les deux premières dérivées du rayon vecteur $r$ par rapport à l'angle polaire $\varphi$.

Dans ce qui suit nous établirons l'expression plus générale du rayon de courbure R du lieu (P) d'un point P obtenu en portant sur la tangente en un point mobile M d'une courbe quelconque (M) un segment $r$, fonction donnée de l'angle de contingence $\varphi$ de (M) en M.

Appelons $s$, $\rho$, $\rho_1$ l'arc et les deux premiers rayons de courbure de la courbe (M) en M; soient encore $\mu$, $\mu_1$ les deux premiers centres de courbure de (M) en M, et $\pi$ le centre de courbure de la courbe (P) en P.

Si P′ est l'intersection de $M\mu$ avec la normale à (P) en P, le segment $\mu P'$ est égale à la dérivée $r'$ de $r$ par rapport à $\varphi$ [1]).

Soit encore P″ le point obtenu en portant sur $\mu\mu_1$, à partir de $\mu_1$, un segment égal à la dérivée seconde $r''$ de $r$ par rapport à $\varphi$. Appelons en outre Q l'intersection de P′P″ avec la perpendiculaire élevée en $\pi$ sur $P\pi$.

Si l'on observe que la normale en P′ au lieu de ce point est la droite P′P″, on a, en considérant la déformation du triangle MPP′ [2]),

$$\frac{d(M)}{d(P)} = \frac{M\mu}{PP'}, \quad \frac{d(P)}{d(P')} = \frac{P\pi}{P'Q}, \quad \frac{d(P')}{d(M)} = \frac{P'P''}{M\mu}.$$

1) D'après un théorème de MANNHEIM *(Principes et développements de Géométrie cinématique,* p. 44), la dérivée d'un segment par rapport à l'angle de contingence de son enveloppe est égale au segment que les normales aux extrémités de ce segment déterminent sur la normale à cette enveloppe.

2) Le rapport des éléments d'arcs décrits par les extrémités d'un segment variable est égal à celui des segments des normales aux lieux de ces extrémités compris entre ces points et les intersections de ces normales avec la normale à l'enveloppe de ce segment (MANNHEIM, *ibid.*, p. 48).

Si donc S est la projection de P″ sur Pπ, on a

$$\frac{P\pi}{PP'} = \frac{P'Q}{P'P''} = \frac{P'\pi}{P'S}.$$

On en déduit successivement, R désignant le rayon de courbure de (P) en P,

$$\frac{R}{PP'} = \frac{P'P + R}{P'S}, \quad R = \frac{PP'^2}{PP' + SP'}.$$

Tenant compte de ce que

$$\overline{PP'}^2 = r^2 + (r' + \rho)^2,$$

$$SP' = \frac{-r(r'' + \rho_1) + r'(r' + \rho)}{\sqrt{r^2 + (r' + \rho)^2}},$$

on obtient finalement la formule

$$(2) \qquad R = \frac{[r^2 + (r' + \rho)^2]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + (r' + \rho)(2r' + \rho) - r(r'' + \rho_1)}.$$

**Applications. 1.** Lorsque la courbe (P) se réduit à un point, l'on retrouve la formule (1).

**2.** Soit $P_0$ le point obtenu en portant sur la tangente à (M) en M vers l'origine des arcs $s$ un segment égal à $s$ et supposons que P divise $P_0M$ dans un rapport constant, de sorte que l'on a $r = -ks$; la formule (2) devient alors

$$R = \frac{[k^2s^2 + (1-k)^2\rho^2]^{\frac{3}{2}}}{k^2s^2 + (1-k)(1-2k)\rho^2 + k(1-k)\rho_1 s}.$$

Si l'on considère la courbe $(P_0)$, lieu de $P_0$, comme courbe fondamentale, que l'on pose

$$\frac{k}{1-k} = \lambda$$

et que l'on désigne par $\rho'$, $\rho'_1$, $\rho'_2$ les rayons de courbure successifs de $(P_0)$, de sorte que $\rho' = s$, $\rho'_1 = \rho$, $\rho'_2 = \rho_1$, on retrouve la formule

$$\frac{(\lambda^2\rho'^2 + \rho_1^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\lambda)[\lambda^2\rho'^2 + (1-\lambda)\rho_1'^2 + \lambda\rho'\rho'_2]},$$

donnant le rayon de courbure de la *développée intermédiaire* d'indice $\lambda$ de la courbe $(P_0)$ [1]).

**3.** Lorsqu'on suppose que la courbe (M) est un cercle de rayon *a,* la courbe (P) est une *orthoconchoïde* de la courbe d'équation polaire $r = f(\varphi)$ et l'on obtient ainsi pour l'expression du rayon de courbure d'une telle courbe

$$R = \frac{[r^2 + (r' + a)^2]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + (r' + a)(2r' + a) - rr''}.$$

R. GOORMAGHTIGH
Bruges, Belgique.

## *REDUCEREA PRELIMINARĂ
## A NECUNOSCUTELOR LA STABILIREA ECUAȚIILOR

In *Gazeta Matematică,* Anul XXIX, pag. 242, am vorbit de un manuscris întitulat **„Elemente a calcului practic"** apărut acum vre-o 100 ani la Iași, și am arătat că acolo autorul alege cu dibăcie necunoscutele pentru a avea ecuații mai puține, mai simple și de grad mai mic. Iată trei exemple scoase de acolo :

1) *„A afla două numere a căror deosăbire să fie 7 și soma să fie 33".*

Această problemă se rezolvă de regulă însemnând cele două numere cu $x$ și $y$, scriind ecuațiile :

$$x + y = 33 \quad , \quad x - y = 7,$$

pe care rezolvându-le găsim $x = 20$, $y = 13$. Dacă însă însemnăm cu $x$ numărul cel mic, cel mare va fi $(x + 7)$ și scrim ecuația :

$$x + (x + 7) = 33,$$

de unde iese $x = 13$, numărul cel mic și deci $13 + 7 = 20$, cel mare. Problema s'a rezolvat cu o singură ecuație.

2) *„A afla două numere în proporție de 9 la 7, încât ca patratul somilor și cubul diferenții lor să fie de o potrivă".*

1) *Voir* L. BRANDE, *Les Coordonnées intrinsèques* (Scientia), p. 56.

Să însemnăm cu $7x$ şi $9x$ cele două numere. Avem ecuaţia unică :

$$(7x + 9x)^2 = (9x - 7x)^3,$$

$$\therefore \quad 256x^2 = 8x^3,$$

care ne dă $x = 32$, şi deci cele două numere sunt : $7x = 224$ şi $9x = 288$. Autorul nu dă soluţia $x = 0$.

3) *„A afla două numere a căror productul să fie de o potrivă patratului diferenţii lor"*.

Fie cele două numere ca $1/x$. Ecuaţia problemei este :

$$1 \,.\, x = (x - 1)^2,$$

care ne dă $x = (3 + \sqrt{5})/2 = 2{,}618 \ldots$

* * *

Acest mod de alegere şi reducere al necunoscutelor cere mai multă gândire, atenţiune şi chiar perspicacitate faţă de punerea directă în ecuaţie a problemelor. De aceia nu trebuie abandonat din algebră, căci pune pe elevi să se gândească mai mult, să inventeze mijloace simple, şi îi pregăteşte pentru creaţiuni în matematici, în ştiinţă şi în tecnică mai bine ca mijloacele mecanice de rezolvarea problemelor. Metoda constituie un mijloc de transiţie dela rezolvarea aritmetică a problemelor la rezolvarea lor algebrică. Iată aci încă trei probleme rezolvate pe această cale :

1) *La o petrecere sunt de două ori mai multe femei decât bărbaţi. După ce pleacă 5 bărbaţi cu soţiile lor, rămân de trei ori mai multe femei de cât bărbaţi. Câţi bărbaţi şi câte femei ereau la început ?*

Fie $x$ bărbaţi şi deci $2x$ femei. Ecuaţia problemei este :

$$2x - 5 = 3\,(x - 5),$$

care ne dă $x = 10$ bărbaţi şi deci $2x = 20$ femei.

2) *Elevii unei clase se aranjează la începutul anului în bănci. Dacă se aşează câte 5 în bancă, rămâne o bancă goală iar dacă se aşează câte 4, rămâne un copil fără loc. Câţi elevi ereau ?*

Fie $x$ numărul elevilor. In prima ipoteză sunt $(x/5) + 1$ bănci iar în a doua $(x - 1)/4$. De aci ecuaţia :

$$(x/5) + 1 = (x - 1)/4,$$

care ne dă $x = 25$ elevi.

3) *Un epure e urmărit de un ogar şi are 90 sărituri înaintea lui. Epurele face 5 sărituri în timpul în care ogarul face 4, dar 5 sărituri de ale acestuia fac cât 7 de ale epurelui. Câte sărituri va face ogarul până ce va ajunge epurele?*

Fie $5x$ sărituri făcute de epure şi $4x$ de ogar până ce se întâlnesc. Cele $4x$ sărituri de ogar fac cât $7 \times (4x/5)$ sărituri de epure. De aci ecuaţia:

$$7 \times (x/5) - 5x = 90,$$

din care scoatem $x = 150$. Deci ogarul va face $4 \times 150 = 600$ sărituri.

* * *

Asemenea alegeri de necunoscute, făcute cu multă dibăcie, se întâlnesc la matematicianii vechi. Chiar în *Aritmetica* lui DIOPHANTE, apărută în secolul III după Cristos, sunt exemple interesante de alegerea necunoscutelor. Iată aci trei exemple scoase din acea aritmetică.

1) *Să se găsească patru numere care să fie astfel încât sumele a câte trei din ele să fie patru numere date. Trebuie însă ca o treime din suma celor patru numere date să fie mai mare ca fiecare din ele.*

Această condiţie a pus-o DIOPHANTE pentru ca problema să fie posibilă, căci altfel ea are soluţii negative, care pe acea vreme nu-şi aveau rost, teoria cantităţilor negative venind mai în urmă dela Indieni. Se ia ca numere date 20, 22, 24, 27. De obiceiu problema se desleagă scriind 4 ecuaţii cu 4 necunoscute. DIOPHANTE ia ca necunoscută suma numerelor căutate, care atunci vor fi exprimate prin $(x - 20)$, $(x - 22)$, $(x - 24)$, $(x - 27)$. Ecuaţia problemei este dar:

$$x - 20 + x - 22 + x - 24 + x - 27 = x,$$

din care scoatem $x = 31$ şi deci cele patru numere căutate sunt $31 - 20 = 11$, $31 - 22 = 9$, $31 - 24 = 7$, $31 - 27 = 4$.

2) *Să se găsească trei numere aşa ca produsele lor câte două, micşorate cu un număr dat, să devină patrate.*

Fie 10 numărul dat. Luăm cele trei numere $u^2x$, $1/x$, $v^2x$. Produsele lor două câte două sunt: $u^2$, $v^2$ şi $u^2v^2x^2$. Trebuie să

facem patrate diferențele $(u^2 - 10)$, $(v^2 - 10)$, $(u^2v^2x^2 - 10)$. Să punem dar :

$$u^2 - 10 = m^2,\ v^2 - 10 = n^2,\ u^2v^2x^2 - 10 = (uvx - p)^2,$$

$$\therefore (u+m)(u-m) = a \times (10/a), (v+n)(v-n) = b \times (10/b), 2puvx = p^2 + 10,$$

$$\therefore u+m = a,\ u-m = 1/a\ ;\ v+n = b,\ v-n = 1/b\ ;\ x = (p^2+10)/2puv,$$

$$\therefore u = (a^2+10)/2a,\ v = (b^2+10)/2b,\ x = 2ab(p^2+10)/p(a^2+10)(b^2+10).$$

Numerele căutate sunt prin urmare :

$$u^2x = b(a^2+10)(p^2+10)/2ap(b^2+10),\ v^2x = a(b^2+10)(p^2+10)/2bp(a^2+10)$$

$$1/x = p(a^2 + 10)(b^2 + 10)/2ab(p^2 + 10).$$

Problema se poate rezolva în general luând orice număr N în locul lui 10. DIOPHANTE tratează problema în cazul particular $m = 9/2$, $n = 3/2$, $a = 10$, $b = 5$, $p = 1/2$, care dau pentru cele trei numere căutate 451/28, 77/41 și 287/44.

3) *Să se găsească un triunghiu dreptunghic care să aibă perimetrul un patrat și suma perimetrului cu aria lui să fie un cub.*

Fie un triunghiu cu ipotenusa $(x^2 + 1)$ și catetele $(x^2 - 1)$ și $2x$. El e dreptunghic căci verifică teorema lui PITAGORA :

$$(x^2 + 1)^2 = (x^2 - 1)^2 + (2x)^2.$$

Acest triunghiu are perimetrul $(2x^2 + 2x)$ și aria $\frac{1}{2} \cdot 2x(x^2 - 1) = x^3 - x$. Primul din aceste numere trebuind să fie patrat, să punem

$$2x^2 + 2x = u^2x^2,\quad \therefore\quad x = 2/(u^2 - 2).$$

Suma perimetrului și a ariei este :

$$2x^2+2x+x^3-x = x^3+2x^2+x = [2/(u^2-2)]^3+2[2/(u^2-2)]^2+2/(u^2-2)$$

$$\therefore\quad x^3 + 2x^2 + x = 2u^4/(u^2 - 2)^3 = 2u\,[u/(u^2 - 2)]^3.$$

Aceasta trebuind să fie un cub, trebuie ca $2u$ să fie cub, deci $2u = v^3$, deci $u = \frac{1}{2}v^3$, pe care înlocuind-o în expresiunea lui $x$, găsim :

$$x = 8/(v^6 - 8).$$

DIOPHANTE ia $v = 3/2$ şi găseşte $x = 512/217$. Cele trei laturi ale triunghiului căutat sunt dar :

$x^2 + 1 = 309233/47089$, $x^2 - 1 = 215055/47089$, $2x = 1024/217$.

Perspicacitatea în alegerea necunoscutelor a permis, cum se vede, ca acum 1600 ani DIOPHANTE să rezolve probleme grele care chiar cu mijloacele de azi ar reţine mult timp pe loc pe un cercetător în teoria numerelor.

I. IONESCU.

## NOTE MATEMATICE

32. In *Gazeta Matematică*, Anul XIII, pag. 327, la Nota 25, D-l E. ZIPCHES dă fracţiunile :

$$137315215071/43708989972 ;$$

$$2887109048051425031243/918995352485441335212 ;$$

care ar reprezenta pe $\pi$ cu 11 şi cu 21 de cifre exacte.

D-l J. HARTMANN a verificat aceste afirmaţiuni şi publică în *Boletin Matematico* din Martie 1932 că prima fracţie nu dă nici 6 cifre exacte iar a doua dă 18. Dacă la a doua cifrele 1243 dela finele numărătorului se înlocuiesc cu 3239 se obţin 22 cifre exacte pentru $\pi$.

I. I.

33. *Generalizarea problemei 3783.*

Imi propun să studiez următoarea problemă :

*Ce puteri ale unui număr întreg se termină cu acelaş grup de două cifre ?*

Problema se reduce la determinarea lui $m$ şi $n$, astfel ca $N^m$ şi $N^n$ să se termine cu acelaş grup $zu$, N, $m$ şi $n$ fiind numere întregi, iar $z$ şi $u$ cifre şi $zu$ grupul de zeci şi unităţi.

*Observări.*

1°. Numărul $m$ poate fi scris $m = n + p$. Deci trebuie să determinăm numerele $N^n$ şi $N^{n+p}$, astfel ca să se termine cu acelaş grup de două cifre.

2⁰. Dacă N şi $N^{p+1}$ se termină cu acelaş grup de două cifre, atunci şi numerele $N^n$ şi $N^{n+p}$ se termină cu acelaş grup de două cifre.

Fie:

$$N = 100\,A + zu \qquad N^{p+1} = 100\,B + zu.$$

Ridicând la puterea $n$, avem:

$$N^n = (100\,A + zu)^n = 100\,A' + (zu)^n$$
$$(N^{p+1})^n = (100\,B + zu)^n = 100\,B' + (zu)^n$$

c. c. t. d.

3⁰. Dacă numerele prime $N_1$ şi $N_2$ satisfac egalităţile:

$$N_1^n = 100\,A + ab \quad , \quad N_1^m = 100\,B + ab$$
$$N_2^n = 100\,A' + a'b' \quad , \quad N_2^m = 100\,B' + a'b'$$

atunci se vede că avem şi egalităţile:

$$N^n = (N_1 \cdot N_2)^n = (100\,A + ab) \cdot (100\,A' + a'b') = 100\,C + zu$$
$$N^m = (N_1 \cdot N_2)^m = (100\,B + ab) \cdot (100\,B' + a'b') = 100\,C' + zu$$

unde $a$, $b$, $a'$, $b'$, $z$ şi $u$ sunt cifre, iar $n$ şi $m$ numere întregi şi pozitive.

4⁰. Dacă numărul $zu$ de două cifre satisface egalităţilor:

$$(zu)^n = 100\,A + ab$$
$$(zu)^n = 100\,B + ab$$

atunci avem şi egalităţile:

$$N^n = (100\,p + zu)^n = 100\,A' + ab$$
$$N^m = (100\,p + zu)^m = 100\,B' + ab$$

unde $zu$, $ab$, sunt grupe de două cifre iar $N = 100\,p + zu$.

Intr'adevăr:

$$(100\,p + zu)^n = 100\,A'' + (zu)^n = 100\,(A' + A) + ab$$
$$\therefore \quad N^n = 100\,A' + ab$$

şi în mod analog şi pentru $N^m$.

5⁰. Dacă numerele $N^n$ şi $N^{p+n}$ se termină cu acelaş grup de

două cifre, atunci şi numărul $N^{kp+n}$ se termină cu acelaş grup de două cifre, $k$, $p$, $n$ fiind numere întregi oricari.

Intr'adevăr fie :

$$N^n = 100\,A + ab\ ,\ N^p = 100\,B + zu \text{ şi } N^{p+n} = 100\,C_1 + ab$$

şi deci trebue să avem :

$$(100\,A + ab)(100\,B + zu) = 100\,C_1 + ab$$

$$\therefore \quad (ab) \times (zu) = 100\,C' + ab.$$

Aşa că produsul lui $N^p$ cu $N^n$ se termină cu acelaş grup de două cifre ca şi $N^n$.

Avem deci în mod succesiv :

$$N^{2p+n} = (N^{p+n})\,N^p = (100\,C_1 + ab)(100\,B + zu) = 100\,C_2 + ab$$

$$N^{3p+n} = (N^{2p+n})\,N^p = (100\,C_2 + ab)(100\,B + zu) = 100\,C_3 + ab$$

. . . . . .

$$N^{kp+n} = [N^{(k-1)p+n}]\,N^p = (100\,C_{k-1} + ab)(100\,B + zu) = 100\,C_k + ab$$

c. c. t. d.

Ţinând seamă de aceste observaţiuni suntem conduşi a rezolva următoarea problemă :

*Care este cea mai mică putere întreagă, la care dacă ridicăm un număr prim oarecare mai mic decât 100, grupul de două cifre să-i rămână acelaş.*

Fie N un număr prim mai mic decât 100 şi $p + 1$ cea mai mică putere, astfel ca numerele N şi $N^{p+1}$ să se termine cu acelaş grup de două cifre. Deci trebue ca :

$$E = N^{p+1} - N,$$

să se dividă cu 100 sau să fie zero.

*a)* $N = 1$. Valoarea lui E este zero oricare ar fi $p$.

*b)* $N = 2$.

$$E = N(N^p - 1) = 2(2^p - 1).$$

Cum $2(2^p - 1) \neq$ Mult. 100, pentru nici o valoare a lui $p$, dar pentru :

$$E = N^{p+n} - N^n = N^n(N^{p+1} - 1) = 2^n(2^p - 1)$$

şi $n \geqslant 2$, găsim că pentru cea mai mică valoare a lui $p = 20$ avem :

$$2^n(2^{20} - 1) = 2^{n-2} \cdot 4 \times 1048575$$

$$= \text{Mult. } 100.$$

*c)* $N = 5$. In cazul:

$$E = N^{p+1} - N$$

aceeaşi concluzie ca la b).

Pentru $n \geqslant 2$, avem:

$$\begin{aligned} E = N^n (N^p - 1) &= 5^n (5^p - 1) = 5^{p+n} - 5^n \\ &= (\text{Mult. } 100 + 25) - (\text{Mult. } 100 + 25) \\ &= \text{Mult. } 100 + 25 - 25 \\ &= \text{Mult. } 100 \end{aligned}$$

pentru $p$ întreg oarecare.

*d)* $N = 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83$ şi $89$.

Pentru toate aceste numere se găseşte că:

$$N^{20} = \text{Mult. } 100 + 1$$

$$\therefore \quad E = N (N^p - 1) = N (\text{Mult. } 100 + 1 - 1) = \text{Mult. } 100.$$

In general, deci, cea mai mică valoare a lui $p$ este 20 pentru ca N şi $N^{p+1}$ să se termine cu acelaş grup de două cifre, N fiind un număr prim mai mic ca 100.

Ţinând seama de cele cinci observaţiuni, putem enunţa următorul rezultat:

*Numerele întregi* $N^n$ *şi* $N^m$ *se termină cu acelaş grup de două cifre în cazul când* $m = 20k + n$, k. n *şi* N *fiind numere întregi oricari.*

*Excepţii:*

1. Pentru $N = 1$, $n$ şi $m$ pot fi oricari.
2. Pentru N pereche, trebue ca $n \neq 1$.
3. Pentru N terminat cu 5, dar nedivizibil cu 25, trebue ca $n \neq 1$ şi $m$ poate fi oricare.

*Notă.* Problema de faţă este o generalizare a problemei 3783, propusă de D-l Col. Gh. Buicliu în *Gazeta Matematică* Vol. XXXIV, pag. 399 cu următorul enunţ:

*Să se demonstreze că numerele întregi* $N^n$ *şi* $N^{n+4}$ *se termină cu aceeaşi cifră.*

Soluţia problemei 3783 e dată în Vol. XXXVI, pag. 307.

Ioan V. Măties.

# BIBLIOGRAFIE

**Bulletin of the American Mathematical Society.** Vol. XXXVIII. No. 3. Martie 1932. New-York. Adunarea anuală din Noul Orleans, de T. FORT. Lucrările ştiinţifice ale lui C. L. E. MORE de D. J. STRUIK. Enciclopedia matematicilor elementare, de G. A. MILLER. LORIA despre istoria geometrii, de D. E. SMITH. BRUNET despre mişcarea neutoniană, de D. E. SMITH. COOLIDGE despre curbele algebrice, de V. SNYDER. Rezumatul comunicărilor.

**Anales de la Sociedad Cientifica Argentina.** Tomul CXIII. Fascic. II. Fevruarie 1932. Buenos Aires.

**Mathesis.** Anul XLVI. No. 2—3. Fevruarie—Martie 1932. Gembloux. Exerciţii de geometrie proiectivă, de L. GODEAUX. Asupra unei teoreme relative la ariile a două triunghiuri, de R. GOORMAGHTIGH. Asupra funcţiunilor lui RIEMANN asociate ecuaţiilor diferenţiale lineare, de R. H. J. GERMAY. Exerciţii de geometrie infinitesimală, de D-ra BERTHE UMÉ. Asupra exagonului lui PASCAL, de R. DEAUX. Reciprocitatea între două spaciuri superpuse cu trei dimensiuni, de AD. M. Demonstraţie specială a teoremei lui PASCAL relativă la conice, de R. DEAUX. Şiruri de polinoame asociate cu ecuaţia de care depinde împărţirea cercului în părţi egale, de E. HEUCHAMPS. Exerciţii de geometrie proiectivă, de AD. M.

**Boletin Matematico.** Anul IV. No. 12. Fevruarie 1932. Buenos Aires. La încheierea celui de al patrulea an al Buletinului Matematic, de B. I. BAIDAFF, Viitorul Buletinului matematic, de B. I. BAIDAFF. Asupra rectificării aproximative a cercului, de J. HARTMANN. Un strigăt de alarmă, de B. I. BAIDAFF.

**Boletin matematico elemental.** Anul II. No. 12. Fevruarie 1932. Buenos Aires. Anul al doilea.

**Boletin matematico.** Anul V. Martie 1932. No. 1. Buenos Aires. Către matematici argentinezi; către cultivatorii ştiinţelor exacte din ţară; tuturor celora care persevereză în studiu şi văd în ştiinţe cel mai tipic element de progres al popoarelor, de B. I. BAIDAFF. Actualitatea: Programele, de B. I. BAIDAFF. Numerile mari, de J. HARTMANN.

**Idem.** No. 13. Aprilie 1932. Paris.

**Journal de mathématiques élémentaires** publié par H. VUIBERT. Anul 56. No. 12. Martie 1932. Paris.

**Revista matematică din Timişoara.** Anul XII. No. 1. Martie 1932, Timişoara. Proprietăţi în legătură cu anticentrul patrulaterelor inscriptibile. de S-LT. I. GH. ZAMFIRESCU.

**Revista matematică din Timişoara.** Anul XII. No. 2. Aprilie 1932. Timişoara. Câteva proprietăţi în legătură cu cercurile tritangente, de N. N. MIHĂILEANU.

**Vlăstarul.** *Revista Liceului Spiru Haret.* No. 5, 6 şi 7 din 1932. Anul VIII. Are şi câteva pagini cu chestiuni de matematică.

GASTON JULIA. *Principes géométrique d'analyse.* Paris 1932. Gauthier-Villars et Cie. Preţul 40 franci.

V. THÉBAULT. *Contribution à la géométrie du triangle.* (Supliment la *Mathesis*).

ION IONESCU. *Istoricul Invăţământului, Inginerii în România.* (Extras din volumul jubilar al Şcoalei Polytechnice «*Regele Carol II*»). Bucureşti 1932.

R. NOGUÈS. *Théorème de Fermat. Son histoire.* Librairie Vuibert. 25 franci. Paris 1932.

In un volum de 188 pagini, autorul îşi propune să arate, în ordinea cronologică, ce s'a făcut până în 1931 în această chestiune şi unde a ajuns până azi. Acest istoric constituie prima parte a cărţii, iar în a doua se dă demonstraţiuni ale unor cazuri particulare şi unele rezultate obţinute în chestiunea celebrei teoreme a lui FERMAT. Cartea începe cu o *Introducere* în care se arată în ce constă această teoremă. Autorul dă enunţul teoremei în limba latină aşa cum l'a formulat FERMAT:

«*Cubum in duos cubos aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos et generaliter nullam in infinitum, ultra quadratum, potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere.*

*Cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi; hanc marginis exiguitas non caperet*».

Sub forma algebrică, chestiunea revine la a spune că ecuaţia

$$x^n + y^n = z^n$$

nu se poate rezolva în numere întregi pentru $x$, $y$, $z$, $n$ dacă $n > 2$.

După o mică biografie a lui FERMAT, în care se arată viaţa, operile şi metodele lui, se arată părerile exprimate asupra exactităţii acestei teoreme şi asupra afirmaţiunii, făcute de diferiţi matematiciani asupra exactităţii lui FERMAT şi că el ar fi posedat o demonstraţiune perfectă. GAUSS admite că FERMAT s'a înşelat în acea demonstraţie. CAHEN spune apoi în 1924: „*Dar e mai probabil că această demonstraţie nu era valabilă, pentrucă el însuşi nu a crezut nimerit, să o facă cunoscut şi din cauză că nici o demonstraţiune nu a putut fi găsită cu toate eforturile celor mai mari matematiciani şi a progreselor considerabile în teoria numerelor dela* FERMAT *încoace*". De asemenea L. J. MORDELL în 1929 spune: „*După câte ştim asupra caracterului lui* FERMAT, *e sigur că el a avut impresiunea de a fi în posesiunea unei demonstraţiuni meritând să fie semnalată. Nu este însă mai puţin adevărat ca el să se fi înşelat asupra valorii acelei demonstraţiuni, căci cei mai mari matematiciani au făcut erori de acest gen*".

Sunt însă unii care nu admit ca FERMAT să se fi înşelat.

Autorul împarte istoricul chestiunii în perioade şi anume dela FERMAT la LEGENDRE; dela LEGENDRE la LAMÉ; dela LAMÉ la KUMMER; dela KUMMER la MIRIMANOFF şi dela MIRIMANOFF la 1931.

In prima perioadă avem demonstraţia lui FERMAT pentru $n = 4$ a lui EULER pentru $n = 3$, LEGENDRE pentru $n = 5$ şi câteva teoreme date de ABEL, DIRICHLET, etc.

In a doua perioadă DIRICHLET dă cazul $n = 14$, LAMÉ cazul $n = 7$, unele teoreme de KUMMER, LEBESGUE, LIOUVILLE, etc.

In a treia perioadă KUMMER ajunge la *numerele ideale;* LAMÉ şi CAUCHY aplică problemei *numerele complexe;* KRONECKER ajunge la unele rezultate iar Academia de ştiinţe din Paris pune de două ori la concurs chestiunea demonstraţiunii teoremei lui FERMAT fără a se obţine nici un rezultat. Acelaş lucru şi la Academia din Bruxelles.

In a patra perioadă se menţionează lucrări ale lui LANDRY, GENOCCHI, LIOUVILLE, KORKINE, PEPIN, JONQUIÈRES, CATALAN, MANSION, MATHEWS, MIRIMANOFF, SMITH, KORNECK, MAILLET, GAMBIOLI, HURVITZ, DICKSON. In 1908 PAUL WOLFSKEHL înfiinţează premiul: *„Ein hundert tausend Mark"*. Die *„Königliche Gesellschaft der Wissenschaften"* din Götingen a stabilit condiţiile de premiare, între altele de a nu primi decât lucrări publicate în reviste sau broşuri aparte. Mirajul acestui premiu a creiat *fermatiştii,* care se ocupă cu această teoremă cum se ocupau în secolele trecute *cuadratorii* cu cuadratura cercului. De atunci s'a scris pentru teorema lui FERMAT mai mult decât se scrisese din timpul lui FERMAT, până în 1908. Premiul nu s'a putut da, iar astăzi se pare că este evaporat odată cu valoarea mărcii germane antibelice. Lucrări neserioase s'au tipărit şi se tipăresc necontenit; autorul menţionează lucrările lui WIEFERICH, FLECK, care spune: *«Zelul de a obţine în acest domeniu progrese a crescut în un mod gigantic după ce* WOLFSKEHL *fondă premiul său Valurile de lucrări care veniră să vază lumina în un timp foarte scurt întrecură cu mult prin masa lor, cantitatea de lucrări precedente, fără a se putea măsura cât de departe cu una din acelea».* Autorul mai citează lucrările lui MIRIMANOFF, FROBENIUS, etc.

In perioada cincea sunt menţionate lucrările lui GOUY, FABRY, VANDIVER, JOFFROY, CAHEN, POMEY, MORDELL, MASOUTIÉ, etc.

In a doua parte sunt date demonstraţiuni ale unor rezultate, enunţuri de teoreme, împărţite pe aceleaşi perioade, extensiuni ale teoremei lui FERMAT, demonstraţiuni falşe, cele mai multe rezultând din confundarea aritmeticii cu algebra. Astfel un fermatist afirmă că $(z^2 + zx + x^2)$ nefiind divizibil prin factori lineari reali nu poate avea nici un factor comun cu $(z - x)$, pe când aritmetica pentru $z = 10$, $x = 1$, dă acestor expresiuni pe 111 şi 9 care au divizorul comun 3. Autorul mai citează şi alte erori,

Cartea se termină cu o bibliografie de trei pagini.

Acest volum este foarte util celor ce voiesc să se pună în curent cu stadiul teoremei lui FERMAT, care de 250 ani frământă mintea matematicianilor, iar de 25 de ani încoace şi pe a grafomaţilor.

I. IONESCU.

## CERERI

217. Aşi dori ca un cititor al *Gazetei Matematice* să-mi dea indicaţiuni bibliografice asupra tabelelor numerice găsite în săpăturile făcute în vechia Chaldeia, scrise cu semne cuneiforme.

H. P. Ionescu.

## DIVERSE

Societatea de Ştiinţe, secţiunea matematică, a ţinut şedinţă în seara zilei de 4 Aprilie când au făcut comunicări D-l N. Ciorănescu despre câteva ecuaţii funcţionale şi D-l N. Teodorescu despre Problema lui Cauchy pentru ecuaţiile lui Dirac.

La şedinţa din 18 Aprilie, au făcut comunicări D-l D. Barbilian despre proprietăţi generale ale curbelor raţionale normale şi D-l N. Georgescu-Roegen asupra coeficienţilor pearsoniani.

## PROBLEME REZOLVATE

*PROBLEMA 3893. *Pentru* $n \leqslant 9$ *să se calculeze sumele:*

$$1, 1 + 12, 21 + 123, 321 + \ldots + 123 \ldots n, n \ldots 321.$$

$$1, 1 + 21, 12 + 321, 123 + \ldots + n \ldots 321, 123 \ldots n.$$

P. I. Ghişoiu.

*Soluţie şi generalizare* dată de D-l Haralamb P. Ionescu-Biss.

Să considerăm suma generală:

$$S_i = a_1 q^{i-1} + a_2 q^{i-2} k + \ldots + a_{i-1} q k^{i-2} + a_i k^{i-1}$$

și să dăm factor comun pe $k^{i-1}$. Ea devine:

$$S_i = k^{i-1}\left(a_1 \frac{q^{i-1}}{k^{i-1}} + a_2 \frac{q^{i-2}}{k^{i-2}} + \ldots + a_i\right).$$

Ținând acum seama de expresiunea ce vroim să dăm coeficientului $a_i$,

$$a_i = a_1 + (i-1)\,\gamma$$

suma $S_i$ va lua forma:

$$S_i = k^{i-1}\left[a_1\left(1 + \frac{q}{k} + \ldots + \frac{q^{i-1}}{k^{i-1}}\right) + \gamma\left((i-1) + (i-2)\frac{q}{k} + \ldots + \frac{q^{i-1}}{k^{i-1}}\right)\right].$$

Efectuând sumele din paranteze avem:

$$S_i = k^{i-1}\left[a_1 \frac{\frac{q^i}{k^i} - 1}{\frac{q}{k} - 1} + \frac{\gamma}{\frac{q}{k} - 1}\left(\frac{\frac{q^i}{k^i} - \frac{q}{k}}{\frac{q}{k} - 1} - (i-1)\right)\right]$$

sau:

$$(1)\quad S_i = \frac{k^i}{q-k}\left[\frac{a_1}{k^i}(q^i - k^i) + \gamma\left(\frac{q}{k^{i-1}} \cdot \frac{q^{i-1} - k^{i-1}}{q-k} - (i-1)\right)\right].$$

Punând acum:

$$(2)\qquad \sum_S = \sum_{i=1}^{i} S_i$$

iar în (1) făcând:

$$(3)\qquad S_i = \sum_i^{(1)} + \sum_i^{(2)} + \sum_i^{(3)}$$

avem:

$$\sum_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{i} a_1 \frac{q^i - k^i}{q-k} = \frac{a_1}{q-k}\left[q \cdot \frac{q^i - 1}{q-1} - k\frac{k^i - 1}{k-1}\right]$$

$$\sum_i^{(2)} = \sum_{i=1}^{i} \frac{\gamma q k}{(q-k)^2}(q^{i-1} - k^{i-1}) = \frac{\gamma k q}{(q-k)^2}\left[\frac{q^i - 1}{q-1} - \frac{k^i - 1}{k-1}\right]$$

$$\sum_i^{(3)} = -\sum_{i=1}^{i}(i-1)\frac{\gamma k^i}{q-k} = \frac{-\gamma k^2}{q-k}\left[(i-1)\,k^{i-1} - \frac{k^{i-1} - 1}{k-1}\right]\frac{1}{k-1}.$$

Ţinând acum seamă de (2) şi (3) obţinem:

$$(4)\qquad \sum s = \frac{1}{q-k}\left\{a_1\left[q\frac{q^i-1}{q-1}-k\frac{k^i-1}{k-1}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma qk}{q-k}\left[\frac{q^i-1}{q-1}-\frac{k^i-1}{k-1}\right]-\gamma\left[\frac{(i-1)k^{i+1}}{k-1}-\frac{k^{i+1}-k^2}{(k-1)^2}\right]\right\}.$$

In această din urmă formulă vom aplica de **p** ori regula lui Hôpital atunci când facem:

$$k=1 \quad \text{sau} \quad q=1$$

şi când numitorul fracţiei este de forma:

$$(k-1)^p \quad \text{sau} \quad (q-1)^p.$$

Introducem în (4) valorile:

$$q=10 \;;\; k=1 \;;\; a_1=1 \;;\; \gamma=1$$

şi obţinem:

$$S_1=1+12+123+\ldots+123\ldots n=\frac{10^2}{9^3}(10^n-1)-\frac{10}{9^2}n-\frac{n(n+1)}{18}$$

Inmulţim acum pe (4) cu $q$, introducem apoi aceleaşi valori cu deosebirea că vom face:

$$q=\frac{1}{10}$$

şi obţinem:

$$S_2=\frac{1}{10}+\frac{21}{100}+\frac{321}{1000}+\ldots+\frac{n\ldots321}{10^n}=\frac{1}{9^3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)-\frac{n}{9^2}+\frac{n(n+1)}{18}$$

dar avem:

$$S_1+S_2=1{,}1+12{,}21+\ldots=S_1=\frac{1}{9^3}\left[10^2(10^n-1)+\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right]-\frac{11}{9^2}n$$

adică tocmai suma primului şir din problema propusă.

Pentru găsirea sumei şirului al doilea vom considera valorile:

$$q = 1 \; ; \; k = 10 \; ; \; a_1 = 1 \; ; \; \gamma = 1$$

pe cari le vom înlocui în (4) şi găsim:

$$S_3 = 1 + 21 + 321 + \ldots = \frac{1}{9^3}\left[(9n - 2)\,10^{n+1} + 9n + 20\right].$$

Inmulţim de data aceasta pe (4) cu $k$, vom introduce aceleaşi valori, făcând şi aci:

$$k = \frac{1}{10}\,.$$

Rezultatul înlocuirii este:

$$S_4 = \frac{1}{10} + \frac{12}{10^2} + \frac{123}{10^3} + \ldots = \frac{1}{9^2}\left[10\,(n+1) + \frac{9n+20}{9 \cdot 10^n} - \frac{110}{9}\right]$$

dar avem:

$$S_3 + S_4 = 1{,}1 + 21{,}12 + \ldots = S_{II} = \frac{1}{9^3}\left[(9n - 2)\,10^{n+1} + 9n + 20\right]$$

$$+ \frac{1}{9^2}\left[10\,(n+1) + \frac{9n+20}{9 \cdot 10^n} - \frac{110}{9}\right]$$

adică tocmai suma celui de al doilea şir din problemă.

*Observaţiuni:*

1°. Primul şir din problema propusă se putea obţine urmând aceeaşi cale şi din articolul repauzatului Tr. A. Dordea din „R. M. y. F. E." — vol. V — 209.

2°. Făcând în $S_I$, $n = k$ iar în $S_{II}$, $n = k + 1$ vom obţine:

$$S = S_I + S_{II} = 1{,}1 + 22{,}22 + 333{,}333 + \ldots$$

adică tocmai soluţia problemei 3772, a cărei generalizare se obţine făcând pe rând în (4) $p = n$ şi adunând cele două sume obţinute.

3°. Dacă în (4) facem pe rând:

$$q = 1 \; ; \; k = 10 \; ; \; a_1 = \gamma_1 = 10 \; ; \; i = p + 1$$

$$q = 10 \; ; \; k = 1 \; ; \; a_1 = \gamma_1 = 10 \; ; \; i = p$$

şi adunăm sumele căpătate găsim tocmai problema 896 „R. M. T." — X — 24.

4°. Dacă în $S_1$ facem $n = k$ iar în $S_2$, $n = k + 1$, vom da peste problema No. 61 din „R. M. T." — II — 38.

5°. Suma $S_3$ este a primului şir din problema 3753.

6°. Dacă înmulţim pe (4) cu $k$ şi apoi derivăm în raport cu $k$, obţinem suma şirului al doilea din problema 3753 şi dacă repetăm operaţia indicată, obţinem şirul al treilea al aceleiaşi probleme.

— O soluţiune completă — dar negeneralizată şi lipsită de observaţiunile de mai sus — s'a primit dela D-l N. N. MIHĂILEANU (Constanţa), iar altele incomplete dela D-nii: SUBLT. C. D. IONESCU-ŢIU (geniu); N. ALDEA; E. G. MILEA şi M. D. MOTOC.

CPT. GH. N.

---

*PROBLEMA 3979. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin 7\theta + 5\sin 5\theta - 10\sin 3\theta + 16\sin\theta = 0.$$

N. CIORĂNESCU.

*Soluţie* dată de D-nii: AVRAM N. C. (Şc. Militară Geniu), CRIVĂŢ VLADIMIR, GHIŞOIU I. P., IONESCU HARALAMB-BISS, MIHĂILEANU N. N., RUSU D. CONST. şi ZARDA I. (Cluj).

Grupăm termenii ecuaţii astfel:

$$(1)\quad (\sin 7\theta + \sin\theta) + 5(\sin 5\theta + \sin\theta) - 10(\sin 3\theta - \sin\theta) = 0.$$

Transformăm parantezele cu ajutorul formulelor calculabile cu logaritmi:

$$(2)\quad \sin 4\theta \cos 3\theta + 5\sin 3\theta \cos 2\theta - 10\sin\theta \cos 2\theta = 0$$

sau:

$$(3)\quad \cos 2\theta\,[2\sin 2\theta \cos 3\theta + 5\sin 3\theta - 10\sin\theta] = 0.$$

Deci o primă soluţie:

$$(4)\qquad \cos 2\theta = 0\ ;\quad \theta_1 = k\pi \pm \frac{\pi}{4}\ .$$

Ecuația rămasă din (3) se transformă astfel:

$$(5) \quad \sin\theta\,[4\cos 3\theta\cos\theta + 5\,(4\cos^2\theta - 1) - 10] = 0$$

deci:

$$\sin\theta = 0 \quad ; \quad \theta_2 = k\pi.$$

Rămâne în fine din (5) ecuația în $\cos\theta$:

$$(6) \qquad 16\cos^4\theta + 8\cos^2\theta - 15 = 0$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

deci:

$$\theta_3 = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

celelalte valori:

$$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\,i \text{ fiind inacceptabile.}$$

Soluțiile ecuații sunt deci:

$$\theta = k\pi \quad ; \quad k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad ; \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6}\,.$$

Au dat soluții bune întrebuințând formula lui Moivre D-nii: Parapeanu I. Gh., Țiucra P. Mircea, Vasu V., Velea M. și Puta Tr.

Au calculat direct $\sin 7\theta$, $\sin 5\theta$ și au format ecuația D-nii: Cojocaru I. (Lic. Meșotă Brașov) și Epureanu A. Ioan, Ionescu Gh. Mircea (Lic. Militar Tg.-Mureș), cari nu află decât pe $\sin\theta$, fără să dea pe $\theta$. Restul soluțiilor incomplete sau greșite. In general nu se știe care-s arcele ce corespund la un număr trigonometric dat!

N. C.

PROBLEMA 4048. *Dacă avem*

$$f'(x) = 12(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

*atunci avem şi relaţia*

$$2\begin{vmatrix} \alpha & f(\alpha) & 1 \\ \beta & f(\beta) & 1 \\ \gamma & f(\gamma) & 1 \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2].$$

GH. TH. GHEORGHIU.

*Soluţie* dată de D-nii: N. N. ALDEA, AUREL EM. BĂDESCU, CEZAR COŞNIŢĂ, MIRCEA-LEONTE A. NEGREA, ŞTEFAN E. OLTEANU.

Scăzând elementele primei şi celei de a treia coloane, convenabil înmulţite cu câte o constantă, din elementele coloanei a doua, se vede uşor că determinantul precedent se scrie:

$$1)\quad \Delta = 2\begin{vmatrix} \alpha & f(\alpha) & 1 \\ \beta & f(\beta) & 1 \\ \gamma & f(\gamma) & 1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^4 - \tfrac{1}{3}S_1\alpha^3 + 2S_2\alpha^2 & 1 \\ \beta & \beta^4 - \tfrac{1}{3}S_1\beta^3 + 2S_2\beta^2 & 1 \\ \gamma & \gamma^4 - \tfrac{1}{3}S_1\gamma^3 + 2S_2\gamma^2 & 1 \end{vmatrix},$$

unde s'a pus

$$2)\qquad S_1 = \alpha+\beta+\gamma \qquad S_2 = \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta.$$

Dar avem:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^4 & 1 \\ \beta & \beta^4 & 1 \\ \gamma & \gamma^4 & 1 \end{vmatrix} = \Sigma\beta\gamma(\gamma-\beta)(\gamma^2+\beta^2+\gamma\beta)$$

$$= \Sigma\beta\gamma(\gamma-\beta)[\Sigma\alpha^2+\Sigma\beta\gamma]$$

$$= (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)[S_1^2-S_2],$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^3 & 1 \\ \beta & \beta^3 & 1 \\ \gamma & \gamma^3 & 1 \end{vmatrix} = \Sigma\beta\gamma(\gamma-\beta)(\gamma+\beta) = \Sigma\beta\gamma(\gamma-\beta)\Sigma\alpha$$

$$= (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)S_1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \beta & \beta^2 & 1 \\ \gamma & \gamma^2 & 1 \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta).$$

Din descompunerea determinantului 1) într'o sumă algebrică de determinanți, rezultă

$$\Delta = 6\Delta_1 - 8S_1\Delta_2 + 12S_2\Delta_3.$$

Înlocuind pe $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ cu expresiile lor precedente, găsim

$$\Delta(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)[6S_1^2 - 6S_2 - 8S_1^2 + 12S_2]$$
$$= (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)[-2S_1^2 + 6S_2].$$

In definitiv

$$\Delta = -(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)[(\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 + (\alpha-\beta)^2].$$

*Consecință.* Această chestiune elementară, propusă de autor pe vremea când era student în anul I de Matematice, în fond conține o propoziție de algebră (teoria formelor), poate nouă.

Presupunem

3) $$\alpha \neq \beta \neq \gamma;$$

In acest caz condiția

$$\Delta = 0$$

impune numai

$$(\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 + (\alpha-\beta)^2 = (\alpha + \varepsilon\beta + \varepsilon^2\gamma)(\alpha + \varepsilon^2\beta + \varepsilon\gamma) = 0$$

unde $\varepsilon$ e rădăcina cubică complexă a unității.

E ușor de văzut că anularea unuia din factori exprimă condiția ca raportul anarmonic al cantităților $\infty$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ să fie *echianarmonic*:

4) $$(\infty\alpha\beta\gamma) = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} = -\varepsilon.$$

Punând

5) $$f(x) \equiv a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4,$$

determinantul $\Delta$ se mai scrie

$$\Delta = 6\begin{vmatrix} \alpha & \varphi(\alpha) & 1 \\ \beta & \varphi(\beta) & 1 \\ \gamma & \varphi(\gamma) & 1 \end{vmatrix}$$

unde

6) $$\varphi(x) \equiv a_1 x^3 + 3a_2 x^2 + 3a_3 x + a_4.$$

E clar că, în cazul când $\Delta$ e nul, avem între elementele celor trei linii o aceeaş relaţie lineară:

$$m\alpha + n + q\varphi(\alpha) = 0$$
$$m\beta + n + q\varphi(\beta) = 0$$
$$m\gamma + n + q\varphi(\gamma) = 0.$$

Aşadar ecuaţia de gradul al treilea

$$mx + n + q\varphi(x) = 0$$

are aceleaşi rădăcini ca ecuaţia

$$\Psi(x) \equiv a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0.$$

Prin urmare avem identitatea

7) $$mx + n + p\,\Psi(x) + q\varphi(x) \equiv 0.$$

Să facem asupra ecuaţiei 5) transformarea lineară

8) $$x = \frac{A\xi + B\eta}{C\xi + D\eta} \quad AD - BC \neq 0.$$

Ecuaţia se preface în forma binară bipătratică

5′) $$F(\xi, \eta) \equiv \alpha_0 \xi^4 + 4\alpha_1 \xi^3\eta + 6\alpha_2 \xi^2 \eta^2 + 4\alpha_2 \xi\eta^3 + \alpha_4 \eta^4.$$

Derivatele $\Psi(x)$ şi $\varphi(x)$, ale lui $f(x)$ şi ale transformatei sale în $\frac{1}{x}$, se preschimbă în următoarele două forme polare:

$$u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad , \quad u_0\frac{\partial F}{\partial x} + v_0\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

unde $(u, v)$ şi $(u_0, v_0)$ sunt omoloagele valorilor $\infty$ şi 0 în substituţia 8). Încât, identitatea 7) devine:

9) $$P\frac{\partial F}{\partial \xi} + Q\frac{\partial F}{\partial \eta} \equiv (M\xi + N\eta)(\xi v - \eta u)^2.$$

Citim pe această identitate propoziţia următoare:

*Dacă punctul* (u, v), *complectat cu cele trei puncte ale primei sale polare*

$$u\frac{\partial F}{\partial \xi}+v\frac{\partial F}{\partial \eta}=0,$$

*față de forma bipătratică* 5'), *formează o diviziune echianarmonică, atunci punctul* (u, v) *e un punct de coincidență pentru seria lineară formată de rădăcinile polarelor prime ale formei* 5').

Se știe însă că valorile de coincidență ale rădăcinilor primei polare sunt date de rădăcinile hessianei:

$$H\equiv\frac{1}{12}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2} & \frac{\partial^2F}{\partial\xi\partial\eta}\\ \frac{\partial^2F}{\partial\xi\partial\eta} & \frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}\end{vmatrix}$$

$$\equiv\begin{vmatrix}a_0\xi^2+2a_1\xi\eta+a_2\eta^2 & a_1\xi^2+2a_2\xi\eta+a_3\eta^2\\ a_1\xi^2+2a_2\xi\eta+a_3\eta^2 & a_2\xi^2+2a_3\xi\eta+a_4\eta^2\end{vmatrix}.$$

Dacă acum considerăm agregatul

$$10)\qquad \frac{1}{4}(x\eta-y\xi)\left(\xi\frac{\partial F}{\partial x}+\eta\frac{\partial F}{\partial y}\right)\equiv\frac{1}{4}\left[\eta^2x\frac{\partial F}{\partial y}+\xi\eta\left(x\frac{\partial F}{\partial x}-y\frac{\partial F}{\partial y}\right)-\xi^2y\frac{\partial F}{\partial x}\right]$$

$$\equiv(a_0\xi\eta+a_1\eta^2)x^4+(-a_0\xi^2+2a_1\xi\eta+3a_2\eta^2)x^3y+3$$

$$(-a_1\xi^2+a_3\eta^2)x^2y^2+(-3a_2\xi^2-2a_3\xi\eta+a_4\eta^2)xy^3$$

$$-(a_3\xi^2+a_4\xi\eta)y^4=0$$

constituit din punctul $\xi$, $\eta$ și polara sa primă față de forma $F(x,y)$, se știe că expresia care, egalată cu zero, exprimă că cele patru puncte ale acestui agregat au un raport echianarmonic este tocmai

$$J\equiv 3(a_1\xi^2-a_3\eta^2)^2+(-a_0\xi^2+2a_1\xi\eta+3a_2\eta^2)$$

$$(-a_4\eta^2+2a_3\xi\eta+3a_2\xi^2)-4(a_0\xi+a_1\eta)(a_4\eta+a_3\xi)\xi\eta.$$

Din propoziția precedentă rezultă însă că, dacă J e nul și H e nul. Un raționament algebric ușor ne arată că cele două expresii J și H, considerate ca forme bipatratice în $\xi$, $\eta$, diferă numai printr'un factor numeric. Comparând coeficienții lui $\xi^4$ (de exemplu) în J și H, obținem în cele din urmă identitatea:

$$11) \qquad 3\,H + J \equiv 0.$$

Incât propoziția de mai sus se complectează cu o reciprocă, și putem enunța.

*Singurele puncte care fac un raport echianarmonic cu punctele primei lor polare față de o formă bipătratică binară, sunt cele patru puncte de coincidență ale seriei lineare formate de rădăcinile acestor polare.*

Considerând această proprietate în domeniul complex și interpretând-o, în plan, prin reprezentarea binecunoscută, se obțin proprietăți geometrice interesante.

Propun corespondenților noștri, studenți în matematice, acest exercițiu, care ar putea fi publicat ca notă în *Gazeta Matematică*.

D. B.

---

PROBLEMA 4054. *Intre laturile* a, b, c, d, *diagonalele* e, f, *razele cercurilor circumscrise triunghiurilor obținute luând câte trei vârfurile unui patrulater convex* ABCD, *avem relațiile*

$$\left(\frac{ab}{R_1} + \frac{cd}{R_2}\right) e = \left(\frac{ad}{R_3} + \frac{bc}{R_4}\right) f = 4S$$

S *fiind suprafața patrulaterului.*

M. Ghermănescu.

1. *Soluție* dată de D-nii: N. Acikgheozian, N. N. Aldea, C. Avram, A. Bădescu, I. Cârstoiu, R. Dumitrașcu, Adr. Gheorghiu, Har. P. Ionescu-Biss, M. Margulius, E. Mereuță, M. Negrea, Șt. Olteanu, I. Parepeanu, N. D. Popescu, G. Roșca, P. Varlam, N. Velicescu-Muscel, Sub-lt. I. Zamfirescu și N. Zane.

Insemnăm respectiv cu $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ suprafețele celor patru triunghiuri din enunț; se vede ușor pe o figură că avem relațiile

$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4 = S.$$

Cum în orice triunghiu avem relația

$$abc = 4RS$$

vom avea pentru triunghiurile noastre

$$abe = 4R_1S_1 \ , \ cde = 4R_2S_2 \ , \ adf = 4R_3S_3 \ , \ bcf = 4R_4S_4.$$

2. *Generalizare* dată de D-l Har. P. Ionescu-Biss.

Să considerăm în general un contur poligonal închis și convex format din $n$ laturi pe cari le vom nota astfel:

$$A_1A_2 = a_1 \ , \ A_2A_3 = a_2 \ , \ \ldots \ , \ A_n A_1 = a_n$$

și dacă apoi vom uni unul din vârfurile conturului cu toate celelalte vârfuri și vom nota dreptele astfel obținute cu:

$$b_k^i$$

unde pentru o valoare a lui $i$ corespund pentru $k$, $n - 3$ valori căci un vârf se poate uni cu celelalte $n - 3$ vârfuri afară de cele două vecine, din dreapta și stânga și dacă notăm cu $R_{k'}^i$, unde pentru o valoare a lui $i$ corespund $n - 2$ valori pentru $k'$, $R_{k'}^i$ fiind raza cercului circumscris unuia din triunghiurile astfel formate, avem, în acelaș mod ca la problema dată, relațiile:

$$\frac{a_1\ a_2\ b_1^1}{R_1^1} + \frac{b_1^1 a_3 b_2^1}{R_2^1} + \ldots + \frac{b_{n-2}^1 a_{n-2} b_{n-3}^1}{R_{n-3}^1} + \frac{a_{n-1}\ b_{n-3}\ a_n}{R_{n-2}^1} = 4S$$

$$\frac{a_2\ a_3\ b_1^2}{R_1^2} + \frac{b_2^2 a_4 b_3^2}{R_2^2} + \ldots + \ldots + \frac{a_1\ b_{n-3}^2\ a_n}{R_{n-2}^2} = 4S$$

$$\frac{a_{n-1} b_{n-3}^1 a_n}{R_1^{n-1}} + \frac{b_{n-3}^1 a_1 b_{n-4}^2}{R_{n-3}^2} + \ldots + \frac{a_{n-2}\ b_1^{n-3}\ a_{n-3}}{R_1^{n-3}} = 4S$$

$$\frac{a_n\ b_{n-3}^2\ a_1}{R_1^n} + \frac{b_{n-3}^2 a_2 b_{n-4}^3}{R_2^n} + \ldots + \frac{a_{n-1}\ b_{n-2}^1\ a_{n-2}}{R_1^{n-2}} = 4S$$

unde S este suprafața închisă de contur, cu ajutorul cărora se stabilesc imediat relațiile din enunț.

3. *Notă. a)* D. Har. Ionescu-Biss se ocupă şi de un patrulater concav stabilind, într'un caz de figură, relaţia

$$\left(\frac{a'b'}{R'_1}+\frac{c'd'}{R'_2}\right)e'=\left(\frac{a'd'}{R'_3}-\frac{b'c'}{R'_4}\right)f'=4S'$$

precum şi alte relaţiuni referitoare la poziţii particulare ale vârfurilor.

*b)* D. M. Popescu-Stăneşti stabileşte relaţia

$$\left(\frac{ab}{R_1}+\frac{cd}{R_2}\right)e+\left(\frac{ad}{R_3}+\frac{bc}{R_4}\right)f=4S$$

şi conchide textual „Regulat găsesc greşeli de tipar în probleme. Rog atrageţi atenţia corectorilor" !

Noi ne conformăm acestui aviz, atrăgându-i D-sale atenţia !

*c)* O soluţie mai lungă s'a primit dela D-l N. Patraulea.

M. G.

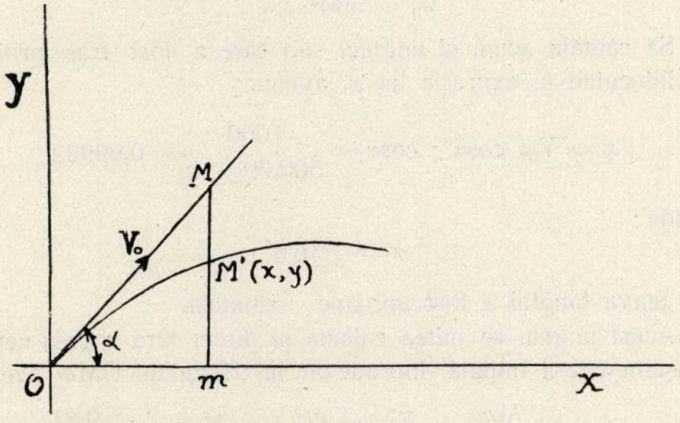
---

PROBLEMA 4069. *Ce viteză iniţială are un proectil în vid, ştiind că el parcurge în 2 secunde o mie de metrii pe orizontală şi 20 metrii pe verticală.*

A. I. Stan.

*Soluţie* dată de D-nii: V. I. C. Vissarion, Sublt. Ioan C. Savin (Art. A. A. Iaşi) şi A. Em. Bădescu.

Să considerăm figura de mai jos, reprezentând traiectoria unui proiectil tras în vid, ce ştim că se găseşte într'un plan vertical *xoy*.




Să'nsemnăm ca de obiceiu cu :

$V_0$ , viteza iniţială a proectilului

$\alpha$ , unghiul ce-l face $V_0$ cu axa OX.

$t$ , timpul.

Cu notaţiile de pe figură ecuaţiile parametrice se scriu:

$$Om = x = V_0 t \cos\alpha$$

$$M'm = Mm - MM' = y = V_0 t \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Ridicând la pătrat ambele ecuaţiuni şi adunându-le membru cu membru, obţinem:

$$x^2 + (y + \tfrac{1}{2} g t^2) = V_0^2 t^2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

şi de aci scoatem valoarea căutată a vitezei iniţiale:

$$V_0 = \frac{\sqrt{x^2 + (y + \frac{1}{2} g t^2)^2}}{t}$$

care pentru datele numerice ale problemei ce ne preocupă devine:

$$V_0 = \frac{\sqrt{1000^2 + (20 + 2 \times 9{,}81)^2}}{2} = \sqrt{500^2 + 19{,}81^2}$$

adică am introdus în expresia lui $V_0$ valorile:

$$x = 1000m \ ; \ y = 20m \ ; \ t = 2'' \ ; \ g = 9{,}81^{m}/_{sec^2}.$$

Efectuând radicalul de mai sus găsim:

$$V_0 = 500{,}39^{m}/_{sec}$$

sau rotund:

$$V_0 = 500^{m}/_{sec}.$$

Să căutăm acum şi unghiul sub care a fost tras proiectilul. Inlocuind în expresia lui $x$, avem:

$$x = V_0 t \cos\alpha \ ; \ \cos\alpha = \frac{1000}{500{,}39 \times 2} = 0{,}99922$$

de unde:

$$\alpha = 2^0 16' 8''$$

adică ţeava tunului a fost aproape orizontală.

Acest unghiu se putea calcula şi direct fără a avea nevoie să cunoaştem viteza iniţială. Intr'adevăr în triunghiul $OMm$ avem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Mm}{Om} = \frac{y + \frac{1}{2} g t^2}{x} = \frac{20 + 2 \times 9{,}81}{1000}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{19{,}81}{500} = 0{,}03962.$$

Cunoscând valoarea $\text{tg}\alpha$, putem cunoaşte valoarea lui $\cos\alpha$ şi utilizând ecuaţia traiectoriei:

$$y = x\,\text{tg}\alpha - \tfrac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0^2\cos^2\alpha}$$

ajungem de asemenea să găsim valoarea vitezei iniţiale, singura necunoscută din ecuaţia de mai sus.

CPT. GH. N.

---

PROBLEMA 4081. *Să se găsească două fracţii mai mici ca 1, dintre care una să se transforme în fracţie zecimală periodică simplă, alta în fracţie zecimală periodică mixtă, aşa ca produsul lor să se transforme în fracţie zecimală exactă, cu o singură cifră semnificativă după virgulă. Să se dea exemple cât mai simple pentru fiecare produs posibil.*

I. IONESCU.

*Soluţie* dată de D-nii: ST. E. OLTEANU şi M. MARGULIUS.

Produsul de care e vorba nu poate fi decât:

$$0{,}1 = 1/10;\ 0{,}2 = 1/5;\ 0{,}3 = 3/10;\ 0{,}4 = 2/5;\ 0{,}5 = 1/2;$$
$$0{,}6 = 3/5;\ 0{,}7 = 7/10;\ 0{,}8 = 4/5;\ 0{,}9 = 9/10.$$

Unul din factorii produsului fiind echivalent cu o fracţie zecimală mixtă nu trebuie să aibă la numitor factorii primi 2 sau 5, dacă îl reducem la cea mai simplă expresiune. Aceşti factori trebuie să-i dăm numitorului fracţii echivalente cu fracţia zecimală periodică mixtă. Cealaltă fracţie trebuie să aibă ca numitor un număr $n$ care să nu conţină de loc pe 2 sau 5 ca factori. Pentru ca $n$ să dispară dela produs, — dacă prima fracţie e ireductibilă, — $n$ trebuie să se găsească ca factor în numărătorul fracţii a doua. Pe de altă parte, la una, sau la alta, ori la amândouă, trebuie să mai găsim factorii dela numărătorii produselor de mai sus, dacă numărătorul e diferit de 1. Astfel 4 poate fi la una din ele, sau 2 la una şi 2 la alta, putem lua 9 la una din ele, sau 3 la una şi 3 la alta. Aceste numere nu trebuie însă să se simplifice cu factori dela numitori. A doua fracţie, ca să ne dea o fracţie periodică mixtă, mai trebuie să aibă un factor $m$ care să nu conţină pe 2 sau 5 şi

care trebuie să se găsească în numărătorul primei fracţii, pentru ca să dispară în produs.

Cu modul acesta găsim următoarele soluţii simple, în numere mai mici ca 30 :

$(3/7)\times(7/30)$; $(3/7)\times(7/15)$; $(9/11)\times(11/30)$; $(6/7)\times(7/15)$; $(7/9)\times(9/14)$; $(9/11)\times(11/15)$; $(21/23)\times(23/30)$; $(6/7)\times(14/15)$; $(27/29)\times(29/30)$.

---

PROBLEMA 4082. *Trouver un carré de quatre chiffres tel que le nombre obtenu en le diminuant d'une unité égale le produit de sept nombres entiers consécutifs.*

V. THÉBAULT.

*Soluţie* dată de D-nii: N. A. ACIKGHEOZIAN, GEGE ŞT. ROŞCA, ŞT. E. OLTEANU (Blaj); I. C. PAREPEANU (Şc. militară geniu); MARGULIUS MARIUS (elev lic. Spiru Haret) şi SUBLOC. I. C. SAVIN.

I. Singurul număr de patru cifre, produs a şeapte numere consecutive, este :

$$1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7 = 7! = 5040.$$

Conform enunţului trebuie ca: $5040 + 1 = 5041$ să fie un pătrat perfect, ceeace se verifică, căci avem: $5041 = 71^2$.

II. Dacă însă vroim să respectăm cu stricteţe enunţul problemei, atunci suntem conduşi a căuta *direct* pătratul perfect. Pentru aceasta observăm că acest pătrat trebuie să se termine neapărat cu *unu,* căci produsul celor şeapte numere consecutive se termină cu *zero.* Numerile de două cifre, care dau pătrate perfecte de patru cifre sunt cuprinse între 32 şi 100.

Dintre aceste numere reţinem numai pe acelea ce se termină cu *unu* sau cu *nouă,* căci numai acestea dau pătrate perfecte terminate cu *unu.*

Aceste numere sunt: 39; 41; etc. iar pătratul lor micşorat cu o unitate este de forma :

$$E = 10a\,(10a \pm 2)_{(a=4;\,5;\,\ldots\,9)}.$$

Aceste numere, trebuie neapărat să fie divizibile cu *nouă,* căci în produsul a şeapte numere consecutive factorul *trei* intră cel puţin de două ori.

Restul împărţirii prin nouă, al expresiunii de mai sus este:

$$E' = a\,(a \pm 2)$$

care se va divide cu 9, în cazul când $a$ este egal cu 7 sau cu 9 (considerând semnul $+$) şi pentru $a = 9$ (considerând semnul $-$). Rămân deci de cercetat numai numerile:

$$10 \times 7(10 \times 7 + 2)\ ;\ 10 \times 9(10 \times 9 + 2)\ ;\ 10 \times 9(10 \times 9 - 2)$$

sau:

$$70 \times 72\ ;\ 90 \times 92\ ;\ 90 \times 88.$$

Dar în produsul a 7 numere consecutive cel puţin trei numere sunt pare — deci numărul căutat va trebui să se dividă şi cu 8, ceeace ne conduce a elimina numărul: $90 \times 92$. In fine eliminăm numărul $90 \times 88$, care nu conţine factorul 7, care de asemenea trebuie să figureze în produsul a şeapte numere consecutive. Singurul număr rămas şi care ar corespunde problemei este:

$$70 \times 72 = 7 \times 10 \times 8 \times 9 = 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 5040$$

sau:

$$70 \times 72 = 7 \times (2 \times 4) \times (3 \times 3) \times (5 \times 2) = 7 \times (2 \times 3) \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore\ 5040 = 7! = 7 \times 8 \times 9 \times 10$$

adică problema este rezolvată, căci am plecat dela un pătrat perfect, căruia i-am scăzut unitatea — pentru a da peste un număr produs a şeapte numere consecutive. *Mai mult — numărul căutat este şi produsul a patru numere consecutive şi se ştie după o problemă propusă de* E. N. Barisien, *în „G. M." — că produsul a patru numere consecutive, plus unitatea, este un pătrat perfect.*

Ca atare:

$$5040 + 1 = 7! + 1 = 71^2 - 7 \times 8 \times 9 \times 10 + 1 = (8 \times 9 - 1)^2.$$

Acest fel de a rezolva problema, întrebuinţează mult mai mult raţionament aritmetic, ori acesta este scopul problemelor: dezvoltarea raţionamentului.

Cpt. Gh. N.

*PROBLEMA 4087. *Fie triunghiul* ABC, *cercul său circumscris de rază* R. *Se duc tangentele la cerc în* A, B *şi* C. *Fie* A'B'C' *triunghiul format de tangente. Insemnând cu* S' *suprafaţa triunghiului* A'B'C' *să se demonstreze relaţia:*

$$S' = R^2 \operatorname{tg}A \operatorname{tg}B \operatorname{tg}C.$$

N. DONCIU.

I. *Soluţie* dată de D-nii : SUB.-LT. I. GH. ZAMFIRESCU, N. PATRAULEA (cl. VI, Lic. Monăstirea Dealului), M. MARGULIUS (Lic. Spiru Haret, Bucureşti), D. DOGARU, ANA HORTOPAN, N. N. MIHĂILEANU şi SUB.-LT. E. G. MILEA.

Insemnăm cu $2p'$ perimetrul iar cu $a'$, $b'$ şi $c'$ laturile triunghiului A'B'C'. Vom avea :

$$S' = p'R \tag{1}$$

Dar :

$$p' = \frac{a' + b' + c'}{2} = \frac{B'C' + A'C' + A'B'}{2}$$

şi vom căuta să exprimăm laturile $a'$, $b'$, $c'$ în funcţie de elementele triunghiului ABC şi de R. Pentru aceasta să însemnăm ca de obicei cu O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi înscris în A'B'C' şi să considerăm triunghiurile AOB' şi AOC' şi similarele în care avem :

$$a' = B'C' = B'A + AC' = R \operatorname{tg}A + R \operatorname{tg}C$$

$$b' = A'C' = A'B + BC' = R \operatorname{tg}C + R \operatorname{tg}A$$

$$c' = A'B' = A'C + CB' = R \operatorname{tg}A + R \operatorname{tg}B.$$

Adunăm egalităţile de mai sus şi obţinem :

$$a' + b' + c' = 2p' = 2R(\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C)$$

şi dacă înlocuim valoarea lui $p'$, aci găsită, în (1) avem :

$$S' = R^2 (\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C).$$

Această expresiune este egală cu cea din enunțul problemei de față, căci știm că avem:

$$tgA + tgB + tgC = tgA\ tgB\ tgC$$

când:

$$A + B + C = \pi$$

cum este în cazul nostru.

II. *Soluție* dată de D-rele: M. Țerna și M. Léber (studente Cluj) și D-nii: N. N. Aldea (st. Buc.); Gh. Boldea (st. Cluj); I. C. Parepeanu (Șc. milit. geniu); I. I. Petrescu; I. C. Sava-Grigoreni (st. Buc.) și Ef. Șt. Sorin (cl. VI Lic. milit. N. Filipescu).

Urmărind figura indicată de enunț, observăm că:

$$S' = S_{\Delta} A'OB' + S_{\Delta} B'OC' + S_{\Delta} C'OA'.$$

Să calculăm aceste suprafețe parțiale. Avem:

$$S_{\Delta} A'OB' = \frac{1}{2} A'B' . OC = \frac{1}{2} A'B' \times R$$

$$S_{\Delta} B'OC' = \frac{1}{2} B'C' . OA = \frac{1}{2} B'C' \times R$$

$$S_{\Delta} C'OA' = \frac{1}{2} C'A' . OB = \frac{1}{2} C'A' \times R$$

apoi A'B'; B'C' și C'A' se calculează ca la soluția I-a.

III. *Soluție* dată de D-l N. N. Mihăileanu (Constanța).

Suprafața S' a triunghiului A'B'C' se scrie:

$$S' = \frac{1}{2} A'C' . A'B' \sin A' \qquad (1)$$

dar

$$A' = 180^0 - \sphericalangle BOC = 180^0 - 2A$$

$$\therefore \quad \sin A' = \sin 2A = 2 \sin A \cos A.$$

Apoi A'C' şi A'B', calculate ca la soluţia I-a ne dau:

$$A'C' = R\,(tgC + tgA) = R\,\frac{\sin(A+C)}{\cos A\,\cos C} = \frac{\sin B}{\cos A\,\cos C}$$

$$A'B' = R\,(tgA + tgB) = R\,\frac{\sin(A+B)}{\cos A\,\cos B} = \frac{\sin C}{\cos A\,\cos B}\,.$$

Inlocuim în (1) valorile astfel calculate şi după simplificările necesare obţinem:

$$S' = R^2\,\frac{\sin A\,\sin B\,\sin C}{\cos A\,\cos B\,\cos C} = R^2\,tgA\,tgB\,tgC$$

c. c. t. d.

IV. O altă *soluţie.*

Triunghiul A'B'C' se compune din patrulaterele: A'COB; B'AOC şi C'BOA, având fiecare diagonalele perpendiculare între ele, încât suprafaţa S' se poate scrie:

$$S' = {}^1/_2\,(a\,.\,OA' + b\,.\,OB' + c\,.\,OC')$$

unde *a, b, c* sunt laturile triunghiului ABC.

Pe OA', OB' şi OC' îi calculăm din triunghiurile în cari figurează. Avem:

$$OA' = \frac{R}{\cos A}\quad;\quad OB' = \frac{R}{\cos B}\quad;\quad OC' = \frac{R}{\cos C}\,.$$

Pe *a, b* şi *c* îi calculăm din egalităţile bine cunoscute:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Facem în S' toate înlocuirile şi dăm iarăşi peste relaţia cerută de enunţul problemei.

Căpitan Gh. N.

## *EXERCIŢII

31. Două din simedianele exterioare ale unui triunghiu, împart armonic pe cea de a treia.

I. D. CÂRSTOIU.

R. Propoziţia rezultă imediat observând că aceste simediane exterioare sunt diagonalele patrulaterului complect format de laturile triunghiului şi dreapta pe care se găsesc cele trei puncte de intersecţie ale acestor simediane cu laturile triunghiului.

32. Să se rezolve ecuaţiunea

$$a^2x^{4n}+2abx^{3n}+(b^2+2ac+a)x^{2n}+b(1+2c)x^n+c-d=0.$$

S.-LT. I. C. SAVIN.

R. Ecuaţiunea se poate scrie:

$$(ax^{2n}+bx^n+c)^2+(ax^{2n}+bx^n+c)-d=0.$$

Punând

$$ax^{2n}+bx^n+c=y$$

obţinem

$$y^2+y-d=0$$

de unde

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+4d}}{2}$$

şi rezultă

$$x=\sqrt[n]{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac+2a(-1\pm\sqrt{1+4d})}}{2}}.$$

33. Dacă $a$ este o constantă şi L însemnează logaritm neperian, să se afle limita lui:

$$E=\frac{Lx-e^x}{e^xa^e-Lx}$$

pentru $x\to\infty$.

HARALAMB P. IONESCU-BISS.

R. Avem:

$$E = \frac{a^e - 1}{a^e - \frac{Lx}{e^x}} - 1$$

şi atunci căutăm pe

$$\lim_{x=\infty} \frac{Lx}{e^x} = \lim_{x=\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x=\infty} E = -a^{-e}.$$

34. Să se pună sub formă de produs:

$$E = -\Sigma a^2 + 2abc - 3\Sigma bc + \Sigma bc\,(b + c) + 2\Sigma a - 1.$$

N. N. MIHĂILEANU.

R. $E = (b + c - 1)\,[a^2 - 2a + \Sigma bc - (b + c - 1)]$

$E = \pi\,(b + c - 1).$

35. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{r_a - r}{r_b + r_c} + \frac{r_b - r}{r_a + r_c} + \frac{r_c - r}{r_a + r_b} \geqslant 1,$$

notaţiile fiind cele obişnuite într'un triunghiu oarecare.

N. N. VELICESCU.

R. Din relaţiile cunoscute:

$r = 4R \sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C$, $r_a = 4R \cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C \sin\frac{1}{2}A$, etc...

uşor se deduce:

$$\sum \frac{r_a - r}{r_b - r_c} = \sum \frac{\sin\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}(B + C)}{\cos\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}(B + C)} = \Sigma \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}A$$

ori

$$\Sigma \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}A \geqslant 1 \text{ (G. M. XXXIII p. 458)}$$

deci

$$\sum \frac{r_a - r}{r_b - r_c} \geqslant 1.$$

# PROBLEME PROPUSE

*4131. Trouver un cube parfait de six chiffres dont la racine égale la différence de deux nombres formés par ses tranches de trois chiffres.

V. THÉBAULT.

*4132. In *Revista Matematică din Timişoara* pagina 105, volumul XI, s'a demonstrat că numărul de $2n$ cifre

$$11\ldots 11288\ldots 896$$

este totdeauna patrat perfect. Observ că numărul format de ultimele $n$ cifre ale acestui patrat este de 8 ori mai mare decât numărul format de primele $n$ cifre.

Se cere să se găsiască în general un patrat perfect de $n+p$ cifre, astfel în cât numărul format de ultimele $n$ cifre dela dreapta sau numărul format de primele $n$ cifre dela stânga să fie de 8 ori mai mare de cât numărul format de primele $p$ cifre din stânga sau de ultimele $p$ cifre dela dreapta.

COL. GH. BUICLIU.

*4133. Să se găsească două numere întregi A şi B în următoarele cazuri:

*a)* — când diferenţa lor este egală cu $m$ ori câtul lor;

*b)* — când diferenţa patratelor lor este egală cu $n$ ori patratul câtului lor.

In ambele cazuri $m$ sau $n$ sunt întregi.

Aplicaţie pentru $m = 9$ sau $n = 3$.

IOAN CURCHI.

4134. Se consideră un cerc de centru O în interiorul căruia se trasează un alt cerc de centru $O_1$. Să se găsească un punct A pe cercul O şi altul $A_1$ pe $O_1$, astfel ca distanţa $AA_1$ să fie minimă.

CĂPITAN GH. NICULESCU.

*4135. Fie A, B două puncte ce determină o dreaptă. Considerăm un punct M pe dreaptă şi M' armonicul său faţă de punctele A, B.

Se duce cercul de diametru MM', iar prin centrul acestui cerc o dreaptă care taie cercul în N şi N'.

Se cere locul geometric al punctelor N, N', când M se deplasează pe dreapta AB.

Unghiul dreptei NN' cu dreapta AB rămâne constant.

D. Arg. Dumitrescu.

4136. Să se rezolve sistemul:

$$x + (y/z) = 2 \quad ; \quad y + (z/x) = 2 \quad ; \quad z + (x/y) = 2.$$

Să se arate direct că suma $(x + y + z)$ nu poate fi decât 3 sau 7.

I. Ionescu.

4137. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$xzu + yzv = 2ab \qquad zuw + yuv = 2ad$$
$$xzw + xyv = 2bc \qquad xuv + zvw = 2bd$$
$$xyu + yzw = 2ac \qquad xuw + yvw = 2cd.$$

M. Ghermănescu.

4138. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x} + \operatorname{arc\,sin}(x - a) = \frac{\pi}{4}.$$

Pentru ce valori ale lui $a$ avem rădăcini reale?

I. V. Măţieş.

*4139. Să se calculeze suma

$$\sum_{i=1}^{i=m} \operatorname{tg} ia \operatorname{tg}(i+1)a.$$

I. B. Florescu.

*4140. Să se arate că între elementele unui triunghiu oarecare avem relaţia

$$a^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C + b^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A + c^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = 4r(R + r).$$

Ioan Gh. Popa.

LA REDACȚIUNEA REVISTEI „GAZETA MATEMATICĂ“
SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL V-LEA
(MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)
DE
BOLETIN MATEMATICO
COSTUL UNUI ABONAMENT FIIND DE 300 LEI
ȘI PENTRU ANUL AL III-LEA
(MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)
DE
BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL
COSTUL ABONAMENTULUI FIIND DE 125 LEI,
PUBLICATE ÎN BUENOS AIRES; AMÂNDOUĂ 400 LEI

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Abramescu Mariana* (4105, 08, 10); *Acikgheozian A. Nuber* (4108, 25, 29, 30); *Chiriac I. C.* (3988); *Curchi Ioan* (4086, 101, 08, 10, 16, 29, 30); *Dogaru S. D.* (4083, 84, 89, 97, 108); *Efstate Sorin* (4089, 105, 08, 15); *Gheorghiu C. A.* (2971, 3189, 210); *Hortopan Ana* (4084); *Iacobescu P. I.* (4129); *Ionescu-Biss P. H.* (3945, N); *Margulius M.* (3565, 602, 13, 92, 714, 51, 68, 82, 85, 802, 17, 19, 23, 28, 39, 67, 72, 79, 922, 24, 28, 29, 35, 48, 61, 65, 78, 4038, 56, 72, 75, 83, 88, 100, 10, 17, 29, 30, C, E); *Mihăileanu N. N.* (2456, 3072, 817, 4066, 114, 25, E, P); *Milea G. E. Subloc.* (4089, 108, 17); *Negrea A. L. Mircea* (4092, 117, 29, 30); *Olteanu E. St.* (3965, 4014, 96, 127, 29, 30, P); *Panaite N. Th. Subloc.* (2440, 56, 3889, 925, 36, 4014, 65); *Patraulea N.* (4115, 17); *Petrescu I. I.* (4108, 17); *Roşca St. G.* (3935, 48, 74, 75, 4014, 17, 29, 33, 36, 60, 65, 72, 75, 86, 88, 96, 101, 05, 10, 15, 17, 25); *Sager N. I,* (4125, 27, 29); *Savin C. I. Subloc.* (3978, 4084, P); *Şeremet M. Gh.* (4125); *Şova C. I.* (4076); *Stoica D. A.* (4076); *Stoicescu M. & Oprescu N. C.* (4129); *Teodorescu C. St.* (4129, 30); *Thébault V.* (A); *Vissarion V.* (E); *Zamfirescu Gh. I. Subloc.* (P).

*Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

## Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani complețĭ broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu**, *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită*, 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica**, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea**, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu**, *Tratat de geometrie analitică*, Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită*, 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu*. 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica**, *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica**, *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

**La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu**, Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.**

# GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVII

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1932

## SUMARUL

1. Al doilea Congres al Matematicienilor Români. . . . . *N. C.*
2. Funcţiuni omogene simetrice şi triunghiuri de laturi inverse . . . . . *Căp. Gh. Niculescu*
3. Asupra ultimului grup de $p$ cifre ale patratelor perfecte . . . . . *Ion V. Măties*
4. Note matematice: 34 — 36.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 218.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 1364, 3727, 3879, 3932, 4072, 4100, 4101, 4110.
10. Exerciţii: 36 — 37.
11. Probleme propuse: 4141 — 4150.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1932

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVII se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orăşanu**, Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 84, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 72, 76, 83, 87, 4010, 13, 24, 30, 34, 44, 45, 53, 57, 59, 62, 68, 70, 71, 73, 79, 80, 85, 102, 03, 06, 11, 12, 13, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 28, 32, 35, 37, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

# AL DOILEA CONGRES AL MATEMATICIENILOR ROMÂNI

Este neîndoios că matematica s'a bucurat la noi de o favoare specială în raport cu celelalte ramuri de activitate ştiinţifică. Dela 1878, an în care SP. HARET îşi trece în Sorbona teza de doctorat, trăgând prima linie pe care atâţia din compatrioţii lui au s'o urmeze şi s'o adâncească, şi până azi, etapa parcursă în opera de afirmare a matematicilor româneşti este impunătoare. Fără a lua lucrurile atât de departe [1]) ne mărginim aici să spunem că epoca post-belică, odată cu detenta produsă de spargerea graniţelor în care România Veche începuse să se'năbuşe, se caracterizează prin o activitate matematică mult sporită.

Dacă intensiv şi calitativ matematica românească dăduse dintru început măsura posibilităţilor neamului nostru în acest domeniu, şi-i suficient pentru asta să se pomenească numele D-lor GH. ŢIŢEICA şi D. POMPEIU, de mult încetăţenite în ştiinţă, apoi desvoltarea în suprafaţă şi'n număr a matematicei româneşti, se situează în ultima decadă. In această epocă, activitatea matematică românească manifestată în ţară în peste şase periodice, fie pur matematice fie în care partea matematică ocupă un loc de frunte, iar în străinătate în reviste de specialitate franceze, germane, italiene, polone, etc., a răuşit să atragă atenţia lumei ştiinţifice de pretutindeni. In treacăt fie zis, numărul mare de periodice din ţară, în care se răspândeşte producţia matematică românească, este o piedică în afirmarea şcoalei româneşti şi împărtăşesc aici nedumerirea şi încurcătura ce-mi mărturisea nu de mult bibliotecarul şcoalei normale superioare din Paris, neştiind nici el nici directorul şcoalei care din aceste publicaţii româneşti să le accepte şi care nu. Va trebui întreprins desigur în acest domeniu o operă de raţionalizare şi concentrare a activităţii matematice româneşti în jurul a cel mult două-trei periodice matematice cu apariţie regulată şi unanim acceptate. Dacă ceeace s'a făcut la «Gazeta Matematică» s'ar putea realiza şi la un mare periodic de matematici superioare, desigur că un mare pas ar fi făcut

1) Vezi pentru asta: GH. ŢIŢEICA: Desvoltarea ştiinţelor matematice în România. Buletinul Societăţii Politecnice, An. XLV, No. 10, pag. 1070.

de şcoala matematică română. Să sperăm că «Mathematica» va realiza acest lucru!

Graţie desvoltării din ultima decadă, precum şi iniţiativei prof. P. SERGESCU din Cluj, a fost posibil ca în 1929 să se ţină la Cluj primul congres al matematicienilor români, cu un deplin succes.

Era de aşteptat deci, ca şi cel de-al doilea congres, datorit şi organizat de aceiaş iniţiativă, ce a avut loc între 5 — 9 Mai la Turnu-Severin, să aibă acelaş succes. Aşteptările n'au fost desmințite şi cele ce urmează au de scop să arate aceasta.

Pe lângă numeroşii matematicieni români au participat la congres matematicieni străini aparţinând la şase ţări, astfel încât congresul a luat caracterul unui mic congres internaţional. Şi anume au luat parte:

*din Franţa:* D-nii P. MONTEL şi ARNAUD DEUJOY, prof. la Sorbona; S. MANDELBROJT, prof. la Clermont-Ferrand;

*din Belgia:* D-l A. ERRERA, prof. la Bruxelles;

*din Polonia:* D-nii A. BIRKENMAJER, A. ROSENBLATT, W. WILKOSZ, prof. la Cracovia; W. SIERPINSKI, OTTON şi STANISLAWA NIKODYM, F. LEJA, prof. la Varşovia, ŞT. KEMPISTY şi A. ZYGMUND, prof. la Vilna; C. KURATOWSKI, prof. la Lwow;

*din Ceho-Slovacia:* B. HOSTINSKY, prof. la Brno şi DR. Q. VETTER, Praga;

*din Yugoslavia:* I. KARAMATA şi TH. PEYOVITCH, prof. la Belgrad;

*din Bulgaria:* L. TCHAKALOFF, prof. la Sofia.

Lucrările congresului au avut loc în conferinţe generale şi în secţiuni, în număr de şase şi anume:

Secţia I: Analiză funcţională şi fundamentele matematicei;

Secţia II: Algebră şi Analiză matematică;

Secţia III: Geometrie;

Secţia IV: Mecanică, Fizică Matematică şi Astronomie;

Secţia V: Istoria şi filozofia matematicei;

Secţia VI: Didactica matematicei.

Au ţinut conferinţe generale:

Străini: D-nii: A. DEUJOY, A. ERRERA, B. HOSTINSKY, P. MONTEL, W. SIERPINSKI, iar din români, D-nii: GH. ŢIŢEICA, S. STOILOV, C. POPOVICI.

Au făcut comunicări în secţiuni, după cum urmează:

Secția I-a: D-nii S. KEMPISTY, C. KURATOWSKI, O. NIKODYM, B. HOSTINSKY; W. WILKOSZ şi D-na ST. NIKODYM.

Secția II-a: N. ABRAMESCU; V. ALACI (2 com.); TH. ANGHELUȚĂ; R. BĂDESCU; N. CIORĂNESCU (2 com.); G. CĂLUGĂREANU; D. V. IONESCU; J. KARAMATA; F. LEJA; M. GHERMĂNESCU (2 com.); S. MANDELBROJT; M. NICULESCU (2 com.); GR. MOISIL; C. POPOVICI; TH. PEYOVITCH; R. RACLIŞ (2 com.); V. NOVACU; N. TEODORESCU; L. TCHAKALOFF; A. ZYGMUND.

Secția III-a: GH ȚIȚEICA; A. ERRERA; AL. PANTAZI; GR. MOISIL; D. GHERMANI; AL. NICULESCU; J. KELEMEN; P. TĂMÂIANU.

Secția IV-a: A. ROSENBLATT; C. TEODORESCU; G. NANEŞ.

Secția V-a: P. SERGESCU (2 com.); A. BIRKENMAJER; Q. WETTER.

Secția V-a: G. BRATU; O. NIKODYM.

In afară de aceasta, numeroase comunicări au fost depuse la biroul congresului din partea acelor ce n'au putut participa la lucrări.

Din înşirarea de nume de mai sus se vede că cu toată numeroasa participare străină, cel puțin în privința numărului de comunicări nu am fost puşi în minoritate. De sigur că participația românească ar fi putut fi şi mai compactă, dacă n'am fi avut a deplânge absența câtorva geometri, cari se pare că'n majoritatea lor urăsc deplasările.

In fine, se cuvine să menționăm special participarea efectivă la lucrările congresului a D-lor GH. ȚIȚEICA şi D. POMPEIU, investindu-l prin prezența lor cu caracterul de congres național, precum şi activitatea neobosită a D-lui P. SERGESCU, care a asigurat succesul congresului.

Deasemeni, comitetului de organizație din Turnu-Severin ce a avut în frunte pe D-nul TH. COSTESCU, i se cuvin toate laudele pentru munca depusă ce a asigurat succesul desăvârşit al congresului.

N. C.

# FUNCȚIUNI OMOGENE SIMETRICE ȘI TRIUNGHIURI DE LATURI INVERSE

In „G. M." No. 8 (XXXVII), în articolul «Triunghiuri de laturi inverse», am arătat că se pot obține relațiuni simple între elementele similare ale triunghiurilor $(\Delta)_0$ și $\Delta_0$, atunci când $(\Delta)_0$ este un triunghiu geometric progresiv ($b^2 = ac$). Pentru aceste triunghiuri am dat cu acea ocaziune rezultatul:

$$p_0 = \frac{p}{b^2} .$$

Tot în cazul triunghiurilor geometric progresive, vom mai da acum alte relații între alte elemente similare.

Să scriem expresiunea $r$ a cercului înscris în $(\Delta)_0$:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{a+b+c}}$$

și dacă în această expresiune vom înlocui pe $a$, $b$ și $c$ prin $1/a$, $1/b$ și $1/c$ vom obține pe $r_0$; efectuând în expresia lui $r_0$ calculele și făcând reducerile posibile, ținând încă seamă de $b^2 = ac$, obținem:

$$r_0 = \frac{r}{b^2} .$$

Procedând la fel, vom găsi încă:

$$R_0 = \frac{R}{b^2} \quad ; \quad S_0 = \frac{S}{b^4} .$$

Analogia dintre aceste rezultate ne conduc a analiza natura expresiunilor elementelor de cari ne-am ocupat.

Referindu-ne în particular la $r$, pe care îl avem în evidență, observăm că expresiunea lui este o funcțiune omogenă și simetrică de gradul I. Constatăm același lucru despre expresiunea lui $p$. Expresia lui S este o funcție omogenă și simetrică de gradul II. Cu aceste observațiuni putem enunța:

*Dacă* A *şi* $A_0$ *sunt respectiv elementele corespunzătoare din triunghiul de laturi,* $b^2 = ac$ $(a > b > c)$ *şi din triunghiul său* $\Delta_0$, *şi dacă expresiunea lui* A *este o funcţiune omogenă şi simetrică, atunci vom avea totdeauna:*

$$A_0 = \frac{A}{b^{2n}} = \frac{A}{(ac)^n}$$

*unde* n *înseamnă gradul de omogenitate al funcţiunei-expresie a lui* A.

Să demonstrăm acest lucru. Pentru aceasta fie:

$$A = f(x_1 , x_2 , \ldots x_p)$$

o funcţiune omogenă şi simetrică de gradul $m$, având $p$ variabile, între care există relaţiunea:

$$x_1 x_2 = x_3 x_4 = \ldots = x_{p-1} \cdot x_p = k. \qquad (1)$$

Să formăm acum şi funcţiunea:

$$B = f\left(\frac{1}{x_1} , \frac{1}{x_2} , \ldots \frac{1}{x_p}\right)$$

care, având în vedere (1) se va scrie:

$$B = f\left(\frac{x_2}{k} , \frac{x_1}{k} , \ldots , \frac{x_p}{k} , \frac{x_{p-1}}{k}\right)$$

sau:

$$B = \frac{1}{k^m} f(x_2 , x_1 , \ldots x_p , x_{p-1})$$

pentru că A este omogenă şi de grad $m$. Dar pentrucă A este şi simetrică, vom putea scrie în cele din urmă:

$$B = \frac{A}{k^m}$$

rezultat care se enunţă astfel:

*Dacă între variabilele* $x_1$ , $x_2$ , . . . $x_p$ *ale unei funcţiuni omogene şi simetrice, de gradul* m, *există relaţiile:*

$$x_1 \cdot x_2 = x_3 \cdot x_4 = \ldots = x_{p-1} \cdot x_p$$

*atunci vom avea:*

$$f\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots \frac{1}{x_p}\right) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots x_p)}{(x_1 x_2)^m}.$$

Remarc:

1°. Dacă numărul $p$ al variabilelor este impar, atunci relaţiunile se vor scrie:

$$x_1 x_2 = x_3 x_4 = \ldots = x_p^2.$$

Demonstraţia nu întâmpină nici o dificultate, teorema rămâne adevărată.

2°. Funcţiunea considerată fiind simetrică, relaţiunile între variabile se pot lua oricum, spre exemplu:

$$x_1 x_3 = x_2 x_4 = x_5 x_7 = \ldots = x_6 x_p.$$

3°. Rezultatul de mai sus, la care s'a ajuns pornindu-se dela triunghiurile de laturi inverse, prezintă un interes din punct de vedere algebric, căci reprezintă de fapt o clasă de identităţi algebrice.

Căpitan Gh. Niculescu.

## *ASUPRA ULTIMULUI GRUP DE *p* CIFRE ALE PATRATELOR PERFECTE

In *Gazeta Matematică*, Anul XXXIV, pag. 252, am dat un tablou în care sunt separate numerele după diversele valori ale cifrelor pe care le au la zeci şi unităţi patratele lor. Imi propun să extind această chestiune, în conformitate cu dorinţa exprimată de regretatul Tr. A. Dordea la finele soluţiei şi generalizării mele date problemei 3673 din Anul XXXIV, pag. 178, considerând un grup de $p$ cifre în loc de o cifră. Pentru aceasta ne bazăm pe teorema:

*Grupul de* p *cifre, cu care se termină patratele perfecte în şirul lor natural, se repetă din* $5.10^{p-1}$ *numere şi e simetric faţă de numerele de forma* $25.10^{p-2}$.

In adevăr, fie numărul $5n \,.\, 10^{p-1} \pm N$, în care $0 < N < 25.10^{p-2}$.

Avem :

$$(5n \,.\, 10^{p-1} \pm N)^2 = 25 \,.\, 10^{2p-2}\, n^2 \pm 10^p \,.\, nN + N^2 = \mathfrak{M}\, 10^p + N^2.$$

Se exceptează cazul $p = 1$ căci unităţile patratelor perfecte ale numerelor, în şirul lor natural, se repetă din 10 în 10 şi sunt aşezate simetric faţă de 5. Separarea am dat-o pentru acest caz în *Gazeta Matematică*, Anul XXXIV pag. 252 şi o reproduc aci :

| $u$ | 0 | 1 | 4 | 5 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N. | $10n$ | $10n \pm 1$ | $10n \pm 2$ | $10n \pm 5$ | $10n \pm 4$ | $10n \pm 3$ |

Pentru cazul $p = 2$, iau pe rând valorile lui *zu* (ultimele două cifre ale patratelor) date de D-l Col. Gh. Buicliu în *Gazeta Matematică*, Anul XXXIII, pag. 138 şi voi separa după acele valori numerele dintre 0 şi 25. Cu ajutorul unei table de patrate se găseşte uşor următorul tablou :

| *zu* | 00 | 01 | 04 | 09 | 16 | 21 | 24 | 25 | 29 | 36 | 41 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N | $10n$ | $50n \pm 1$ | $50n \pm 2$ | $50n \pm 3$ | $50n \pm 4$ | $50n \pm 11$ | $50n \pm 18$ | $10n \pm 5$ | $50n \pm 23$ | $50n \pm 6$ | $50n \pm 21$ |
| *zu* | 44 | 49 | 56 | 61 | 64 | 69 | 76 | 81 | 84 | 89 | 96 |
| N | $50n \pm 12$ | $50n \pm 7$ | $50n \pm 16$ | $50n \pm 19$ | $50n \pm 8$ | $50n \pm 13$ | $50n \pm 24$ | $50n \pm 9$ | $50n \pm 22$ | $50n \pm 17$ | $50n \pm 14$ |

Pentru $p = 3$ voi separa numerele pânăla 250 după valorile

lui *szu* format de ultimele trei cifre. Cu ajutorul unei table se găseşte tabloul următor:

| *szu* | N | *szu* | N | *szu* | N | *szu* | N | *szu* | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 000 | $100n$ | 196 | $500n \pm 14$ | 400 | $100n \pm 20$ | 600 | $100n \pm 40$ | 801 | $250n \pm 99$ |
| 001 | $250n \pm 1$ | 201 | $250n \pm 101$ | 401 | $250n \pm 49$ | 601 | $250n \pm 51$ | 804 | $500n \pm 202$ |
| 004 | $500n \pm 2$ | 204 | $500n \pm 198$ | 404 | $500n \pm 102$ | 604 | $500n \pm 98$ | 809 | $250n \pm 53$ |
| 009 | $250n \pm 3$ | 209 | $250n \pm 47$ | 409 | $250n \pm 97$ | 609 | $250n \pm 103$ | 816 | $500n \pm 104$ |
| 016 | $500n \pm 4$ | 216 | $500n \pm 96$ | 416 | $500n \pm 196$ | 616 | $500n \pm 204$ | 824 | $500n \pm 232$ |
| 024 | $500n \pm 32$ | 224 | $500n \pm 168$ | 424 | $500n \pm 132$ | 624 | $500n \pm 68$ | 836 | $500n \pm 94$ |
| 025 | $50n \pm 5$ | 225 | $50n \pm 15$ | 436 | $500n \pm 206$ | 625 | $100n \pm 25$ | 841 | $250n \pm 29$ |
| 036 | $500n \pm 6$ | 236 | $500n \pm 106$ | 441 | $250n \pm 21$ | 636 | $500n \pm 194$ | 844 | $500n \pm 62$ |
| 041 | $250n \pm 71$ | 241 | $250n \pm 79$ | 444 | $500u \pm 38$ | 641 | $250n \pm 121$ | 849 | $250n \pm 43$ |
| 044 | $500n \pm 138$ | 244 | $500n \pm 161$ | 449 | $250n \pm 107$ | 644 | $500n \pm 258$ | 856 | $500n \pm 184$ |
| 049 | $250n \pm 7$ | 249 | $250n \pm 57$ | 456 | $500n \pm 116$ | 649 | $250n \pm 93$ | 864 | $500n \pm 192$ |
| 056 | $500n \pm 84$ | 256 | $500n \pm 16$ | 464 | $500n \pm 92$ | 656 | $500n \pm 216$ | 876 | $500n \pm 126$ |
| 064 | $500n \pm 8$ | 264 | $500n \pm 208$ | 476 | $500n \pm 74$ | 664 | $500n \pm 108$ | 881 | $250n \pm 109$ |
| 076 | $500n \pm 226$ | 276 | $500n \pm 174$ | 481 | $250n \pm 59$ | 676 | $500n \pm 26$ | 884 | $500n \pm 122$ |
| 081 | $250n \pm 9$ | 281 | $250n \pm 91$ | 484 | $500n \pm 22$ | 681 | $250n \pm 41$ | 889 | $250n \pm 83$ |
| 084 | $500n \pm 78$ | 284 | $500n \pm 222$ | 489 | $250n \pm 67$ | 684 | $250n \pm 133$ | 896 | $500n \pm 164$ |
| 089 | $250n \pm 33$ | 289 | $250n \pm 17$ | 496 | $500n \pm 136$ | 689 | $500n \pm 117$ | 900 | $100n \pm 30$ |
| 096 | $500n \pm 64$ | 296 | $500n \pm 36$ | 500 | $100n \pm 50$ | 696 | $500n \pm 236$ | 904 | $500n \pm 148$ |
| 100 | $100n \pm 10$ | 304 | $500n \pm 48$ | 504 | $500n \pm 248$ | 704 | $500n \pm 52$ | 906 | $500n \pm 54$ |
| 104 | $500n \pm 152$ | 316 | $500n \pm 146$ | 516 | $500n \pm 246$ | 716 | $500n \pm 154$ | 921 | $250n \pm 89$ |
| 116 | $500n \pm 46$ | 321 | $250n + 111$ | 521 | $250n \pm 39$ | 721 | $250n \pm 61$ | 924 | $500n \pm 118$ |
| 121 | $250n \pm 11$ | 324 | $500n \pm 18$ | 524 | $500n \pm 218$ | 724 | $500n \pm 82$ | 929 | $250n \pm 77$ |
| 124 | $500n \pm 182$ | 329 | $250n \pm 73$ | 529 | $250n \pm 23$ | 729 | $250n \pm 27$ | 936 | $500n \pm 44$ |
| 129 | $250n \pm 123$ | 336 | $500n \pm 156$ | 536 | $500n \pm 244$ | 736 | $500n \pm 144$ | 944 | $500n \pm 212$ |
| 136 | $500n \pm 56$ | 344 | $500n \pm 188$ | 544 | $500n \pm 112$ | 744 | $500n \pm 88$ | 956 | $500n \pm 134$ |
| 144 | $500n \pm 12$ | 356 | $500n \pm 66$ | 556 | $500n \pm 166$ | 756 | $500n \pm 234$ | 961 | $250n \pm 31$ |
| 156 | $500n \pm 34$ | 361 | $250n \pm 19$ | 561 | $250n \pm 81$ | 761 | $250n \pm 69$ | 964 | $500n \pm 158$ |
| 161 | $250n \pm 119$ | 364 | $500n \pm 58$ | 564 | $500n \pm 242$ | 764 | $500u \pm 42$ | 969 | $250n \pm 63$ |
| 164 | $500n \pm 142$ | 369 | $250n \pm 37$ | 569 | $250n \pm 87$ | 769 | $250n \pm 113$ | 976 | $500n \pm 176$ |
| 169 | $250n \pm 13$ | 376 | $500n \pm 124$ | 576 | $500n \pm 24$ | 776 | $500n \pm 76$ | 989 | $500n \pm 228$ |
| 176 | $500n \pm 224$ | 384 | $500n \pm 128$ | 584 | $500n \pm 172$ | 784 | $500n \pm 28$ | 996 | $500n \pm 114$ |
| 184 | $500n \pm 72$ | 396 | $500n \pm 86$ | 596 | $500n \pm 186$ | 796 | $500n \pm 214$ | — | — |

Pentru valori mai mari ale lui $p$, tablourile capătă extensiuni prea mari.

Să facem câteva aplicații.

1. *Generalizarea problemei 3801* propusă de D-l N. PAVEL *(Gazeta Matematică,* Anul XXXIV,pag. 479):

*Care sunt patratele* mszu *în care* sz *sunt patrate?*

*Generalizare:*

*Să căutăm toate patratele terminate în* szu *la care* sz *e patrat.*

Grupa *sz* nu poate fi decât 16, 25, 36, 49, 64, 81 şi valorile formale 00, 01, 04, 09. Grupa *szu* poate fi 161, 164, 169, 256, 361, 364, 369, 496, 641, 644, 649, şi valorile formale 000, 016, 041, 044, 049, 096. De aci soluţiile generale:

| *szu* | 000 | 016 | 041 | 044 | 049 | 096 | 161 | 164 | 169 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N | $100n$ | $500n \pm 4$ | $250n \pm 71$ | $500n \pm 138$ | $250n \pm 7$ | $500n \pm 64$ | $250n \pm 119$ | $500n \pm 142$ | $250n \pm 13$ |
| *szu* | 256 | 361 | 364 | 369 | 496 | 641 | 644 | 649 | 816 |
| N | $500n \pm 16$ | $250n \pm 19$ | $500n \pm 58$ | $250n \pm 37$ | $500n \pm 136$ | $250n \pm 121$ | $500n \pm 238$ | $250n \pm 93$ | $500n \pm 104$ |

In cazul lui $32 < N < 100$, găsim cele 5 soluţii ale problemei 3801, date la pagina 271 din Anul XXXV.

2. *Problema 667 din Revista Matematică din Timişoara,* propusă de D-l GH. CONSTANTINESCU în Anul VIII, pag. 134:

*Să se găsească numerele ale căror patrate se termină cu 444441.*

Numerele terminate cu 441 sunt de forma $250n \pm 21$.

Din numerele, de această formă, până la 2500 nu se termină cu 4441 decât $771^2 = 594441$ şi $2021^2 = 4084441$. Au fost de încercat 20 numere. Reese de aci că numerele de forma $5000n \pm 771$ şi $5000n \pm 2021$ au patratele terminate cu 4441. Ridic la patrat toate numerele de această formă pânăla 25000 şi găsim soluţiile:

$$24229^2 = 587044441 \quad \text{şi} \quad 17979^2 = 323244441.$$

Soluţiile generale sunt:

$$5000n \pm 24229 \quad \text{şi} \quad 5000n \pm 17979.$$

In fine, pentru a găsi patratele terminate cu 444441, vom ridica la patrat numerele de această formă până la 25000 şi găsim pe 82021 şi 165771, care se termină la patrat cu 444441. Soluţiile căutate sunt :

$$5 \cdot 10^5 n \pm 17571 \quad \text{şi} \quad 5 \cdot 10^5 n \pm 82021.$$

Găsirea soluţiei a cerut ridicarea la patrat a 60 numere.

Ion V. Mătieş
Profesor la Blaj.

## NOTE MATEMATICE

34. *Asupra triunghiurilor* $(\Delta)_0$. Reamintim că am însemnat cu $(\Delta)_0$ un triunghiu ABC cu ale cărui laturi $a > b > c$, putem construi triunghiul de laturi $1/a$, $1/b$, $1/c$.

In cele ce urmează voiu stabili două clase generale de triunghiuri având laturile formate din elementele unui triunghiu dat ABC, clase ce stau în strânsă legătură cu triunghiul de origină dat.

Să considerăm cantităţile :

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = ab & ; & \beta_1 = ac \quad ; \quad \gamma_1 = bc \\ \alpha_2 = a^2bc & ; & \beta_2 = ab^2c \quad ; \quad \gamma_2 = abc^2 \\ \alpha_3 = a^3b^3c^2 & ; & \beta_3 = a^3b^2c^3 \quad ; \quad \gamma_3 = a^2b^3c^3 \\ \alpha_4 = a^6b^5c^5 & ; & \beta_4 = a^5b^6c^5 \quad ; \quad \gamma_4 = a^5b^5c^6 \\ \vdots & & \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}$$

cari se obţin după legea :

$$\alpha_k = \alpha_{k-1}\beta_{k-1} \quad ; \quad \beta_k = \alpha_{k-1}\gamma_{k-1} \quad ; \quad \gamma_k = \beta_{k-1}\gamma_{k-1}.$$

Observăm că forma generală a exponenţilor lui $a$, $b$ şi $c$ depinde de aceia a exponentului lui $a$ intrând în egalităţile $\alpha$.

Urmărind legea de formare a acestui exponent găsim expresiunea :

$$\frac{2^{2n+1}+1}{3}$$

pentru un $\alpha$ de forma $\alpha_{2k-1}$ şi expresiunea:

$$\frac{2^{2(n+1)}+2}{3}$$

pentru forma: $\alpha_{2k}$.

Astfel pentru $n=4$ vom avea:

$$\alpha_{2l-1}=a^{171}b^{171}c^{170}\ ;\ \beta_{2l-1}=a^{171}b^{170}c^{171}\ ;\ \text{etc.}\ldots$$

$$\alpha_{2l}=a^{342}b^{341}c^{341}\ ;\ \beta_{2l}=a^{341}b^{342}c^{341}\ ;\ \text{etc.}\ldots$$

Rezultatele de până aci m'au condus să consider cantităţile şi mai generale:

(I) $\alpha_p=a^m b^m c^{m-1}\ ;\ \beta_p=a^m b^{m-1}c^m\ ;\ \gamma_p=a^{m-1}b^m c^m$

(II) $\alpha_{p+1}=a^q b^{q-1}c^{q-1}\ ;\ \beta_{p+1}=a^{q-1}b^q c^{q-1}\ ;\ \gamma_{p+1}=a^{q-1}b^{q-1}c^q$

Problemele ce le pun sunt următoarele:

Cu cele trei cantităţi: $\alpha_p$, $\beta_p$ şi $\gamma_p$, considerându-le drept laturi ale unui triunghiu se poate construi un triunghiu, oricare ar fi $m$? Idem cu $\alpha_{p+1}$, $\beta_{p+1}$ şi $\gamma_{p+1}$, pentru oricare ar fi $q$?

Când aceste triunghiuri — dacă ele se pot construi — sunt nişte triunghiuri $(\Delta)_0$?

Pentru a da răspunsurile relative la construcţiuni, se va aplica condiţiunea cunoscută adică latura cea mai mare să fie mai mică decât suma celorlalte două, iar pentru a verifica dacă sunt triunghiuri $(\Delta)_0$ se va aplica condiţiunea de inversiune stabilită în articolul «Triunghiuri de laturi inverse».

Rezultatele ce le găsim se interpretează astfel:

1°. *Triunghiurile de laturi* $\alpha_p > \beta_p > \gamma_p$, *(aparţinând clasei I) nu se pot construi decât dacă triunghiul* ABC *este un triunghiu* $(\Delta)_0$ *pe când cu laturile* $\alpha_{p+1} > \beta_{p+1} > \gamma_{p+1}$ *putem totdeauna construi triunghiuri (aparţinând clasei II) oricare ar fi triunghiul dat* ABC.

2°. *Dacă triunghiul* ABC *este un triunghiu* $(\Delta)_0$ *atunci şi triunghiurile aparţinând celor două clase de mai sus sunt triunghiuri* $(\Delta)_0$.

Referindu-ne acum la condiţiunile de asemănare găsim:

3°. *Triunghiurile aparţinând clasei (I) sunt asemenea între ele şi asemenea cu triunghiul* $\Delta_0$ *(triunghiuri de laturi inverse) al triunghiului* ABC.

4°. *Triunghiurile aparţinând clasei (II) sunt asemenea între ele şi asemenea cu triunghiul* ABC, *dat.*

5°. *Două triunghiuri aparţinând la clase diferite, nu sunt asemenea decât în cazul când triunghiul* ABC *este echilateral sau geometric progresiv* ($b^2 = ac$).

Aceste propoziţiuni se pot demonstra cu multă uşurinţă, fiind suficient a scrie condiţiunile de asemănare.

Vom reveni şi cu altă ocazie asupra acestor triunghiuri.

CĂPITAN GH. NICULESCU.

35*. *Câteva teoreme ale lui* ARCHIMEDE. Incidental mi-a căzut în mână câteva file, probabil din o revistă veche din Ungaria, cu litere şi hârtie veche, în care erau nişte teoreme ale lui ARCHIMEDE, pe care găsesc interesant a le aduce la cunoştinţa liceenilor noştri.

a) *Se consideră un triunghiu* ABC *dreptunghic în* B. *Se descriu semicercurile* $C_1$, $C_2$, $C_3$ *de diametre* AC, AD, DC *şi cercul de diametru* BD, *unde* D *este piciorul înălţimii din* B. *Fie* Γ *ultimul cerc. Aria închisă de semicercurile* $C_1$, $C_2$, $C_3$ *este egală cu aria cercului* Γ. (Fig. 1).

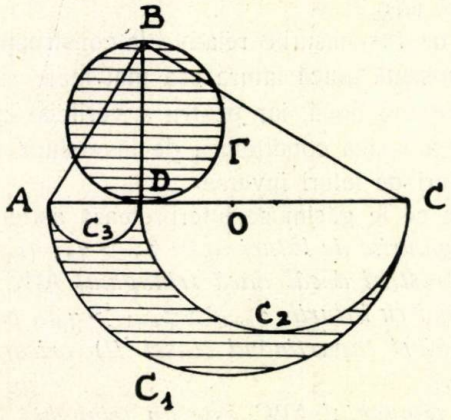



Fig. 1.

Fie $AC = b$, $AD = x$, $CD = y$, $BD = h$, şi A aria de care e vorba. Avem:

$$A = \frac{\pi b^2}{8} - \frac{\pi x^2}{8} - \frac{\pi y^2}{8} = \frac{\pi(b^2 - x^2 - y^2)}{8}.$$

Dar:

$$x + y = b, \quad \therefore \quad x^2 + y^2 = b^2 - 2xy = b^2 - h^2.$$

Inlocuind găsim:

$$A = \frac{\pi h^2}{4},$$

care e chiar aria cercului.

Această figură a fost numită de greci ARBELUS.

b) *Prelungind coarda* AB *a unui cerc cu o mărime* BC = r *raza cercului şi unind punctul* C *cu centrul* O *al cercului până ce taie cercul în* D *şi* E, *atunci arcul de cerc* BE *este* $\frac{1}{3}$ *Arc* AD.

Triunghiu OBC fiind isoscel, dacă unghiul BOE este $\alpha$ şi BCO este $\alpha$. Triunghiul AOB fiind isoscel, unghiurile din A şi B sunt egale şi cum acesta din urmă este exterior triunghiului OBC, reese că ele au valoarea $2\alpha$. Unghiul AOD fiind exterior triunghiului AOC, el va avea valoarea $3\alpha$. Deci arc AD = 3 arc BE.

De aci reese un mijloc de a împărţi, prin încercări, un unghiu în 3 părţi egale. Dacă se dă arcul AD ce corespunde unghiului AOD, ducem diametrul DPA prelungit dincolo de cerc şi prin A o dreaptă AMC până la acest diametru aşa ca partea ei exterioară să fie cât raza cercului. Unghiul BOC = $\frac{1}{3}$AOD. Sunt aparate trisectoare bazate pe această teoremă.

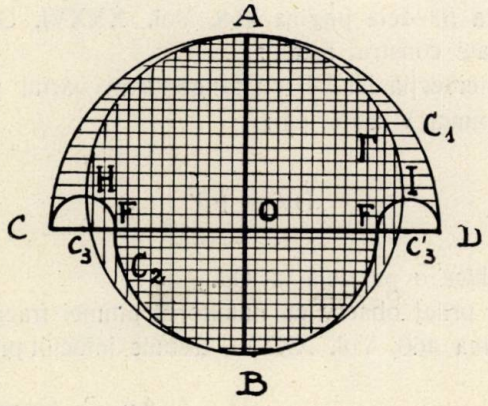



Fig. 2.

c) *Se consideră un semicerc* $C_1$ *de raza* OA $< \frac{1}{4}$ *şi alt semicerc concentric* $C_2$ *de raza* OB = r, *având diametrele* CD, EF

*confundate. Se consideră apoi semicercurile* $C_3$ *şi* $C_3'$ *de diametre* CE = FD *construite în interiorul cercului* $C_1$ *şi în fine cercul de diametru* AB = R + r, *care taie cercurile* $C_3$ *şi* $C_3'$ *în punctele* H *şi* I. *(Fig. 2). Aria figurii, — numită* SALINON, *— închisă de arcele de cercuri* ACHEBFIDA *este egală cu aria cercului de diametru* AB.

Fie A aria salinonului. Vom avea:

$$A = \tfrac{1}{2}\pi R^2 + \tfrac{1}{2}\pi r^2 - 2 \cdot \tfrac{1}{2}\pi \frac{(R-r)^2}{4} = \pi \frac{(R+r)^2}{4},$$

şi teorema este dovedită.

Cuvântul *salinon* derivă, după unii dela cuvântul grec σάλος care însemnează valurile mării, căci figura seamănă cu valurile unei mări, iar după alţii ar veni dela cuvântul grec σέλιδοδ, plantă care are frunzele ca în figura salinonului.

IULIU DEAC.

36. *Asupra problemei 2809 generalizată.* Asimptota la cubica studiată în nota 53 dela pagina 458, Vol. XXXVI, *Gazeta Matematică,* se poate construi astfel:

Fie P' intersecţia lui DF cu tangenta în vârful parabolei. Se ia pe FD un punct V astfel ca:

$$\overline{DV} = \overline{FP'}$$

şi prin V se duce o paralelă la O*d*.

Cu acest prilej observ că numitorul ultimei fracţii din primul rând dela pagina 460, Vol. XXXVI, trebuie înlocuit prin $m(\beta - b)$.

AD. C. GHEORGHIU.

# CHESTIUNI DE EXAMEN

## UNIVERSITATEA DIN CLUJ, FACULTATEA DE ŞTIINŢE

### Secţiunea Matematici

*Chestiuni de examen în sesiunea Octombrie 1931*

### ANUL II

### I. ANALIZA MATEMATICĂ p. I

*Proba teoretică*

Se dă funcţiunea $y$ de $x$ definită prin ecuaţia

$$2\,(1 - y^2)\,(\cos^4 x + \sin^4 x) = \sin^2 2x$$

şi prin condiţia că pentru $x = 0$ să avem $y = 1$ ; şi se cere :

I. 1°. Să se determine extremele acestei funcţiuni.

2°. Să se calculeze aria cuprinsă între curba care reprezintă această funcţiune şi între axa $Ox$, dela $x = 0$ până la $x = \frac{3\pi}{4}$.

II. Să se calculeze integrala corespunzătoare.

1°. Direct, cu ajutorul funcţiunilor trigonometrice.

2°. Prin schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$.

*Proba practică*

Se dă cuadrica

$$z = (x + y)^2 + (1 + x)$$

şi se cere să se caute :

1°. Dacă suprafaţa este desfăşurabilă sau nu ?

2°. Liniile asimptotice.

3°. Liniile de curbură.

### II. MECANICĂ RAŢIONALĂ p. I

*Proba teoretică*

Un punct greu se mişcă fără frecare pe arcul de cicloidă BOA.

$$x = R\,(\theta + \sin\theta)$$

$$y = R\,(1 - \cos\theta)$$

situat în planul vertical.

1°. Să se construiască cicloida, cercul generator şi să se dea interpretarea geometrică parametrului $\theta$.

2°. Presupunând că la momentul iniţial mobilul este abandonat în A, se cere să se determine viteza mobilului, în momentul $t$. Să se arate că viteza în M este egală cu proecţia vitezei mobilului în O pe tangenta în M la cicloidă.

3°. Să se calculeze timpul în care mobilul parcurge arcul AM.

4°. Să se determine presiunea punctului M pe cicloidă şi să se demonstreze că este egală cu dublul proecţiei greutăţii $mg$ pe normala la cicloidă.

5°. Să se arate că acceleraţia lui M este constantă şi dirijată către centrul cercului generator.

*Proba practică*

Un punct M descrie traectoria

$$x = R\,(2\cos\varphi + \cos 2\varphi)$$
$$y = R\,(2\sin\varphi + \sin 2\varphi)$$

după legea ariilor.

1°. Să se demonstreze că:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{k}{12\,R^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

2°. Să se demonstreze că viteza e dată de formula:

$$v = \frac{k}{3\,R\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

3°. Să se demonstreze că acceleraţia e dată de formula:

$$\gamma = \frac{k^2}{72\,R^3}\,\frac{\sqrt{1+8\cos^2\frac{\varphi}{2}}}{\cos^4\frac{\varphi}{2}}.$$

4°. Să se arate că raza de curbură este:

$$\varsigma = \frac{8}{3}\,R\cos\frac{\varphi}{2}.$$

## III. ASTRONOMIE

*Proba teoretică*

Ştiind că în anul 1931, o stea $\sigma$ are latitudinea 41°28′17″ şi longitudinea 56°44′39″, se cere să se calculeze ascensiunea dreaptă şi declinaţia acestei stele în anul 2500, ţinându-se seamă numai de mişcarea uniformă a precesiei polului, care se face în 25.800 de ani, pe un cerc cu o rază sferică de 23°27″.

*Proba practică*

Să se calculeze anomalia excentrică şi anomalia mijlocie a unei planete, ştiind că anomalia adevărată este 123°37'15" şi că excentricitatea orbitei are valoarea 0,0167595.

## ANUL III

### I. ANALIZA MATEMATICĂ p. II

*Proba teoretică*

Se consideră o curbă $\gamma$ de ecuaţie $y = f(x)$ şi fie C centrul de curbură corespunzător punctului M depe curbă, N intersecţia normalei cu axa $Ox$.

1°. Să se formeze ecuaţia diferenţială pe care trebuie s'o satisfacă $y = f(x)$ pentruca să avem $\overline{MC} = k \cdot \overline{MN}$.

2°. Să se integreze ecuaţia diferenţială reducând la o singură cuadratură.

3°. Să se integreze în cazul particular $k = 1$, $k = -1$ $k = 2$ arătând că curbele corespunzătoare sunt cercuri pentru $k = 1$, lanţuri pentru $k = -1$ şi cicloide de bară $Ox$ pentru $k = 2$.

*Proba practică*

Să se găsească suprafeţele pentru care dreapta, care uneşte originea coordonatelor cu punctul unde normala întâlneşte planul $xOy$, este perpendiculară pe normală.

### II. MECANICA RAŢIONALĂ p. II

*Proba teoretică*

Se consideră o bară OA foarte subţire, de lungime $2l$, situată în planul $xOy$ şi care se poate roti în jurul punctului O. Bara este omogenă şi densitatea în punctul M la distanţa $r$ de O este

$$\varsigma = \frac{\alpha}{l^2} r (2l - r).$$

Fiecare element al barei este atras de punctul P $(a, O)$ cu o forţă egală în intensitate cu $\omega^2 MP dm$, M fiind poziţia elementului şi $dm$ massa lui.

1°. Să se determine mişcarea barei.

2°. Presupunând că $a = \frac{3l}{5}$, că la momentul iniţial bara este perpendiculară pe OP, că bara are tendinţa să cadă în partea în care unghiul $\theta$, pe care îl face cu axa $Ox$, creşte şi că viteza unghiulară iniţială este $\omega$, să se integreze complet ecuaţia mişcării calculând pe $\theta$ în funcţie de timp.

*Proba practică*

Să se afle momentul de inerție al sfertului de cerc AOB de rază R în raport cu dreapta AB.

## III. GEOMETRIE INFINITEZIMALĂ

Fiind dat un unghiu $xOy$, se consideră pe laturile $Ox$ și $Oy$ punctele variabile A și B, astfel ca $AB = l = \text{const.}$ Perpendicularele în A și B pe $Ox$ și $Oy$ se taie în I. Să se arate că locul punctului I este un cerc cu centrul O.

Să se aplice acest rezultat la următoarea problemă:

Un segment AB de lungime constantă se sprijină cu extremitățile A și B pe două curbe (A) și (B). Normalele în A și B la aceste curbe se taie în I. Să se afle tangenta în I la curba descrisă de punctul I.

## IV. TEORIA FUNCȚIILOR

*Proba teoretică*

A) Se dă funcția de $z$

$$f(z) = \operatorname{tg} z - 5 \operatorname{cotg} z.$$

1°. Să se arate că ecuația

$$\operatorname{tg} z - 5 \operatorname{cotg} z = \alpha \qquad (1)$$

are o infinitate de rădăcini simple oricare ar fi cantitatea $\alpha$; se va observa că aceste rădăcini aparțin respectiv la două șiruri infinite și că există două valori particulare $\alpha_1$ și $\alpha_2$ ale lui $\alpha$, pentru care câte unul din aceste șiruri de rădăcini ale ecuației (1) încetează de a mai exista.

2°. Să se indice valorile $\alpha_1$ și $\alpha_2$.

3°. Să se determine poziția și natura punctelor singulare ale funcției $f(z)$ și să se calculeze reziduriile respective. Apoi să se dea valoarea integralei $\int_\Gamma f(z)\,dz$, luată dealungul unui cerc $\Gamma$ de rază 3, cu centrul în origine.

4°. Să se arate că atunci când $z$ ia valori pur imaginare (de forma $iy$) care cresc indefinit în modul, valoarea lui $f(z)$ tinde respectiv către valorile $\alpha_1$ și $\alpha_2$.

B. Se dă o funcție $\varphi(z)$, olomorfă într'o coroană excentrică limitată de un cerc $\Gamma$ de centru $a$, și de alt cerc $\gamma$ cu centrul în $b$, în întregime interior celui dintâiu.

1°. Să se stabilească, prin analogie cu cele știute despre seria LAURENT, o formulă care dă pe $f(z)$ sub formă de serie procedând după puterile întregi pozitive ale lui $(z - a)$, precum și după puterile întregi negative ale lui $(z - b)$, desvoltarea fiind valabilă în orice punct al coroanei indicate. Se va da expresia coeficienților acestei desvoltări, sub forma de integrale.

2°. Să se deducă o desvoltare a funcţiei $\frac{4}{z(z^2+4)}$ valabilă în spaţiul cuprins între cercurile

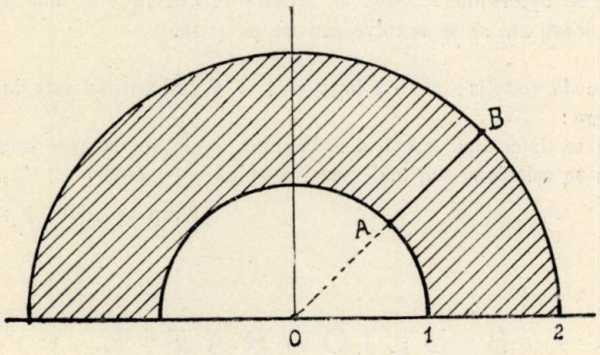
$$\begin{cases} \Gamma \text{ de rază 2, centrul în O.} \\ \gamma \text{ de rază 1, centrul în } +1. \end{cases}$$

*Proba practică*

A) 1°. Să se determine domeniul (C) pe care transformarea

$$Z = z + \frac{1}{z}$$

îl face să corespundă domeniului (C), constând dintr'o semi-coroană circulară de raze 1 şi 2, cu centrul în origină.




2°. În ce curbă se transformă un segment de rază AB ?

3°. Să se arate că la un punct din (C) corespunde un singur punct în (C), prin reducere la absurd.

B) Să se calculeze integrala definită

$$\int_0^{\infty} \frac{(x^2-1)\,dx}{x^4+11\,x^2+18}$$

prin metoda rezidiurilor.

ŞCOALA POLITECHNICĂ «REGELE CAROL II» DIN BUCUREŞTI

*Concurs de Admitere în Ciclul I*

15 Octomvrie 1931

## ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

I. Să se studieze variaţia funcţiunei:

$$y = \mathrm{L}(x+3) + \frac{x^2 + 6x - 6}{2(x^2 + 2x - 3)}$$

şi să se reprezinte grafic această variaţie. (Logaritmul este luat în bază $e$).

II. Fiind dată ecuaţia:

$$\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + \lambda \cos 2\theta + 13\cos\theta + \lambda = 0$$

se ia ca necunoscută $x = \cos\theta$. Se cere:

1° Să se formeze ecuaţia în $x$ ce se obţine din ecuaţia dată.

2° Să se determine $\lambda$ astfel ca această ecuaţie în $x$ să aibă o rădăcină dublă, şi'n acest caz să se rezolve ecuaţia propusă.

III. Se dă ecuaţia: $x^2 - 2\log x - 4 = 0$ (logaritmul este luat în baza zece). Se cere:

1° Să se determine numărul rădăcinilor reale ale acestei ecuaţii.

2° Să se calculeze cea mai mare rădăcină cu o eroare $< {}^1/_{100}$.

(Timp acordat: 4 ore).

# BIBLIOGRAFIE

**Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine.** Anul XIV. No. 9 — 10. Bucureşti 1931. E. ABASON. Sur la moyenne des fonctions paraboliques.

**Idem.** No. 1 — 2. Anul XV. Bucureşti 1932.

**Bulletin of the American Mathematical Society.** Anul XXXVIII, No. 4. Aprilie 1932. New-York. Calculul variaţiunilor şi teoria cuantelor, de G. A. BLISS. Mecanica statistică şi a doua lege a termodinamicei, de P. W. BRIGMANN. Notă asupra automorfismului diofantin, de L. CARLITZ. Asupra unui operator-matrice diferenţială, de A. K. MITCHELL. Soluţiunile cu variaţiuni limitate ale ecuaţiei integrale *Fredholm-Stieltjes*, de L. J. PARADISO Asupra determinan-

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII"

ţilor reali simetrici ale căror elemente de pe diagonala principală sunt zero, de W. V. PARKER. Asupra gradului de generalitate a unei clase de identităţi aritmetice, de E. T. BELL. Asupra problemei momentului pentru un interval finit, de T. H. HILDEBRANDT. Nou automorfism diofantin, de L. CARLITZ. Notă asupra ecuaţiii diofantine $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$, de L. J. MORDELL. Notă asupra aplicaţiunii geometriii metrice la determinanţi, de L. M. BLUMENTHAL. Interpolarea polinomială a funcţiunilor analitice cu singularităţi, de J. L. WALSH. Studii analitice a suprafeţelor raţionale cuintice ne având curbe multiple, de H. N. HUBBS. Sistem anex în problema lui MAYER sub condiţiuni generale finale, de S. B. MYERS.

**Mathesis.** Tomul XLIV. No. 4. Aprilie 1932. Gembloux. Probabilitatea cumulativă, de C. LURQUIN. Curiositate aritmetică, de G. I. LAMBERT. Asupra construcţiunii centrelor de gravitate ale arcelor de epi- şi hipocicloide, de R. GOORMAGHTIGH. Asupra unor reciprocităţi ale spaţiului, de J. VANDERBERGHE. Exerciţii de geometrie infinitesimală, de D-ra BERTHE UMÉ. Drepte şi plane divizând în acelaş raport segmente date, de R. DEAUX. Asupra tetraedrului ortocentric, de V. THÉBAULT. Asupra schimbărilor de axe coordonate în geometria analitică plană, de AD. M.

**Anales de la Sociedad Cientifica Argentina.** Tomul CXIII. Fascicola III. Martie 1932. Buenos Aires. Calculul azimuturilor liniilor geodezice şi table conexe pentru uzul inginerilor, de J. ARAMBURO. Note biografice asupra inginerului ARAMBURO. Asupra sumabilităţii absolute a integralelor divergente prin metoda lui CESARO, de J. C. VIGNAUX. Asupra transformării generalizată a lui LAPLACE, de J. C. VIGNAUX.

**Boletin Matematico.** Anul V. No. 2. Aprilie 1932. Buenos Aires. Sisteme de succesiuni de termeni lineari şi recurenţi omogeni, de B. I. BAIDAFF. Exercitarea metematică, de B. I. BAIDAFF.

**Boletin Matematico Elemental.** Anul I. No. 6. August 1930. Buenos Aires. O descompunere interesantă a dodecagonului, de M. KRAÏTCHIK.

**Idem.** Anul I. No. 8. Octombrie 1930. Noui progrese. O soluţie instructivă de B. I. B.

**Idem.** Anul III. No. 1. Martie 1932. Relativ la chestiunea 327, de D. BUSTAMANTE.

**Idem.** No. 2. Aprilie 1932. Procedeu rapid şi uşor de a rezolva grafic o ecuaţie de gradul II, de F. ANGUITA.

**Journal de mathematiques elementaires.** Anul 56. No. 14. Aprilie 1932. Paris. Geometria compasului: nouă soluţie a problemei intersecţiunii a două drepte, de M. HUSSENOT.

**Idem.** No. 15. Mai 1932. Paris.

**Idem.** No. 16. Mai 1932.

**Revista Ştiinţifică „V. Adamachi".** Volumul XVIII. No. 1. Martie 1932. Iaşi.

**Revista matematică din Timişoara.** Anul XII, No. 3. Mai 1932. Timişoara. Metodă pentru determinarea centrelor de greutate, de D. V. Ionescu.

**Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II" Bucarest.** Anul III (1931—1932). No. 1. Bucureşti 1932. Sur le calcul des certaines intégrales définies, par G. Calugareano. Quelques théorèmes d'inversion relatifs aux intégrales et aux séries, par J. Karamata. Notice sur une méthode analitique et graphique pour l'analyse des harmoniques des fonctions périodiques, par E. Abason. Les propriétés électro-cinétiques du carbon colloïde, par E. Chirnoaga. Etudes sur l'inversion du sucre, par E. Toporesco. Un problème d'équilibre élastique, par N. Teodoresco. Contribution à l'étude des spectres hydrodynamiques, par D. Pavel. Notice sur le calcul symbolique de Heaveside, par J. Constantinesco. Contribution à l'étude des rédrésseurs éléctrolityques, par M. Marinesco. La méthode dans l'économie politique, par M. Manoïlesco.

G. Sudan. *Zur Jacobsthalschen transfiniten Arithmetik.* (Extras din *Mathematischen Annalen*). Berlin 1931,

G. Sudan. *Sur un théorème de Hessenberg.* (Extras din *Fundamenta mathematicae*). Varşovia 1932.

M. Ghermanesco. *Sur les fonctions n-métaharmoniques.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*). Paris. Septemvrie 1931.

M. Ghermanesco. *Sur les solutions fondamentales de l'équation n-métaharmonique.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*). Paris. Octomvrie 1931.

M. Ghermanesco. *Sur les moyennes successives d'une fonction métaharmonique.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*). Paris. Noemvrie 1931.

M. Ghermanesco. *Sur certains systèmes linéaires d'équations aux dérivés partielles du type elliptique.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*). Paris. Fevruarie 1932.

M. GHERMANESCO. *Sur les fonctions n-métaharmoniques.* (Extras din *Rendinconti della R. Accademia nazionale dei Lincei*). Roma 1931.

M. GHERMANESCO. *Sur un complexe quadratique de droites.* (Extras din *Buletinul Facultății de științe din Cernăuți*). Cernăuți 1932.

SPIRIDON GHIȚESCU. *Problema lui Bayess.* Tipografia Librăriilor I. Călinescu. Buzău.

C. C. TEODORESCU. *Calculul probabilităților aplicat în industrie.* Publicația No. 19 a Institutului național român pentru studiul amenajării și folosirii isvoarelor de energie. Monografii technice. (Litografiat). București 1932.

**Buletinul Societății de Matematici a Liceului „Tasse Dumitrescu" din Mizil.** Anul II. 1931—1932. Buzău 1932.

*Conferințe ținute de elevi sub direcțiunea D-lui* V. TEODOREANU, *Profesor:*

I. *Proporționalitatea în geometrie. Conferința elevului* DOBRESCU ȘT, *cl. VII-a Liceul militar, Iași.*

II. *Inmulțirea ambilor membri ai unei ecuații cu aceeaș cantitate. Conferința elevului* CHIRIAC I. CONSTANTIN *cl. VI-a Liceul militar, Iași.*

Tip. „Progresul". Str. Unirea 9, Iași 1932.

D-l V. TEODOREANU a reluat o incercare veche a D-sale, care a dat unele roade bune, de a pune pe elevii meritoși să aprofundeze unele chestiuni de matematici elementare, punându-le la dispoziție cărți și reviste, pentru ca să pregătească unele conferințe spre a le ține în fața D-sale, a colegilor și chiar a persoanelor streine. Mi-amintesc că la o ședință ținută de *Gazeta Matematică* la Iași, am rămas surprinși, cu câtă pregătire, un elev al D-sale, colegul nostru de azi la redacție, D-l COLONEL A. TĂNĂSESCU, ne-a făcut o conferință asupra geometriei neeuclidiane.

In starea actuală de decadență a învățământului matematic în licee, prin reducerea programelor sub nivelul de acum 100 ani și a rezultatelor slabe ce dă acest învățământ (vorbesc aci și ca examinator de aritmetică, în ultimii trei ani, pentru concursul de admisiune în anul preparator al Școalei Politechnice „Regele Carol II" din București), măsura luată de D-l V. TEODOREANU nu poate decât să fie folositoare. Bine înțeles însă că chestiunile nu trebuie să depășească puterile elevilor meritoși. Așa se pare a fi cu prima chestiune, la care se vede că elevul ȘT. DOBRESCU a muncit mult, dar nu pare să-și fi putut asimila chestiunile cu toate subtilitățile lor.

Prima conferință, avea în adevăr de scop să dovedească că în geometria elementară ar fi de folos, pentru demonstrarea unui număr mare de propoziții, să se definească proporționalitatea astfel: «*două mărimi se zic direct proporționale când acele mărimi se corespund atât în egalitate cât și în sumă*». Era chestiunea să se arate că această definițiune duce la acelaș rezultat ca și definițiunea clasică din aritmetică a egalității a două rapoarte.

Mai întâiu definiţia de mai sus nu se poate pricepe fără desvoltări mari. Am întrebat pe mai mulţi absolvenţi de liceu *cum sunt două mărimi care se corespund atât în egalitate cât şi în sumă?* şi nici unul nu mi-a răspuns că sunt proporţionale! Conferenţiarul şi-a dat osteneala să arate echivalenţa celor două definiţiuni, dar expunerea nu e clară. Astfel găsim că *«toate propoziţiile echivalente cu o definiţiune sunt definiţii ale aceluiaş lucru»*, în care se face confuzie între definiţiuni şi propoziţiuni. Definiţiunea e de altfel supraabondentă şi nu se poate şti dacă nu conţine contradicţiuni. In adevăr, dacă $f(x)$ e o funcţiune continuă şi dacă avem $f(x+y)=f(x)+f(y)$, pentru orice valori ale lui $x$ şi $y$, se demonstrează că $f(x)=ax$, $a$ fiind o constantă, adică funcţiunea e proporţională cu variabila.

La pag. 6 se dă un exemplu care pare că ar contrazice acest lucru, căci se caută a se arăta acolo, pe un exemplu, că poate fi corespondenţă la sumă fără a fi la egalitate, dar aceasta se datoreşte cazului particular examinat Dacă însă, în loc de suma de arce (CD + DE), s'ar lua (CD + EF) acesteia i-ar corespunde o altă sumă, deşi lungimea arcelor e aceeaş. Peste tot trebuia considerate elemente neadiacente pentru a nu se particulariza demonstraţia.

A doua conferinţă avea de scop să arate ce operaţiuni nu sunt permise la rezolvarea ecuaţiilor, spre a nu se pierde, sau introduce, soluţiuni. Tratarea, deşi nu este complet riguroasă, — şi nici nu trebuie totdeauna să se caute prea multă rigoare în matematicile de liceu, — este bine făcută, cu exemple bine alese. Paradoxurile algebrice puse la finele conferinţei ilustrează bine erorile care se pot face la rezolvarea de ecuaţii, dacă se fac operaţiuni nepermise la transformarea lor.

In rezumat, măsura luată de D-l V. Teodoreanu e de natură să ridice nivelul matematicilor în şcolile secundare, mult mai mult decât scoaterea de reviste şcolare, iar elevii cari muncesc pentru studiarea conferinţelor îşi vor vedea mai târziu munca lor cu prisos răsplătită.

I. Ionescu.

## CERERI

218. *Răspuns la cererea 195.* In *Gazeta Matematică* No. 2, Anul XX pag. 55, Grigorie Makarie publică un articol intitulat: *„Metoda pentru calculul cu înlesnire al rădăcinilor patrate"*.

Această metodă se bazează pe utilizarea tablelor Claudel, care conţin patratele perfecte de 7 şi de 8 cifre ale numerelor întregi dela 1000 la 9999 inclusiv.

M. Margulius.

## DIVERSE

*Asociaţiunea franceză pentru înaintarea ştiinţelor* fuzionată cu *Asociaţiunea ştiinţifică din Franţa* va ţine Congresul său anual la Bruxelles. D-l AD. MINEUR, Profesor la Facultatea de ştiinţe din Bruxelles, ca preşedinte al Secţii I (Matematici), a pus la ordinea zilei: Teoria numerelor, Calculul probabilităţilor, Geometria infinitezimală şi Geometria proiectivă. Doritorii de a trimite comunicări (cel mult 3 pagini) se pot adresa la Secretariat, Rue Serpente 28, Paris VI.

*Al doilea Congres al Matematicianilor Români* s'a ţinut la Turnu-Severin în zilele de 5—9 Mai. Au fost aleşi Preşedinţi D-nii G. ŢIŢEICA şi D. POMPEIU, şi secretar general D-l P. SERGESCU.

Societatea română de ştiinţe, Secţiunea matematică, a ţinut şedinţă în seara zilei de 16 Mai, când D-l A. ANGELESCU a vorbit asupra unor proprietăţi ale momentelor de un ordin oarecare şi D-l N. CIORĂNESCU asupra definiţii funcţionale a sinusului şi cosinusului.

## PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1364.[1]) *Să se găsească numai cu compasul diametrul unei bare cilindrice cu capete rupte neregulat.*

I. IONESCU.

Aşezăm cilindrul dat C pe un plan P. Dintr'un punct M, luat pe C, cu o deschidere mai mare de compas, descrim un cerc în planul P. Pe acest cerc luăm trei puncte A, B, C şi căutăm în acest plan centrul O al cercului ce trece prin aceste trei puncte. Punctul O va fi proecţiunea lui M pe planul P căci oblicele MA, MB, MC sunt egale, ca şi în razele OA, OB, OC.

Din M şi O cu aceiaş rază descrim două arce pe suprafaţa cilindrului C care se vor tăia în punctul R. Cu altă deschidere de compas vom determina un alt punct S în aceleaşi condiţiuni. Punctele R şi S fiind egal depărtate de M şi O se vor găsi pe planul Q, perpendicular pe mijlocul lui OM. Dar şi planul P este perpendicular pe MO. De aci reese că planul Q este paralel cu P şi deci cu axa cilindrului. Conchidem deci că planul Q intersectează

[1]) A se vedea şi anul XXXVI pag. 102, 221, 302.

cilindrul C după o generatoare. Unind dar pe R şi S pe cilindru prin o dreaptă aceasta ar fi o generatoare a cilindrului.

Problema se rezolvă acum imediat. Din punctele R şi S, cu o aceiaş deschidere de compas, descrim arce care se taie pe cilindru în punctul E. Cu altă deschidere de compas determinăm, în aceleaşi condiţiuni, un alt punct F şi apoi un al treilea G. Punctele E, F, G fiind egal depărtate de R şi S se găsesc într'un plan perpendicular pe dreapta RS, şi cum RS e paralelă cu axa cilindrului, planul acesta va fi un plan normal, dus în cilindru. Intersecţiunea lui cu cilindru este deci o secţiune dreaptă a acestuia, adică un cerc. Putem construi în mărime acest cerc pe un plan construind un triunghiu cu laturile cât EF, FG, GE şi circumscriind un cerc acestui triunghiu. Diametrul acestui cerc va fi aşa dar diametrul cilindrului.

Toate construcţiunile pe cari le-am făcut pe cilindru sunt executate cu compasul. Se ştie apoi că se poate afla, numai cu compasul, centrul unui cerc ce trece prin trei puncte date. Diametrul cercului, fiind dublul razei, se poate obţine înscriind în cerc un exagon regulat la care depărtarea a două vârfuri opuse este diametrul căutat.

Dacă cilindrul e greu, metoda dă rezultate bune căci cilindrul nu se mişcă pe plan, altfel el alunecă sub presiunea compasului. Punctul M trebuie ales cât mai mult pe partea laterală a cilindrului pentru ca proiecţia O să nu fie băgată sub cilindru şi să incomodeze construcţiunile. O condiţie esenţială este, bine înţeles, ca cilindrul să rămâie fix pe plan până se determină punctele R şi S.

N. PATRAULEA
Clasa VI Liceul militar
„Niculae Filipescu".

*Notă.*

Asupra acestei soluţiuni am de făcut aceiaş observaţiune ca şi la cea dată în Anul XXXVI, pag. 221, şi anume că ea nu se face numai cu compasul, ci şi cu un alt instrument, *planul material* P, sau *marmura*. De altfel această soluţiune diferă puţin de cea dată de D-l IULIAN ALEXIU.

I. I.

PROBLEMA 3727. *Să se demonstreze că dacă* $C_p^q$ *reprezintă simbolul combinărilor a* p *obiecte luate câte* q, *atunci suma*

$$\sum_0^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-i)} C_{n-i}^1$$

*se divide prin* $4^{n-1}$.

COL. GH. BUICLIU.

*Soluţie* dată de D-ra: JUSTINA GH. GURĂU, (Studentă Bucureşti) şi de D-nii: H. ST. DĂSCĂLESCU, E. I. DUMITRESCU, GH. TH. GHEORGHIU-GLADIŞ, (Studenţi Bucureşti).

Avem:

$$(x+1)^{2n+1}-(x-1)^{2n+1}=2(C_{2n+1}^1 x^{2n}+C_{2n+1}^3 x^{2n-2}+\ldots+C_{2n+1}^{2n-1}x^2+1).$$

Derivând membrii acestei identităţi în raport cu $x$ se găseşte:

$$(2n+1)\left[(x+1)^{2n}-(x-1)^{2n}\right]=4\left[n\,C_{2n+1}^1 x^{2n-1}\right.$$
$$\left.+(n-1)\,C_{2n+1}^3 x^{2n-3}+\ldots+C_{2n+1}^{2n-1}x\right].$$

Dacă în această identitate se înlocueşte $x$ prin 1 se obţine noua identitate:

$$4\sum_0^{n-i}(n-i)\,C_{2n+1}^{2i+1}=2^{2n}(2n+1)$$

sau ţinând seamă că

$$\alpha=C_\alpha^1 \quad \text{şi} \quad C_\alpha^\beta=C_\alpha^{\alpha-\beta}$$

şi simplificând cu 4, se găseşte identitatea:

$$(1)\qquad \sum_0^{n-1} C_{n-i}^1 C_{2n+1}^{2(n-i)}=4^{n-1}(2n+1)$$

care demonstrează problema. Câtul diviziunei este $2n+1$.

*Notă.* 1°. D-l GH. TH. GHEORGHIU-GLADIŞ a găsit pe aceeaşi cale:

$$(2)\qquad \sum_0^{n} C_{2n+1}^{2(n-i)+1}\ C_{2(n-i)+1}^1=2\,(2n+1)\,4^{n-1}$$

(3) $$\sum_{0}^{n-1} C_{2n}^{2(n-i)} C_{n-i}^{1} = n4^{n-1} \ ;$$

(4) $$\sum_{0}^{n-1} C_{2n}^{2(n-i)+1} C_{2(n-i)+1}^{1} = 2n\,4^{n-1}$$

2°. Apropiind pe (1) de (2) şi pe (3) de (4) se găsesc încă următoarele identităţi interesante :

$$\sum_{0}^{n} C_{2n+1}^{2(n-i)+1} C_{2(n-i)+1}^{1} = 2 \sum_{0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-i)} C_{n-i}^{1}$$

$$2 \sum_{0}^{n-1} C_{2n}^{2(n-i)} C_{n-i}^{1} = \sum_{0}^{n-1} C_{2n}^{2(n-i)+1} C_{2(n-i)+1}^{1} \ .$$

Gh. B.

---

PROBLEMA 3879. *Să se stabilească pentru un triunghiu oarecare identitatea*

$$\Sigma \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(A-B) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(C-B) = 1.$$

G. Mateescu.

*Soluţie* dată de D-nii: M. Velea (Student, Cluj) şi M. Margulius (Lic. Spiru Haret, Bucureşti).

Considerăm identitatea cunoscută (C. P. Algebra IV, 32, G. M. XXX. 419, ş. a.) şi care se verifică uşor

$$\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{c+b}{c-b} + \frac{b+c}{b-c} \cdot \frac{a+c}{a-c} + \frac{c+a}{c-a} \cdot \frac{b+a}{b-a} = 1.$$

Putem scrie succesiv

$$\sum \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} \cdot \frac{\sin C + \sin B}{\sin C - \sin B}$$

$$= \sum \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)\cos \frac{1}{2}(A-B) \cdot \sin \frac{1}{2}(C+B)\cos \frac{1}{2}(C-B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)\cos \frac{1}{2}(A+B) \cdot \sin \frac{1}{2}(C-B)\cos \frac{1}{2}(C+B)} =$$

$$\sum \frac{\cos \frac{1}{2}A}{\sin \frac{1}{2}A} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}C} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(C-B)}{\sin \frac{1}{2}(C-B)}$$

$$= \sum \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(A-B) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(C-B) = 1.$$

c. c. t. d.

Domnii N. N. MIHĂILEANU şi H. P. IONESCU-BISS au înlocuit în identitatea de mai sus valorile $\frac{a+b}{a-b}$, etc., prin acelea scoase din formulele lui NEPER

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a+b}{a-b}, \ldots \text{ etc...}$$

*Notă.*

1. Domnii N. ALDEA, M. VELEA şi N. MIHĂILEANU au observat că o problemă identică a fost propusă anterior de D-l I. C. VASILIU în *Foaia Matematică,* Anul I. No. 6. lunie 1924.

2. Domnii N. ALDEA, A. EM. BĂDESCU, I. C. BOIAN, VL. I. CRIVĂŢ, ROMEO N. DUMITRAŞCU, AD. C GHEORGHIU, C. GH. LUPESCU, EM. MEREUŢĂ, NEGREA A. M. LEONTE, I. PAREPEANU, GH. OPRESCU, CR. I. RÂMNICEANU, M. VELEA, N. N. VELICESCU, TITU G. VELICESCU, s'au servit de formulele

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a+b}{a-b}, \text{ etc.} \ldots$$

pe care înlocuindu-le în relaţia din enunţ au verificat-o.

3. Domnul CORN. N. POPESCU s'a servit de formulele:

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A = \frac{p-a}{r}, \text{ etc.} \ldots \text{ şi } \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{r^2+(p-a)(p-b)}{r(a-b)}, \text{ etc.} \ldots$$

iar D-l E. MILLEA de valorile lui $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}A$ şi $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(A-B)$ în funcţie de laturi pentru a verifica relaţia din enunţ.

COLONEL G. LITEAMU.

---

*PROBLEMA 3932. *Se cere suma:*

$$101 + 21012 + 3210123 + \ldots + n(n-1)\ldots 21012\ldots(n-1)n$$

*unde* $n \leqslant 9$.

C. GEORGESCU.

*Soluţia I-a.*

Insemnăm cu:

$$S_1 = 100 + 21000 + 3210000 + \ldots + n(n-1)\ldots 2100\ldots 0 \quad (n+1)$$

$$= 1 \cdot 10^2 + 21 \cdot 10^3 + 321 \cdot 10^4 + \ldots + [n(n-1)\ldots 21] \cdot 10^{n+1}$$

$$= 10^2 + (2 \cdot 10^4 + 10^3) + (3 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 10^4) + \ldots$$

$$\ldots [n \cdot 10^{2n} + (n-1) \cdot 10^{2n-1} + \ldots + 10^{n+1}].$$

Sau mai putem scrie:

$$\begin{aligned} S_1 = {} & 10^2 \\ & 10^3 + 2 \cdot 10^4 \\ & 10^4 + 2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^6 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & 10^{n+1} + 2 \cdot 10^{n+2} + \ldots + n \cdot 10^{2n}. \end{aligned}$$

Adunând coloanele verticale, avem:

$$S_1 = \frac{10^{n+2} - 10^2}{9} + 2\,\frac{10^{n+3} - 10^4}{9} + \ldots + n \cdot \frac{10^{2n+1} - 10^{2n}}{9}$$

$$= \frac{1}{9}[10^{n+2}(1 + 2 \cdot 10 + \ldots + n \cdot 10^{n-1})]$$

$$- \frac{10^2}{9}[1 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^4 + \ldots + n \cdot 10^{2n-2}].$$

Apoi ştim că:

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

iar prin derivare obţinem:

$$1 + 2x + \ldots + n \cdot x^{n-1} = \frac{n \cdot x^{n+1} - (n+1)\,x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Prin urmare:

$$1 + 2 \cdot 10 + \ldots + n \cdot 10^{n-1} = \frac{n \cdot 10^{n+1} - (n+1)\,10^n + 1}{81}.$$

Deasemenea:

$$1 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^6 + \ldots + n \cdot 10^{2(n-1)}$$
$$= 1 + 10^2 + 10^4 + 10^6 + \ldots + 10^{2(n-1)}$$
$$+ 10^2 + 10^4 + 10^6 + \ldots + 10^{2(n-1)}$$
$$+ 10^4 + 10^6 + \ldots + 10^{2(n-1)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ 10^{2(n-1)}$$

Apoi știm că:

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2(n-1)} = 1 + (x^2)^1 + (x^2)^2$$
$$+ (x^2)^3 + \ldots + (x^2)^{n-1} = \frac{(x^2)^n - 1}{x^2 - 1}$$

deci sumele de mai sus devin:

$$\frac{10^{2n} - 1}{99} + 10^2 \cdot \frac{10^{2(n-1)} - 1}{99} + 10^4 \cdot \frac{10^{2(n-2)} - 1}{99} + \ldots$$
$$\ldots + 10^{2(n-1)} \cdot \frac{10^{2(n-n+1)} - 1}{99}$$
$$= \frac{n \cdot 10^{2n}}{99} - \frac{1}{99}[1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2(n-1)}].$$

Sau devine egală cu:

$$\frac{1}{99}\left[n \cdot 10^{2n} - \frac{10^{2n} - 1}{99}\right].$$

Așa dar:

$$S_1 = \frac{10^2}{9^3}\left[n \cdot 10^{2n+1} - \frac{20}{11}\left(n + \frac{6}{11}\right)10^{2n} + 10^n - \frac{1}{11^2}\right].$$

Vom mai avea deasemenea:

$$S_2 = 1 + 12 + 123 + \ldots + 123 \ldots (n-1)n$$
$$= 1 + (10 + 2) + (10^2 + 2 \cdot 10 + 3) + \ldots$$
$$\ldots + [10^{n-1} + 2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + n]$$

$$= [1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1}]$$
$$+ 2[1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-2}]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ n.$$

Deci mai putem scrie :

$$S_2 = \frac{10^n - 1}{9} + 2 \cdot \frac{10^{n-1} - 1}{9} + \ldots + n \cdot \frac{10^{n-(n-1)} - 1}{9}$$

$$= \frac{1}{9}[(10^n + 2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + n \cdot 10) - (1 + 2 + \ldots + n)].$$

Dar prima paranteză mică se mai poate scrie :

$$\frac{10^{n+1} - 10}{9} + \frac{10^n - 10}{9} + \ldots + \frac{10^{n-n+1} - 10}{9}$$

$$= \frac{10^{n+1} + 10^n + \ldots + 10}{9} - \frac{10 \cdot n}{9}$$

$$= \frac{10^{n+2} - 10}{9^2} - \frac{10 \cdot n}{9}$$

Iar a doua :

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Deci :

$$S_2 = \frac{1}{9}\left[\frac{10^{n+2} - 10}{9^2} - \frac{10 \cdot n}{9} - \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{9^3}\left[10^{n+2} - 10 - 810 \cdot n - \frac{729}{2} n(n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{9^3}\left[10^{n+2} - \frac{n}{2}(729 \cdot n + 2349) - 10\right].$$

Prin urmare :

$$S = S_1 + S_2$$

adică :

$$S = \frac{10^3}{9^3}\left[n.10^{2n+1} - \frac{20}{11}\left(n + \frac{6}{11}\right)10^{2n} + 10^n - \frac{1}{11^2}\right]$$

$$+ \frac{1}{9^3}\left[10^{n+2} - (729.n + 2349)\frac{n}{2} - 10\right].$$

Sau :

$$S = \frac{1}{9^3}\left[n.10^{2n+3} - \frac{20}{11^2}(11n + 6).10^{2n+2}\right.$$

$$\left. + 2.10^{n+2} - (729.n + 2349)\frac{n}{2} - \frac{1310}{11^2}\right].$$

*Soluţia II-a.*

Vom scrie :

$$S = 101.[1 + 10 + \ldots + 10^{n-1}]$$

$$+ 20002.[1 + 10 + \ldots + 10^{n-2}] + \ldots$$

$$\ldots + n\underbrace{00\ldots00}_{2^{n-1}}n.10^{n-n}.$$

Sau :

$$S = \frac{1}{9}[10^{n+2}(1 + 2.10 + \ldots + n.10^{n-1})$$

$$- 10^2(1 + 2.10^2 + \ldots + n.10^{2n-2})$$

$$+ 10^n(1 + 2.10^{-1} + \ldots + n.10^{-(n-1)})$$

$$- (1 + 2 + \ldots + n)].$$

Apoi făcând rând pe rând toate însumările din paranteze, se ajunge la o expresie analogă celei de mai sus.

Au rezolvat problema No. 3932 D-nii : N. N. Aldea, N. N. Mihăileanu, C. D. Rusu şi P. Varlam.

Au încercat să rezolve şi să generalizeze problema No. 3932, D-nii : Haralamb P. Ionescu-Biss şi Mircea D. Moţoc.

Atât rezultatul soluţiunilor cât şi al generalizărilor difereau ca formă şi uneori chiar ca fond, deoarece astfel de probleme prea bogate în dezvoltări şi însumări depăşesc cu mult cadrul estetic şi al ştiinţei şi al practicei.

I. L.

PROBLEMA 4072. *Să se demonstreze că* $(a^3 + b^3)$ *nu se poate divide cu 11 decât dacă* $(a + b)$ *se divide cu 11.*

I. IONESCU.

*Soluție* dată de D-l G. ȘT. ROȘCA.

Excludem cazul când $a$ și $b$ s'ar divide cu 11, căci atunci teorema e evidentă. Fie dar $a$ și $b$ primi cu 11, și $d$ cel mai mare comun divizor al lor. Punem $a = d\alpha$, $b = d\beta$. Rămâne să arătăm că $d^3(\alpha^3 + \beta^3)$ nu se divide cu $d(\alpha + \beta)$, dacă $d(\alpha + \beta)$ nu se divide cu 11. Dar $d$, factor a lui $a$ prim cu 11, va fi și el prim cu 11. Chestiunea se reduce dar la a arăta că $(\alpha^3 + \beta^3)$ nu se divide cu 11 dacă $(\alpha + \beta)$ nu se divide cu 11. Avem însă:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2).$$

Insă $(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ nu se poate divide decât cu 3 sau cu un număr prim de forma $\mathscr{M}6 + 1$, dacă $\alpha$ și $\beta$ sunt primi între ele, cum e cazul aci. (A se vedea problema 2233 Anul XXXVI pag. 303). Cum 11 e de forma $\mathscr{M}6 - 1$ se vede că numai dacă $(\alpha + \beta)$ este $\mathscr{M}11$ numai atunci $(\alpha^3 + \beta^3)$ se va divide cu 11, ceeace rămâne de arătat.

*Soluție* dată de D-l S.-Lt. I. ZAMFIRESCU și M. MARGULIUS (Elev, Liceul Spiru Haret, București).

Față de divizorul 11, un număr poate fi de una din formele $\mathscr{M}11$, $\mathscr{M}11 \pm 1$, $\mathscr{M}11 \pm 2$, $\mathscr{M}11 \pm 3$, $\mathscr{M}11 \pm 4$, $\mathscr{M}11 \pm 5$. Cuburile acestora nu pot fi decât de formele $\mathscr{M}11$, $\mathscr{M}11 \pm 1$, $\mathscr{M}11 \pm 8$, $\mathscr{M}11 \pm 5$, $\mathscr{M}11 \pm 9$, $\mathscr{M}11 \pm 4$.

Dacă $a = \mathscr{M}11$, se vede de aci că $(a^3 + b^3)$ nu este $\mathscr{M}11$ decât dacă și $b = \mathscr{M}11$, dar atunci $(a + b) = \mathscr{M}11$. Pe de altă parte, numerele 1, 8, 5, 9, 4, — 1, — 8, — 5, — 9, — 4, dau 0 ca sumă dacă sunt luate egale și de semne contrare, dar adunate două la fel sau nu, nu dau 11 sau — 11. Deci $(a^3 + b^3)$ nu poate fi $\mathscr{M}11$ decât dacă $a$ este de formele $\mathscr{M}11 + 1$, $\mathscr{M}11 + 2$, $\mathscr{M}11 + 3$, $\mathscr{M}11 + 4$ sau $\mathscr{M}11 + 5$ și $b$ respectiv $\mathscr{M}11 - 1$, $\mathscr{M}11 - 2$, $\mathscr{M}11 - 3$, $\mathscr{M}11 - 4$, $\mathscr{M}11 - 5$, sau invers. Insă în acest caz $(a + b)$ este $\mathscr{M}11$, ceeace era de arătat.

PROBLEMA 4100. *Ce relaţie există între laturile unui triunghiu* ABC *ale cărui unghiuri satisfac relaţiunea:*

$$2\cos A + \cos B + \cos C = 2.$$

ŞT. E. OLTEANU.

In G. M. Vol. XIX pag. 409, D-l V. MARCU arată că în triunghiul în care laturile satisfac relaţia

$$2a = b + c$$

avem relaţiile între unghiuri

$$(1) \qquad 2\sin A = \sin B + \sin C$$

$$(2) \qquad 2 - 2\cos A = \cos B + \cos C$$

$$(3) \qquad 4\cos A + \cos(B - C) = 3.$$

Se observă că (2) este relaţia problemei 4100.

*

De altfel avem:

$$\cos B + \cos C = 2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(B - C) = 2(1 - \cos A) = 4\sin^2\tfrac{1}{2}A$$

$$\therefore \qquad \cos\tfrac{1}{2}(B - C) = 2\cos\tfrac{1}{2}(B + C)$$

sau:

$$\cos\tfrac{1}{2}(B - C)\sin\tfrac{1}{2}(B + C) = 2\cos\tfrac{1}{2}(B + C)\sin\tfrac{1}{2}(B + C)$$

$$\sin B + \sin C = 2\sin A$$

$$\therefore \qquad b + c = 2a.$$

N. MIHĂILEANU şi MARIUS MARGULIUS.

S'au primit soluţii dela D-nii: N. A. ACIKGHEOZIAN, N. N. ALDEA, A. EM. BĂDESCU: I. D. CÂRSTOIU, HAR. P. IONESCU-BISS, M. LEONTE, A. NEGREA, EM. PĂNOIU, I. PAREPEANU, N. PATRAULEA, I. I. PETRESCU, G. ŞT. ROŞCA, S.-LT. I. C. SAVIN, I. C. ŞOVA-GRIGORENI.

COL. G. I. L.

PROBLEMA 4101. *Care sunt numerele întregi care împărţite, fie cu 4862, fie cu 6248, fie cu 8624 dau totdeauna restul 2486? După ce se vor găsi numerele se vor face verificările cu unul din ele.*

I. IONESCU.

*Soluţie* dată de D-nii: G. ROŞCA, D. IORDĂNESCU, I. CURCHI, MARGULIUS.

Descompunem primele trei numere date în factori primi şi găsim:

$$4862 = 2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \; ; \; 6248 = 2^3 \cdot 11 \cdot 71 \; ; \; 8624 = 2^4 \cdot 7^2 \cdot 11.$$

Cel mai mic comun multiplu al acestor trei numere este deci $2^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 71 = 135319184$. Dacă acestuia îi adăogăm pe 2486 găsim suma 135321670 care e cel mai mic număr care împărţit cu 4862, cu 6248 şi cu 8624 dau la cât restul comun 2486.

Verificarea se face uşor prin împărţire.

Numerele care îndeplinesc condiţiunile cerute sunt de forma

$$(135319184\, n + 2486).$$

*Notă.* Problema şi verificările se simplifică dacă se observă că toate numerele date se divid cu 2 şi cu 11. Împărţindu-le cu 22 găsim numerele mai mici 221, 284, 392 şi 223. Descompunem primele trei în factori primi şi găsim că soluţiile sunt date de expresiunea:

$$22 \cdot (2^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 71\, n + 223).$$

I. I.

---

PROBLEMA 4110. *Se dă punctul* $M(x_0, y_0)$ *în planul unei elipse de centru* O *şi de ecuaţie*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 .$$

*Fie* D *şi* E *proecţiile respective ale lui* M *şi* O *pe polara lui* M *faţă de elipsă. Să se demonstreze că*

$$\frac{MD}{OE} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1.$$

AD. C. GHEORGHIU.

*Soluţie*, dată de D-ra MARIANA ABRAMESCU (Studentă Cluj) şi de D-nii: S.-LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU; S.-LOCOT. I. C. SAVIN; N. N. MIHĂILEANU (Constanţa); H. P. IONESCU-BISS, I. CURCHI (Studenţi, Bucureşti); N. PATRAULEA (Lic. militar Târgovişte); I. C. ŞOVA-GRIGORENI, I. D. CÂRSTOIU, G. S. ROŞCA, A. E. BĂDESCU, N. ACIKGHEOZIAN şi M. MARGULIUS.

Distanţele lui M şi ale lui O la polara lui M faţă de elipsă sunt respectiv

$$MD = \frac{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}{\pm R} \quad \text{şi} \quad OE = \frac{-1}{\pm R}$$

în care

$$R = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}\,.$$

Impărţind valorile lui MD şi OE se găseşte egalitatea de demonstrat.

*Notă.* D-l N. N. MIHĂILEANU (Constanţa) a dovedit pe acelaşi cale că raportul $\frac{MD}{OE}$ are valoarea

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1$$

pentru hiperbolă şi valoarea

$$\frac{y_0^2 - 2px_0}{px_0}$$

pentru parabolă.

## *EXERCIŢII

36. Se cere limita expresiunii

$$y = e^{\left[\frac{e^x - Lx}{e^x\, a^e + Lx}\right]}$$

pentru $x \to \infty$.

HARALAMB P. IONESCU-BISS.

R. Exponentul lui $e$, pentru $x = \infty$ devine $\frac{\infty - \infty}{\infty + \infty}$; scriindu-l sub forma

$$\frac{\frac{1}{Lx} - \frac{1}{e^x}}{\frac{a^e}{Lx} + \frac{1}{e^x}}$$

pentru $x = \infty$ devine $\frac{0}{0}$. Aplicând regula lui Hôpital de 2 ori şi grupând apoi convenabil termenii, obţinem

$$\lim_{x \to \infty} Ly = a^{-e}$$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} y = a^{a^{-e}} .$$

37. $h_a\, r$, $r_a$ pot rezolva un triunghiu?

N. Mihăileanu.

R. Relaţia din Ex. 56. G. M. An. XXXVI, care se mai poate scrie

$$2rr_a = h_a\,(r_a - r),$$

ne arată că nu.

## PROBLEME PROPUSE

*4141. Să se arate că diferenţa puterilor a cincea a două numere întregi nu se poate divide cu 13 decât dacă diferenţa acelor numere se divide cu 13.

I. Ionescu.

*4142. Să se găsească un cub de 9 cifre, ştiind că numerele de câte 3 cifre dela dreapta şi dela stânga sunt consecutive, iar numărul de 3 cifre dela mijloc este egal cu 408.

Col. Gh. Buicliu.

*4143. Pe o linie de autobuze statul încasează o taxă anuală de 120.000 lei.

Să se calculeze, ţinând seamă că dobânda legală este de $9^0/_0$, suma pe care trebuie să o primească statul odată pentru totdeauna dacă ar vrea să concesioneze dreptul de folosinţă al acestei linii în următoarele două ipoteze:

1. Chiria anuală ar creşte cu $3^0/_0$ pe an;
2. Chiria ar creşte cu 5000 lei pe an.

I. B. Florescu.

*4144. Dans un quadrilatère ABCD, les angles opposés en B et D sont droites. Soient A', B' les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés AB, BC et C", D" ceux des carrés

construits intérieurement sur les côtés CD, DA. Montrer que l'aire du quadrilatère A'B'C''D'' est équivalente à la moitié de celle du quadrilatère ABCD.

V. THÉBAULT.

*4145. Se consideră un triunghiu ABC, punctul B' pe AC între A şi C şi punctul C' pe AB între A şi B. Pe BB' şi CC' ca baze se construesc triunghiurile isoscele BDB', CEC' (BD = B'D, CE = C'E) cu unghiurile BDB' = CEC' = BAC, vârfurile D, A şi E fiind de aceeaş parte a lui BC. Să se arate că punctele D, A şi E sunt în linie dreaptă şi dreapta DAE este bisectoarea exterioară a unghiului BAC.

N. ABRAMESCU.

*4146. Să se arate că oricari ar fi $a$ şi $b$ reali iar $\alpha > 0$, ecuaţia:

$$ax^2 + bx - \alpha\left[\frac{a}{\alpha+2} + \frac{b}{\alpha+1}\right] = 0$$

are rădăcini reale, una din ele fiind totdeauna cuprinsă între zero şi unu.

N. C.

*4147. Se consideră ecuaţia

$$(1) \qquad f(x) = x^2 + px + q = 0,$$

coeficienţii $p$ şi $q$ putând fi numere complexe.

Rădăcinile ecuaţiei (1) se reprezintă prin punctele A şi B prin raport cu un sistem de axe rectangulare $ox$, $oy$.

Se dă apoi un număr $\lambda$, reprezentat prin punctul L şi fie M şi N punctele corespunzătoare numerilor $p^2 - 49$ şi $f(\lambda)$.

Să se arate că dacă punctele A, B, L sunt colineare, atunci şi punctele M, N şi origina O a axelor de coordonate sunt colineare. Să se deducă un criteriu pentru a recunoaşte dacă punctul L este pe dreapta AB de aceeaş parte a punctelor A şi B sau între ele.

*Caz particular* când coeficienţii $p$, $q$ sunt reali, rădăcinile ecuaţiei (1) fiind de asemenea reale.

TH. ANGHELUŢĂ.

4148. Se consideră determinantul circular de ordinul $n$:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \\ x_n & x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n-1} \\ x_n & 1\, x_n & x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1 \end{vmatrix}.$$

Rezultatul desvoltării acestui determinant este un polinom omogen de gradul $n$ în $x_1, x_2, , \ldots, x_n$.

Fie $\Delta U$ expresia ce se obține, dacă se convine să se înlocuiască în D toți termenii:

$$x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta} \cdot \cdot \cdot x_n^{\lambda} \qquad (\alpha + \beta + \cdot \cdot \cdot + \lambda = n)$$

prin derivatele

$$\frac{\partial^n U(x_1, x_2, \cdot \cdot \cdot x_n)}{\partial^{\alpha} x_1\, \partial^{\beta} x_2 \cdot \cdot \cdot \partial^{\lambda} x_n}.$$

Să se demonstreze egalitatea:

$$\Delta V = \frac{K}{D^2}$$

unde

$$V = \frac{\partial \log D}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \log D}{\partial x_2} \cdot \cdot \cdot \frac{\partial \log D}{\partial x_n}$$

și să se determine coeficientul numeric K.

N. G. Botea.

4149. Modulul sumei a două numere al căror modul e mai mare ca 2, e inferior modulului produsului lor.

P. Sergescu.

4150. Se vorbește despre o apropiată reapariție a științei Astrologiei în lumea cultă. Să se discute chestiunea valabilității prezicerilor astrologice, fundată pe o comparație între mortalitatea medie prevăzută de calculele astrologice și mortalitatea statistică.

Gh. Zapan.

---

*Erată:* La problema No. 4134 să se adauge:
„Aceiași chestiune când $O_1$ este centrul unei elipse."

Articolele, notele și problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

---

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Acikgheozian A. Nuber* (3839, 4110, 24); *Aldea N. N.* (4046); *Bădescu E. A.* (4110); *Chiriac I. C.* (4089, 129, 40); *Chiriac Trifon* (4129); *Gheorghiu C. Ad.* (2386, 3244, P); *Ionescu P. H.* (4046, 110); *Margulius M.* (3554, 630, 826, 27, 40, 89, 95, 925, 4014, 27, 124, 31, 34, 40, P); *Mihăileanu N. N.* (2081, 3509, 649, 855, 56, 57, 919, 45, 4094, 95, 124, A, N, P, R); *Negrea A. L. M.* (4088, 138); *Olteanu E. Șt.* (4124, 36, 38, 40); *Patraulea N.* (1364, 4027); *Roșca St. G.* (3936, 4055, 94, 99, 108, 29, 33, 34, 38, N); *Sager N. Iancu* (4124, E, N, P); *Savin C. I. Subloc.* (4075, 90, 95, 4138, P); *Șova-Grigoreni C. I.* (4110); *Teodorescu Ștefan* (4124).

---

*Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de* **geometrie**, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

---

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii și nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor aveà format de sfert de coală*, iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caet de dictando.

---

**Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.**

## Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

**La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti 4.**

# GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVII

NUMĂRUL 11. — IULIE 1932

## SUMARUL

1. Sur le triangle podaire . . . . . *V. Thébault*
2. Curbe paralele şi antiparalele . . . . . *A. Myller*
3. Un sistem de ecuaţii liniare . . . . . *D. V. Ionescu*
4. Asupra configuraţiilor determinate de *n* linii drepte, intersectate de o transversală . . . . . *Gh. Zapan*
5. Mişcarea gazelor cu viteze foarte mari . *Căpitan I. Linteş*
6. Asupra axelor conicelor unui triunghiu . *I. C. Vasiliu*
7. Note matematice: 37 — 38.
8. Bibliografie.
9. Cereri: 219.
10. Probleme rezolvate: 3514, 3710, 3828, 3848, 3969, 4007, 4008, 4136.
11. Exerciţii: 38.
12. Probleme propuse: 4145, 4151 — 4160.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1932

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVII se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orăşanu,** Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.**

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 84, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 72, 76, 83, 87, 4010, 13, 24, 30, 34, 44, 45, 53, 57, 59, 62, 68, 70, 71, 73, 79, 80, 85, 102, 03, 06, 11, 12, 13, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 28, 32, 35, 37, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

# SUR LE TRIANGLE PODAIRE

1. Considérons un triangle ABC et les points inverses $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, de A, B, C, dans une inversion (P, $k$), P étant un point du plan. Les perpendiculaires aux droites PA, PB, PC, en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, qui forment un triangle $A_1B_1C_1$, sont les inverses des circonférences (A), (B), (C), passant par P, dont les centres sont les sommets du triangle fondamental, dans une inversion (P, $2k$).

Les perpendiculaires en P aux droits $PA_1$, $PB_1$, $PC_1$, coupent les circonférences (A), (B), (C), en trois points situés sur une circonférence ($\Sigma$) dont le centre est l'orthocentre H de ABC et dont le rayon égale HP.

Dans l'inversion (P, $2k$), la circonférence ($\Sigma$) devient une droite perpendiculaire à HP qui contient visiblement les intersections des perpendiculaires en P à $PA_1$, $PB_1$, $PC_1$, avec $B_1C_1$, $C_1A_1$, $A_1B_1$. D'où ce théorème connu :

*Les perpendiculaires élevées en un point* P *du plan d'un triangle* ABC *sur les droites* PA, PB, PC, *rencontrent respectivement les côtés* BC, CA, AB *du triangle en trois points situés sur une droite* $\Delta$.

Ajoutons ceci :

*Soient* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, *les projections orthogonales d'un point* P *du plan d'un triangle* ABC *sur les côtés* BC, CA, AB *et* $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, *leurs inverses dans une inversion* (P, $k$). *La droite* $\Delta$, *qui précède, est perpendiculaire à celle qui unit le point* P *à l'orthocentre du triangle* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$.

2. Soient $\alpha\beta\gamma$ le triangle podaire d'un point P du plan d'un triangle ABC, ($\omega$) le cercle podaire circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ et aussi au triangle podaire $\alpha'\beta'\gamma'$ du point P′ conjugué isogonal de P dans ABC ; $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, les intersections avec le cercle ($\omega$) des droites $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$.

D'après ce qui précède, les perpendiculaires en P aux droites PA, PB, PC, coupent respectivement BC, CA, AB, en trois points d'une droite perpendiculaire à celle qui joint le point P à l'orthocentre $h_1$ du triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, puisque $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, sont les inverses de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, dans une inversion (P, $P_\alpha$, $P_{\alpha 1}$). Mais le triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ est symétrique du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ par rapport au point $\omega$, et l'orthocentre $h'$ du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ est symétrique de $h_1$ par rapport à $\omega$. Ainsi les droites $Ph_1$, $P'h'$, sont parallèles, etc.

*Soient* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, *les triangles podaires de deux points* P, P', *conjugués isogonaux par rapport à un triangle* ABC. *Les parallèles issues de* P *et* P' *aux côtés des triangles* $\alpha'\beta'\gamma'$ *et* $\alpha\beta\gamma$, *rencontrent les cotés* BC, CA, AB, *en trois points qui déterminent deux droites respectivement perpendiculaires à celles qui unissent* P' *et* P *aux orthocentres de leurs triangles podaires* $\alpha'\beta'\gamma'$ *et* $\alpha\beta\gamma$.

3. **Cas particuliers.** Soient O, I, $I_a$, $I_b$, $I_c$ et H, les centres du cercle circonscrit, des cercles tritangents et l'orthocentre d'un triangle ABC.

*a)* Si $P \equiv O$, $P' \equiv H$. Dans ce cas, la droite $\Delta$ déterminée par les perpendiculaires en O aux rayons OA, OB, OC, du cercle circonscrit, avec BC, CA, AB, est perpendiculaire à celle qui joint l'orthocentre de ABC à celui de son triangle orthique A'B'C'.

On en déduit cette propriété :

*Les parallèles aux côtés* BC, CA, AB, *d'un triangle, issues du centre du cercle circonscrit au triangle* $I_a I_b I_c$, *coupent respectivement les droites* $I_b I_c$, $I_c I_a$, $I_a I_b$, *en trois points d'une droite perpendiculaire à celle qui joint le centre du cercle inscrit à l'orthocentre du triangle* ABC.

*b)* Si $P \equiv I \equiv P'$, les perpendiculaires en I aux droites IA, IB, IC, rencontrent respectivement BC, CA, AB, en trois points d'une droite $\Delta$ perpendiculaire à celle qui joint le point I à l'orthocentre du triangle D'E'F' des symétriques, par rapport à I, des contacts D, E, F, de (I) sur BC, CA, AB.

D'autre part, on sait que $\Delta$ est perpendiculaire à la droite OI [1]). L'orthocentre du triangle DEF étant symétrique de celui du triangle D'E'F', par rapport à I, on retrouve ce résultat connu :

*L'orthocentre du triangle des contacts de l'un des cercles tritangents à un triangle* ABC *est situé sur la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC *à celui du cercle tritangent considéré.*

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

1) V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1922 — 256.

## CURBE PARALELE ŞI ANTIPARALELE

Să considerăm sistemul S de drepte format de tangentele la o curbă dată Γ. O dreaptă MP a sistemului poate fi determinată prin lungimea $s$ a arcului curbei Γ măsurată dela un punct fix pe curbă la punctul de contact M cu dreapta; un punct P pe dreaptă poate fi fixat prin abscisa lui $r = MP$ măsurată dela punctul de contact M. O relaţiune

$$r = \rho(s) \tag{1}$$

defineşte o curbă în plan.

Formula

$$r = \omega(s)\left[\lambda - \int_0^s \frac{d\sigma}{\omega(\sigma)}\right] \tag{2}$$

unde $\omega$ este o funcţie dată de $s$ şi $\lambda$ un parametru, defineşte şi ea o curbă C. Când parametrul $\lambda$ variază se obţine o familie de curbe cari au proprietatea că taie sub unghiuri egale o dreaptă oarecare a sistemului S. In adevăr dacă însemnăm cu $\xi$, $\eta$ coordonatele lui P, cu $x(s)$, $y(s)$ coordonatele lui M, cu $\varphi$ şi $\theta$ unghiurile ce fac cu $Ox$ tangenta în M la curba C şi dreapta MP, cu $V = \varphi - \theta$ unghiul curbei cu dreapta şi cu R raza de curbură a lui Γ în M avem:

$$\xi = x(s) + r\,x'(s), \qquad \eta = y(s) + r\,y'(s)$$

$$\operatorname{tg} V = \frac{\dfrac{\eta'}{\xi'} - \dfrac{y'}{x'}}{1 + \dfrac{\eta' y'}{\xi' x'}} = \frac{r(x'y'' - y'x'')}{r' + 1} = \frac{r}{r' + 1}\,\frac{1}{R}$$

ceeace voiam să demonstrăm căci V nu depinde de $\lambda$ ci numai de $s$. Vom zice că curbele C sunt *paralele dealungul sistemului* S.

Considerând patru curbe C avem din (2)

$$\frac{r_1 - r_2}{r_3 - r_4} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_4}$$

ceeace ne spune că curbele C taie pe dreptele sistemului segmente proporţionale.

Făcând să varieze funcţiunea $\omega$, formula (2) ne dă toate familiile de curbe paralele. In adevăr fiind dată o curbă arbitrară (1), punând valoarea lui $r$ în (2) şi făcând $\lambda$ să fie constant spre exemplu $= 1$ obţinem o ecuaţie integrală

$$(3) \qquad \rho(s) = \omega(s)\left[1 - \int_0^s \frac{d\sigma}{\omega(\sigma)}\right].$$

a cărei soluţiune $\omega$ dusă în (2) dă familia de curbe paralele curbei (1). Pentru a avea soluţia $\omega$ a ecuaţiei integrale, derivăm (3) şi rezultă

$$\rho' + 1 = \omega'\left[1 - \int_0^s \frac{d\sigma}{\omega}\right]$$

apoi de aici şi din (3)

$$(4) \qquad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\rho' + 1}{\rho}.$$

Integrând şi determinând constanta de integraţie obţinem

$$\omega = \rho(0)\, e^{\int_0^s \frac{\rho'+1}{\rho}\, d\sigma}.$$

Formula

$$(5) \qquad \bar{r} = \frac{1}{\omega(s)}\left[\mu - \int_0^s \omega(\sigma)\, d\sigma\right]$$

defineşte o nouă familie de curbe $\bar{C}$ care sunt şi ele paralele dealungul sistemului S, căci se deosebeşte de (2) numai prin faptul că funcţia $\omega$ e înlocuită cu $1 : \omega$. Curbele $\bar{C}$ taie o dreaptă oarecare a sistemului sub un unghiu $\bar{V}$, care e egal în valoare absolută cu unghiul V al curbelor C dar îndreptat în sens contrariu. Calculând vedem că

$$\operatorname{tg} \bar{V} = -\operatorname{tg} V.$$

Numim curbele $\bar{C}$ *antiparalele* curbelor C dealungul sistemului.

Dacă considerăm două curbe paralele C şi două curbe $\bar{C}$ antiparalele lor, obţinem din (2) şi (5)

$$(r_1 - r_2)\ (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)\ (\mu_1 - \mu_2)$$

deci două curbe paralele şi două curbe antiparalele lor taie pe dreptele sistemului segmente inverse unul altuia.

Referitor la (2) şi (5) se obţine formula analoagă lui (4)

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{r' + 1}{r} = -\frac{\bar{r}' + 1}{\bar{r}}$$

şi de aci

$$\frac{d}{ds}(r\bar{r}) + r + \bar{r} = 0\ .$$

Formula aceasta generalizează formula inversiunei şi se reduce la dânsa când Γ se reduce la un punct.

A. MYLLER.

## UN SISTEM DE ECUAŢII LINIARE

Consider următorul sistem de ecuaţii liniare, unde necunoscutele sunt $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

$$
\begin{aligned}
&y_1 = a\,x_1\\
&y_2 = a\,x_2 + C_n^1\,a'x_1\\
&y_3 = a\,x_3 + C_{n-1}^1\,a'x_2 + C_n^2\,a''\,x_1.\\
(1)\quad &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_p = a\,x_p + C_{n-p+2}^1\,a'\,x_{p-1} + C_{n-p+3}^2\,a''\,x_{p-2} + \ldots + C_n^{p-1}\,a^{(p-1)}\,x_1.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_{n+1} = a\,x_{n+1} + C_1^1\,a'\,x_n + C_2^2\,a''\,x_{n-1} + \ldots + C_n^n\,a^{(n)}\,x_1.
\end{aligned}
$$

In aceste ecuaţii $a$ reprezintă o funcţiune de un parametru $\alpha$ iar $a', a'', \ldots, a^{(p)}, \ldots, a^{(x)}$ derivatele succesive ale ei în raport cu $\alpha$.

Să arătăm că dacă punem

$$A = \frac{1}{a}, \tag{2}$$

formulele care rezolvă acest sistem sunt

$$\begin{aligned}
x_1 &= A y_1 \\
x_2 &= A y_2 + C_n^1 A' y_1 \\
x_3 &= A y_3 + C_{n-1}^1 A' y_2 + C_n^2 A'' y_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_p &= A y_p + C_{n-p+2}^1 A' y_{p-1} + C_{n-p+3}^2 A'' y_{p-2} + \ldots + C_n^{p-1} A^{(p-1)} y_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n+1} &= A y_{n+1} + C_1^1 A' y_n + C_2^2 A'' y_{n-1} + \ldots + C_n^n A^{(n)} y_1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Intr'adevăr din prima ecuație (1) deducem

$$x_1 = \frac{1}{a} y_1 = A y_1.$$

Din a doua ecuație (1) scoatem

$$x_2 = A y_2 - C_n^1 \frac{a'}{a} A y_1.$$

Derivând în raport cu $\alpha$, ecuația

$$a A = 1,$$

deducem

$$a' A + a A' = 0;$$

de unde

$$\frac{a'}{a} A = - A',$$

și prin urmare

$$x_2 = A y_2 + C_n^1 A' y_1.$$

Mai departe, din a treia ecuație (1) scoatem

$$x_3 = A y_3 - C_{n-1}^1 \frac{a'}{a}(A y_2 + C_n^1 A' y_1) - C_n^2 \frac{a''}{a} A y_1$$

$$= A y_3 + C_{n-1}^1 A' y_2 - C_n^2 \left( 2 \frac{a'}{a} A' + \frac{a''}{a} A \right) y_1.$$

Derivând de două ori în raport cu $\alpha$ formula

$$a A = 1,$$

deducem

$$a A'' + 2 a' A' + a'' A = 0,$$

de unde scoatem

$$2 \frac{a'}{a} A' + \frac{a''}{a} A = - A''$$

și prin urmare avem

$$x_3 = A y_3 + C_{n-1}^1 A' y_2 + C_n^2 A'' y_1.$$

Așadar am demonstrat primele trei formule (3).

Să presupunem că din aproape în aproape am demonstrat că

$$x_q = A y_q + C_{n-q+2}^1 A' y_{q-1} + C_{n-q+3}^2 A'' y_{q-2} + \ldots + C_n^{q-1} A^{(q-1)} y_1,$$

pentru toate valorile

$$q = 1, 2, \ldots, p,$$

și să dovedim că $x_{p+1}$ va fi dat de o formulă analoagă.

Din ecuația $(p+1)^a$ (1) deducem

$$x_{p+1}=\frac{1}{a}y_{p+1}-C^1_{n-p+1}\frac{a'}{a}\,x_p-C^2_{n-p+2}\frac{a''}{a}\,x_{p-1}-\ldots-C^p_n\frac{a^{(p)}}{a}\,x_1$$

sau:

$$x_{p+1}=A\,y_{p+1}-C^1_{n-p+1}\frac{a'}{a}\,(A\,y_p+C^1_{n-p+2}\,A'y_{p-1}+\ldots+C^{t-1}_n A^{(p-1)}\,y_1).$$

$$-C^2_{n-p+2}\frac{a''}{a}\,(A\,y_{p-1}+C^1_{n-p+3}\,A'y_{p-2}+\ldots+C^{p-2}_n A^{(p-2)}\,y_1)$$

$$-\ldots\ldots\ldots$$

$$-C^p_n\frac{a^{(p)}}{a}\,A\,y_1.$$

Punând în evidență în această formulă coeficienții lui $y_p$, $y_{p-1}$, ..., $y_1$, vom avea:

$$x_{p+1}=A\,y_{p+1}-C^1_{n-p+1}\left(\frac{a'}{a}A\right)y_p.$$

$$-C^2_{n-p+2}\left(\frac{a''}{a}A+2\frac{a'}{a}A'\right)y_{p-1}$$

$$-C^3_{n-p+3}\left(\frac{a'''}{a}A+3\frac{a''}{a}A'+3\frac{a'}{a}A''\right)y_{p-2}$$

$$-\ldots\ldots$$

$$-C^p_n\left(\frac{a^{(p)}}{a}A+C^1_p\frac{a^{(p-1)}}{a}A'+C^2_p\frac{a^{(p-2)}}{a}A''+\ldots+C^{p-1}_p\frac{a'}{a}A^{(p-1)}\right)y_1.$$

Dacă se derivează după formula lui LEIBNITZ ecuația

$$a\,A=1,$$

în raport cu $\alpha$, o dată, de două ori, ..., de $p$ ori, se deduce că parantezele din formula precedentă sunt egale cu

$$-A',\ -A'',\ -A''',\ \ldots,\ -A^{(p)},$$

așa că putem scrie

$$x_{p+1}=A\,y_{p+1}+C^1_{n-p+1}A'y_p+C^2_{n-p+2}A''y_{p-1}+\ldots+C^p_n A^{(p)}y_1.$$

Formulele (3) sunt deci demonstrate.

D. V. IONESCU
Profesor la Facultatea
de Științe din Cluj.

# ASUPRA CONFIGURAȚIILOR DETERMINATE DE *n* LINII DREPTE, INTERSECTATE DE O TRANSVERSALĂ

Teorema «dreptelor concurente intersectate de o transversală» (Gh. Zapan, G. M. Vol. XXXVII, pag. 17) prezintă un caracter general, într'un domeniu din geometria plană, elementară, făcând posibilă rezolvarea directă a problemelor privitoare la relațiuni liniare, într'o configurație de linii drepte.

Vom relua aci enunțul teoremei, expunându-l sub diferite forme, accesibile direct aplicațiilor.

**Teoremă generală.** *O transversală intersectând fascicolul* O(ABM) *în punctele* A, B, M, *avem relația:*

$$(1) \qquad \frac{MA}{MB} : \frac{OA}{OB} = k \text{ (const.)}$$

*în care constanta k reprezintă raportul distanțelor* $D_a$ *și* $D_b$ *ale unui punct depe* OM *la dreptele* OA *și* OB, *sau, tot una spus, reprezintă raportul dintre sinusurile unghiurilor* MOA *și* MOB:

$$(2) \qquad \frac{MA}{MB} : \frac{OA}{OB} = \frac{D_a}{D_b} = \frac{\sin \sphericalangle MOA}{\sin \sphericalangle MOB} .$$

*Considerând punctele de intersecție* A, B, M *și* A', B', M', *a două transversale, cu un acelaș fascicol, avem:*

$$(3) \qquad \frac{MA}{MB} : \frac{OA}{OB} = \frac{M'A'}{M'B'} : \frac{OA'}{OB'} .$$

Orice configurație determinată de *n* linii drepte, intersectate de o transversală, poate avea una din următoarele 3 forme: *a)* cele *n* linii drepte sunt concurente într'un punct. In acest caz configurația este un fascicol de drepte intersectate de o transversală; *b)* cele *n* linii drepte nu sunt concurente, decât două câte două, în acelaș punct. In acest caz, avem configurația unui poligon, ale cărui laturi sunt intersectate de o transversală, pe care, prin analogie cu o configurație cunoscută în cazul triunghiului, o vom numi configurația Menelaus; *c)* cele *n* linii drepte formează, cu transversala dată, în parte configurația unui fascicol secționat de o transversală și în parte o configurație Menelaus.

Punctul *a)* se rezolvă prin aplicarea directă a *teoremei generale* expusă mai sus, la grupe de câte 3 drepte concurente, secţionate de o transversală; punctul *b)* se rezolvă, după cum vom vedeà, pe baza aceleiaş teoreme; punctul *c)* privind o configuraţie (*a*) şi o configuraţie (*b*), rezultă că se va rezolvà şi el tot pe baza aceleiaş teoreme.

Aşa dar pentru soluţionarea completă a problemei propuse, urmează să mai tratăm aci punctul *b)*, privitor la configuraţia MENELAUS.

**Generalizarea teoremei lui** MENELAUS. A′ B′, C′ fiind intersecţiile laturilor AB, BC, CA ale unui triunghiu ABC, cu o transversală dată, se ştie că, după teorema lui MENELAUS, avem:

$$\frac{A'A}{A'B} \cdot \frac{B'B}{B'C} \cdot \frac{C'C}{C'A} = 1.$$

Imi propun să demonstrez următoarea teoremă generală: *Relaţia lui* MENELAUS *rămâne, într'o expresiune analoagă, invariantă în cazul unui poligon oarecare. Adică, notând cu* A′, B′, C′, D′,... *intersecţiile laturilor* AB, BC, CD, DE,... *ale unui poligon, cu o transversală, avem:*

$$\frac{A'A}{A'B} \cdot \frac{B'B}{B'C} \cdot \frac{C'C}{C'D} \cdot \frac{D'D}{D'E} \ldots \text{ etc.} = 1.$$

Inainte de a rezolva teorema pentru cazul general, vom da o nouă demonstraţie teoremei lui MENELAUS, în cazul triunghiului, ca o aplicaţie directă a teoremei noastre.

Considerând, cu notaţiile de mai sus, triunghiul ABC şi transversala A′B′C′, aplicăm formula (3) fascicolului A′ (AC′C), intersectat de transversalele AC′C şi BB′C (imaginea este mai clară când punctul A′ este situat în afara triunghiului):

$$\frac{C'C}{C'A} : \frac{A'C}{A'A} = \frac{B'C}{B'B} : \frac{A'C}{A'B}.$$

De unde, prin simplificare şi orânduirea factorilor, obţinem relaţia lui MENELAUS.

Pentru demonstraţia teoremei lui MENELAUS în cazul general, vom proceda pe calea inducţiei. Considerăm, în acest scop, punctele M, N, O şi o transversală Δ. Aceasta intersectează dreptele MN, NO

respectiv în punctele $\alpha$, $\beta$. Expresiunea MENELAUS, privitoare conturului MNO, este:

$$\frac{\alpha M}{\alpha N} \cdot \frac{\beta N}{\beta O} .$$

Vom dovedi că intersectând unghiul MNO printr'o dreaptă PQ, expresiunea MENELAUS privitoare conturului MPQO este identică cu expresiunea MENELAUS de mai sus, definită de conturul MNO. In adevăr, să notăm cu $\gamma$ intersecţia lui PQ cu transversala $\Delta$. Fascicolul $\beta$ (PN$\alpha$) intersectat de transversalele PN$\alpha$ şi PQ$\gamma$, după teorema noastră, ne dă:

$$\frac{\alpha P}{\alpha N} : \frac{\beta P}{\beta N} = \frac{\gamma P}{\gamma Q} : \frac{\beta P}{\beta Q} .$$

Relaţia se mai poate scrie şi sub forma:

$$\frac{\alpha M}{\alpha N} \cdot \frac{\beta N}{\beta O} = \frac{\alpha M}{\alpha P} \cdot \frac{\gamma P}{\gamma Q} \cdot \frac{\beta Q}{\beta O} .$$

Ori primul membru al acestei relaţii este expresiunea MENELAUS privitoare conturului MNO, iar membrul al doilea este tocmai expresiunea MENELAUS privitoare conturului MPQO. Adică, expresiunea MENELAUS nu-şi schimbă valoarea când mărim cu 1 numărul laturilor unui poligon (în speţă triunghiu), prin intersecţia cu o dreaptă, a unui unghiu al poligonului (resp. triunghiului) dat. Dar aceasta ne arată că putem înmulţi oricât numărul laturilor unui triunghiu (sau poligon) dat, prin intersecţia unghiurilor lui cu noui drepte, fără să schimbăm prin aceasta valoarea expresiunei MENELAUS a conturului. Adică: relaţiunea lui MENELAUS, cunoscută în cazul triunghiului, rămâne, într'o expresiune analoagă, invariantă şi pentru cazul unui poligon oarecare.

* * *

Ca aplicaţii ale teoremei generale expusă (în afară de aplicaţiile arătate în G. M. Vol. XXXVII, pag. 17), vom tratà, în cele următoare, câteva teoreme şi probleme, unele cunoscute, altele noui, privitoare la relaţii între elementele configuraţiilor definite de linii drepte.

1. **Teorema lui** CEVA. $A_1$, $B_1$, $C_1$ *fiind picioarele a trei drepte concurente, în triunghiul* ABC, *avem relaţia:*

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = -1.$$

Notând cu $D_a$, $D_b$, $D_c$ distanţele punctului comun de intersecţie a celor 3 drepte, la laturile triunghiului şi aplicând formula (2) din teorema noastră fascicolelor $A(BA_1C)$, $B(CB_1A)$, $C(AC_1B)$, intersectate respectiv de laturile BC, CA, AB, obţinem:

$$\frac{A_1B}{A_1C} : \frac{AB}{AC} = \frac{D_c}{D_b}$$

$$\frac{B_1C}{B_1A} : \frac{BC}{AB} = \frac{D_a}{D_c}$$

$$\frac{C_1A}{C_1B} : \frac{CA}{BC} = \frac{D_b}{D_a}.$$

Inmulţind şi ţinând seamă de semne, obţinem relaţia lui CEVA.

2. **Teoremă.** A, B, M, N *fiind punctele de intersecţie ale unui fascicol de 4 drepte concurente, cu o transversală, expresiunea:*

$$\frac{MA}{MB} : \frac{NA}{NB}$$

*păstrează aceiaş valoare, oricare ar fi poziţia transversalei.*

Notând cu O punctul de intersecţie al celor 4 drepte concurente, fascicolele O (ABM), O (ABN), ne dau respectiv:

$$\frac{MA}{MB} : \frac{OA}{OB} = \text{konst.}$$

$$\frac{NA}{NB} : \frac{OA}{OB} = \text{konst.}$$

Prin împărţire obţinem relaţia din enunţ.

3. **Teoremă.** O *şi* O′ *fiind punctele de intersecţie ale laturilor opuse* AB, CD *şi* BC, AD *ale unui patrulater* ABCD, *avem relaţia:*

$$\frac{AO}{AO'} \cdot \frac{BO'}{BO} \cdot \frac{CO}{CO'} \cdot \frac{DO'}{DO} = 1.$$

Considerând fascicolul O′ (OBA) secţionat de transversalele: OBA şi OCD, avem:

$$\frac{OA}{OB} : \frac{O'A}{O'B} = \frac{OD}{OC} : \frac{O'D}{O'C}$$

de unde deducem direct relaţia de mai sus.

*Observare.* In cazul când patrulaterul este inscriptibil, avem:

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD \quad ; \quad O'A \cdot O'D = O'B \cdot O'C$$

De unde, prin înmulţire:

$$\frac{BO' \cdot CO \cdot CO' \cdot DO}{AO \cdot AO' \cdot BO \cdot DO'} = 1.$$

Inmulţind şi această relaţie, cu cea din enunţul teoremei, obţinem:

$$\frac{O'A}{O'B} = \frac{OB}{OC}$$

adică: *într'un patrulater inscriptibil, perechile de segmente, determinate de prelungirile laturilor opuse, până la punctele lor de intersecţie, stau între ele în raporturi egale.*

4. **Problemă.** *Se consideră patrulaterul* A′B′C′D′ *înscris pe laturile* AB, BC, CD, DA *ale patrulaterului* ABCD. *Diagonalele acestuia din urmă intersectează laturile* A′B′, B′C′, C′D′, D′A′ *respectiv în punctele:* A″, B″, C″, D″. *Avem relaţia:*

$$\frac{A'A}{A'B} \cdot \frac{B'B}{B'C} \cdot \frac{C'C}{C'D} \cdot \frac{D'D}{D'A} = \frac{D''A'}{D''D'} \cdot \frac{C''D'}{C''C'} \cdot \frac{B''C'}{B''B'} \cdot \frac{A''B'}{A''A'} .$$

Notând cu O punctul de intersecţie al diagonalelor patrulaterului ABCD şi considerând fascicolele cu vârfurile în A, B, C, D, avem respectiv:

$$\frac{OB}{OD} : \frac{AB}{AD} = \frac{D''A'}{D''D'} : \frac{A'A}{D'A}$$

$$\frac{OC}{OA} : \frac{CB}{BA} = \frac{A''B'}{A''A'} : \frac{B'B}{A'B}$$

$$\frac{OD}{OB} : \frac{CD}{CB} = \frac{B''C'}{B''B'} : \frac{C'C}{B'C}$$

$$\frac{OA}{OC} : \frac{AD}{DC} = \frac{C''D'}{C''C'} : \frac{D'D}{C'D} .$$

Inmulțind egalitățile, membru cu membru și simplificând, obținem relația din enunț.

5. **Problemă.** *O transversală întâlnește laturile* AB, BC, CD, DA *ale unui patrulater, în punctele* A', B', C', D'. *Notând cu* P *și* Q *intersecțiile diagonalelor* BD *și* AC *cu transversala, avem relațiile:*

$$\frac{PA'}{PB'} \cdot \frac{PC'}{PD'} = \frac{QA'}{QB'} \cdot \frac{QC'}{QD'} = 1.$$

Considerând fascicolele D (A'D'P) și D (PC'B'), avem respectiv:

$$\frac{PD'}{PA'} : \frac{DD'}{DA'} = \frac{AB}{A'B} : \frac{DA}{DA'}$$

$$\frac{PB'}{PC'} : \frac{DB'}{DC'} = \frac{BB'}{BC} : \frac{DB'}{DC}$$

de unde, prin înmulțire:

$$\frac{PD' \cdot PB'}{PA' \cdot PC'} = \frac{AB \cdot AD \cdot B'B \cdot C'D}{BC \cdot CD \cdot A'B \cdot D'D}.$$

Considerând fascicolele corespunzătoare din vârful B, găsim o formulă analoagă. (Formula se poate deduce și din cea precedentă, făcând permutațiile de litere: în loc de A, B, C, D, respectiv C, D, A, B).

$$\frac{PB' \cdot PD'}{PC' \cdot PA'} = \frac{CD \cdot BC \cdot D'D \cdot A'B}{AD \cdot AB \cdot C'B \cdot B'B}.$$

Inmulțind ultimele două egalități, obținem:

$$\frac{PB' \cdot PD'}{PA' \cdot PC'} = 1.$$

Analog conchidem și:

$$\frac{QA' \cdot QC'}{QB' \cdot QD'} = 1$$

căci Q (situat pe diagonala AC) are același rol funcțional față de A și C, în configurația geometrică dată, precum P (situat pe diagonala DB) față de D și B.

Ultimele două egalități sunt tocmai cele propuse în enunțul problemei.

*Notă.* Articolul conținând teorema „dreptelor concurente" a fost scris pe când funcționam ca profesor de matematici la liceul „Mânăstirea Dealu". Conținutul articolului fiind cu totul elementar, el a apărut abia după 10 ani dela trimiterea spre publicare. Apariția lui de curând în *Gazeta Matematică* (Septembrie 1931), m'a determinat, în mod „automat", să-l completez, cu toate că ocupațiile mele, astăzi, sunt într'un domeniu cu totul altul decât al matematicilor.

GH. ZAPAN
Conferențiar de psihologie.

## MIȘCAREA GAZELOR CU VITEZE FOARTE MARI

Se cunosc legile mișcării gazelor care ies dintr'un rezervor, printr'o *secțiune contractată* (genul tuburilor «LAVAL»).

Imi propun să studiez cazul când gazele intră în secțiunea contractată cu o viteză inițială dată.

Fie $W_0$, $p_0$ și $\rho_0$, viteza, presiunea și massa specifică a gazului înainte de a intra în secțiunea contractată și W, $p$, $\rho$ aceleași date la un moment dat. Atunci avem ecuațiunile cunoscute:

1) $W \cdot dw + \frac{dp}{\rho} = 0$ (ecuația mișcării)

2) $p = k \cdot \rho^n$ (ecuația detentei)

3) $\rho \cdot S \cdot W = \text{const.}$ (ecuația debitului)

S, fiind secțiunea vinei gazoase. Valoarea secțiunii contractate se găsește prin anularea derivatei ecuației 3) și înlocuirea lui $dw$ din ecuația 1), adică:

$$\frac{dS}{S} = \frac{d\rho}{\rho}\left[\frac{dp}{d\rho} \cdot \frac{1}{w^2} - 1\right].$$

Deci în secțiunea contractată vom avea:

4) $$W_1^2 = \frac{dp}{d\rho} = n \cdot K \cdot \rho_1^{n-1} = n \cdot \frac{p_1}{\rho_1}$$

unde $n$ este raportul căldurilor specifice.

Inlocuind apoi în 1) pe:

$$\frac{dp}{\rho} = n \cdot K \cdot \rho^{n-2} \cdot d\rho = n \cdot \frac{p_0}{\rho_0^2} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-2} \cdot d\rho$$

şi integrând, obţinem:

$$\frac{W^2}{2} + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-1} = \frac{W_0^2}{2} + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}$$

dar cum:

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

atunci:

$$5) \quad \frac{W^2}{2} + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{W_0^2}{2} + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}.$$

In secţiunea contractată $W = W_1$, atunci în 4) punând:

$$\rho_1 = \rho_0 \cdot \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

găsim:

$$6) \quad \frac{p_1}{p_0} = \left[\frac{2}{n+1} + \frac{n-1}{n(n+1)} \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \cdot W_0^2\right]^{\frac{n}{n-1}}.$$

Apoi cum:

$$W_1^2 = n \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

urmează că vom avea:

$$7) \quad W_1^2 = \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{n-1}{n+1} \cdot W_0^2.$$

Dacă notăm acum cu *a viteza sunetului* în mediul gazelor ce ar intra în secţiunea contractată fără viteză iniţială, atunci vom avea:

$$8) \quad a^2 = \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{p'_0}{\rho'_0} = \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left(\frac{p'_0}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

unde $p'_0$ şi $\rho'_0$ reprezintă caracteristicile gazului când $W_0 = 0$.

Inlocuind în 7) pe $a^2$ vedem că :

$$9) \qquad W_1^2 = a^2 \cdot \left(\frac{p_0}{p_0'}\right)^{\frac{n-1}{n}} + \frac{n-1}{n+1} \cdot W_0^2 .$$

Presupunând apoi că gazele, după ce părăsesc secțiunea contractată es în atmosferă, atunci în ecuația 5) putem admite că :

$$\frac{p}{p_0} \cong 0$$

prin urmare ne rămâne în atmosferă viteza :

$$10) \quad W_2^2 = W_0^2 + \frac{2n}{n-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} = W_0^2 + \frac{n+1}{n-1} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{p_0}{p_0'}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

sau ținând seamă de 9), mai putem scrie :

$$11) \qquad W_2^2 = \frac{n+1}{n-1} \cdot W_1^2 .$$

*Observațiuni :*

Aceste chestiuni mi-au fost foarte necesare unui studiu făcut asupra interiorului gurilor de foc, unde gazele pulberilor care arde, capătă viteze considerabile. Nu am citit nicăeri cazul prezentat mai sus, totuș simplitatea lui mă face să cred că trebuie să fie cunoscut.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

## ASUPRA AXELOR CONICELOR UNUI TRIUNGHIU

Consider triunghiul ABC în sistemul de axe (AC, AB) și fie (C), (Γ), ($\gamma$) conicele, conjugată, circumscrisă și înscrisă acestuia, de centru M $(x, y)$.

Ecuația unei astfel de conici este :

$$A(X-x)^2 + 2B(X-x)(Y-y) + c(Y-y)^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

unde A, B și C sunt coeficienți de determinat.

I.

Conica (1) e conjugată lui ABC. Scriu că polarele lui B și C, față de ea, se confundă cu laturile AC, AB.

$$B(b-x) - Cy = 0 \qquad Ax^2 + 2B\,xy + Cy^2 + 1 - Abx - Bby = 0$$

$$-Ax + B(c-y) = 0 \qquad Ax^2 + 2B\,xy + Cy^2 + 1 - Bcx - Ccy = 0.$$

De unde se scoate:

$$A = \frac{y-c}{x(cx+by-bc)},\ B = -\frac{1}{cx+by-bc},\ C = \frac{x-b}{y(cx+by-bc)}$$

Pentru a trece în sistemul triliniar de coordonate, ABC triunghiu fundamental, fac transformarea:

$$x = \frac{b\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \qquad y = \frac{c\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Şi voi avea:

$$A = \frac{(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)}{b^2\gamma\alpha} \quad B = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{bc\alpha} \quad C = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}{c^2\alpha\beta}$$

Ecuaţia care dă semiaxele conicei (1) este:

$$(Ac - B^2)r^4 + (A + c - 2B\cos\theta)r^2 + \sin^2\theta = 0 \qquad (\theta = A).$$

Inlocuesc pe A, B, $c$ şi am ecuaţia care dă semiaxele conicii (C), conjugată lui ABC, şi de centru $M(\alpha, \beta, \gamma)$.

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3 r^4 + (\alpha+\beta+\gamma)(a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta)r^2 + 4S^2\alpha\beta\gamma = 0 \quad (2)$$

Discuţia semnelor rădăcinilor ecuaţiei (2) conduce la cunoscuta clasificare a conicelor conjugate, după semnul sau valoarea cantităţii $\alpha\beta\gamma\ (\alpha+\beta+\gamma)$.

Anulând coeficientul lui $r^2$ găsesc:

Locul centrelor hiperbolelor echilatere conjugate unui triunghiu, e cercul circumscris acestuia.

Hiperbola $H_c$, studiată de D-l M. NICOLAU în G. M. XXVII. 347, face parte din această categorie.

Dacă $p$ şi $q$ sunt semidiametrii principali ai lui (C),

$$p^2 q^2 = \frac{4S^2\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^3}$$

Iar suprafaţa ei:

$$T = \pm \frac{2\pi S}{\alpha+\beta+\gamma}\sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}},\ \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} > 0 \text{ (elipse).} \quad (3)$$

Iar suma patratelor semiaxelor:

$$p^2 + q^2 = -\frac{a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$$

Pe de altă parte se cunoaşte formula:

$$\overline{MP}^2 = \frac{\alpha\overline{PA}^2 + \beta\overline{PB}^2 + \gamma\overline{PC}^2}{\alpha+\beta+\gamma} - \frac{a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$$

fac: $$P \equiv 0 \quad \therefore \quad PA = PB = PC = R.$$

Şi: $p^2 + q^2 = \overline{MO}^2 - R^2$, relaţie remarcabilă. (4)

Locul centrelor conicelor conjugate, astfel ca suma patratelor axelor să fie constantă, e un cerc concentric cu cercul (O).

Formula (4) se poate enunţa:

Puterea centrului conicei (C), faţă de cercul ABC, e egală cu suma patratelor semiaxelor acesteia.

Sau dacă înlocuesc:

$$\overline{OM}^2 = \frac{-\overline{F_1F_2}^2 + 2\overline{OF_1}^2 + 2\overline{OF_2}^2}{4}$$

unde $F_1$ şi $F_2$ sunt focarele conicei (C),

$$\overline{F_1F_2}^2 = 4(p^2 - q^2) \quad (\overline{OF_1}^2 - R^2) + (\overline{OF_2}^2 - R^2) = 4p^2. \qquad (5)$$

Suma puterilor focarelor conicei (C), faţă de cercul ABC, e egală cu $4p^2$. Teorema are o mare analogie cu cea a lui LAGUERRE relativă la conicele înscrise. [De ex. G. M. XXXIII. 323].

II.

Fie (Γ) conica circumscrisă triunghiului ABC, şi cu centrul în $M(x, y)$.

Procedez ca mai sus şi am:

$$A = -\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)}{b^2\gamma\alpha} \qquad B = -\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}{2bc\,\alpha\beta\gamma}$$

$$C = -\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}{c^2\alpha\beta}.$$

Iar ecuaţia corespunzătoare:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2\Delta r^4 - 2\alpha\beta\gamma\Delta\left[\sum\frac{a^2}{-\alpha+\beta+\gamma}\right]r^2 + 16S^2\alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0 \qquad (6)$$

unde

$$\Delta = -\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 + 2\alpha^2\beta^2,$$

discriminantul conicei (Γ).

Anulez coeficientul lui $r^2$ :

$$\sum \frac{a^2}{-\alpha+\beta+\gamma} = 0.$$

Locul centrelor hiperbolelor echilatere circumscrise triunghiului, e cercul celor nouă puncte.

Fie $s$ şi $t$ semiaxele conicei (Γ):

Suprafaţa ei este:

$$\Omega = \pi st = \frac{4\pi S\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)\sqrt{\Delta}} \qquad (7) \qquad \Delta > 0 \quad \text{cazul elipsei.}$$

Elipsa lui STEINER: $\Omega = \frac{4\pi S}{3\sqrt{3}}$ rezultat cunoscut.

Elipsa cu centrul în I $(a, b, c)$:

$$\Omega = 2\pi Rr.$$

Apoi:

$$s^2 + t^2 = \frac{2\alpha\beta\gamma \sum \frac{a^2}{-\alpha+\beta+\gamma}}{(\alpha+\beta+\gamma)^2} \qquad (8)$$

Elipsa lui STEINER:

$s^2 + t^2 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ ; problema 2554 G. M.

Elipsa cu centrul în I:

$$s^2 + t^2 = 4R(R - r).$$

De altfel pentru aceasta:

$$s^2 = 2R(R - r + \overline{OI}) \qquad t^2 = 2R(R - r - \overline{OI}).$$

$s$ şi $t$ sunt medii geometrice între diametrul cercului circumscris şi segmentele cuprinse între acesta şi cercul înscris.

Se poate calcula distanța dintre focare:

$$d^2 = \frac{16}{9}\sqrt{a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}$$

pentru elipsa lui STEINER (Vezi G. M. XXXI. 441 articolul lui M. AGRONOMOF).

Pentru elipsa cu centrul în I:

$$d^2 = 16R \cdot \overline{OI}.$$

Dacă $(\Gamma_a)$, $(\Gamma_b)$, $(\Gamma_c)$ sunt conicele asociate conicei $(\Gamma)$, $\Omega_a$, $\Omega_b$, $\Omega_c$ suprafețele lor,

$$\Omega_a = \frac{4S\alpha\beta\gamma}{(-\alpha+\beta+\gamma)\sqrt{\Delta}} \qquad \therefore \frac{1}{\Omega_a}+\frac{1}{\Omega_b}+\frac{1}{\Omega_c}=\frac{1}{\Omega} \qquad (9)$$

III.

Dacă $(\gamma)$ e conica înscrisă lui ABC de centru M $(\alpha, \beta, \gamma)$, găsesc:

$$A = -\frac{4(\alpha+\beta+\gamma)\beta^2}{b^2\Delta} \quad B = -\frac{2(\alpha+\beta+\gamma)^2(-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{2bc\Delta}$$

$$C = -\frac{4(\alpha+\beta+\gamma)\gamma^2}{c^2\Delta}.$$

Și ecuația care dă semiaxele conicei $(\gamma)$ e:

$$4(\alpha+\beta+\gamma)^4r^4 - 2(\alpha+\beta+\gamma)^2[\Sigma\alpha^2(-a^2+b^2+c^2)]r^2+4S^2\Delta=0. \quad (10)$$

Anulez coeficientul lui $r^2$:

Locul centrelor hiperbolelor echilatere înscrise unui triunghiu, e cercul său conjugat; ortogonal cercurilor descrise de laturi ca diametre, are centrul în H, iar raza, media geometrică între raza cercului înscris și diametrul cercului circumscris al triunghiului ortic.

Găsesc pentru suprafața conicei $(\gamma)$:

$$\omega = \pi mn = \frac{\pi S\sqrt{\Delta}}{(\alpha+\beta+\gamma)^2} \qquad (\Delta>0). \qquad (11)$$

Pentru elipsa lui STEINER, avem un rezultat ușor de prevăzut:

$$\omega = \frac{\pi S}{3\sqrt{3}}.$$

Consider elipsa înscrisă cu focare punctele lui BROCARD (elipsa lui BROCARD).

$\omega = 2\pi R^2 \sin^3 V$ (V, unghiul lui BROCARD).

Apoi:

$$m^2 + n^2 = \frac{\Sigma \alpha^2 (-a^2 + b^2 + c^2)}{2(\Sigma \alpha)^2} \qquad (12)$$

Pentru elipsa lui BROCARD:

$$m^2 + n^2 = R^2 \sin^2 V (1 + 4 \sin^2 V)$$

$$\therefore \quad m = R \sin V \qquad n = 2R \sin^2 V$$

valori remarcabile ale axelor acestei conice.

Analog cu formula (9) găsesc:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega_a}} + \frac{1}{\sqrt{\omega_b}} + \frac{1}{\sqrt{\omega_c}} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \qquad (13)$$

Și:

$$\frac{1}{\sqrt{m_a^2 + n_a^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_b^2 + n_b^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_c^2 + n_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} \cdot \qquad (14)$$

* * *

Punând condiția ca ecuațiile (6) și (10) să aibă rădăcinile proporționale, găsesc:

$$\Sigma \alpha^2 (-a^2 + b^2 + c^2) - \Sigma \beta\gamma\, a^2 = 0.$$

Sau:

Locul punctelor M, astfel încât conicele (Γ) și (γ) să fie asemenea, e cercul ortocentroidal (Descris pe G H ca diametru).

Aplicațiile se pot, evident, continua; se pot găsi lucruri interesante, fie luând alte puncte particulare, fie căutând, pe aceeaș cale, a deduce ecuațiile axelor, sau coordonatele focarelor conicelor considerate.

ION C. VASILIU
Șc. Politehnică.

## NOTE MATEMATICE

37. *Alte zece Geometrii diverse.* (A se vedea Nota No. 33 din Anul XXXIII, pag. 451).

212. **Analagmatică.** *A. Demoulin.* Sur la géométrie anallagmatique des courbes non-sphériques. (Comunicare facută la Societatea matematică din Belgia, în 1927).

213. **Baricentrică.** Vezi *Mathesis* 1926 pag. 263.

214. **Centralafină.** *G. Siehl.* Zentralafine und Centraläquiforme Geometrie. Freiburg. 1921.

215. **Centralechiformă.** Vezi precedenta.

216. **Diagramelor.** Vezi *Chaleur & Industrie* No. 104. Decemvrie 1928.

217. **Didactică.** Géometrie didactique. Vezi *Journal De Vuibert.* Vol. V. pag. 129.

218. **Misterioasă.** *G. W. Leibniz.* De geometria recondita. 1686.

219. **Sporturilor.** Sportmässige Geometrie. Vezi *E. H. Timmerding.* Die Erziehung der Anschaung.

220. **Sublima.** *A. Russe.* Géométrie sublime. Lyon.

221. **Tensorială.** Vezi Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXIII. pag. 561.

(Va urma) I. IONESCU.

38. *Asupra mecanicelor diverse.* Mecanica dată în Nota 32, Anul XXVIII pag. 207, sub No. 25, fiind aceiaşi cu cea dată sub No. 33 în Nota No. 80 din acelaşi an, pag. 406, înlocuim pe aceasta din urmă cu:

33. **Resoartelor.** *A. Boulanger.* La mécanique des ressorts. Paris 1927.

La Mecanică de sub No. 26 din prima Notă menţionată mai sus se va scrie **„maşinăriilor“** în loc de **„maşinilor“**, aceasta din urmă fiind trecută în Nota 80 din acelaşi an, sub No. 34.

**Mecanica vectorială** fiind trecută sub No. 20 în Nota 1 din Anul XXVIII şi fiind reprodusă şi în Nota 47 din Anul XXXII pag. 328, sub No. 70, aceasta din urmă se înlocuieşte cu următoarea:

70. **Fină.** Vezi *Feinmechanik* în Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, din 8 Decemvrie 1928.

I. IONESCU.

# BIBLIOGRAFIE

**Anales de la Sociedad Cienttifica Argentina.** Tomul CXIII. Fascicola IV. Aprilie 1932. Buenos Aires. O teoremă asupra produsului de serii sumabile, de J. G. VIGNAUX.

**Boletin del Seminario Matematico Argentino.** No. 9 Ianuarie 1932. Buenos Aires. Asupra unei proprietăţi a integralelor multiple elementare, de R. H. J. GERMAY. Afinitatea în plan ca produs al unei mişcări şi a unei omologii, de P. PINEDA. Asupra curbelor algebrice situate pe o cuadrică riglată, de P. PINEDA. Algoritmul sumării corelative a integralei lui LAPLACE şi algoritmul lui STIELTJES, de R. SAN JUAN.

**Boletin Matematico Elemental.** Anul III. No. 3, Mai 1932. Buenos Aires. Al treilea Concurs al Buletinului matematic elementar. Puncte complimentare.

**Journal des Mathematiques elementaires,** publié par H. VUIBERT. Anul 56 No. 17. Iunie 1932. Paris.

**Idem.** No. 18. Iunie 1932

**Revista Matematică din Timişoara.** Anul XII. No. 4, Iunie 1932. Timişoara. Note pe marginea filosofiei lui NEWTON, de N. O. ZAHARIA.

P. MONTEL. *Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes* recueillies et rédigées par P. SERGESCO. (Publication du Séminaires mathématique de l'Université de Cluj) Paris. Gauthier-Villars et C-ie. 1932.

P. SERGESCU. *Spiritul cel nou în Legea învăţământului universitar.* Bucureşti 1932.

**Universitatea Regele Ferdinand I. Cluj.** *Seminarul de matematici* (Extras din anuarul Universităţii pe anul 1930—1931). Cluj 1932.

GASTON JULIA. *Principes géometriques d'Analyse.* Deuxième partie. Paris. Gauthier-Villars, 1932.

E vorba, în acest volum ca şi în cel anterior publicat sub acelaş titlu, de cercetări cu totul moderne din Teoria funcţiunilor. Volumul e relativ restrâns, 120 pagini, dar numărul rezultatelor e foarte bogat şi foarte interesant. Toate aceste rezultate sunt legate de principii generale care au un caracter geometric, în particular în legătură cu reprezentarea conformă. Multe din ele aparţin autorului, care e unul din matematicii distinşi ai Franţei, altele sunt obţinute de matematici cunoscuţi. Una din teoreme — teorema IV dela pag. 100 — privitoare la mijlocirile modulurilor funcţiunilor analitice, aparţine D-lui TIBERIU POPOVICI.

Aceasta e prin urmare una din cărţile de iniţiare, bine făcute, la metodele şi la rezultatele Analizei moderne şi de aceea merită să fie recomandată.

G. Ţ.

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

## CERERI

219. După legea veche a învăţământului, pentru ocuparea unei catedre universitare se cerea numai bacalaureatul şi un concurs pentru ocuparea locurilor vacante. In aceste condiţiuni, cari au fost profesorii de matematici la Universitatea din Bucureşti şi Iaşi, care nu au avut Licenţa în ştiinţele matematice ?

I. I.

## PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3514. *Notaţiile fiind cele obişnuite într'un triunghiu, iar dacă unghiul* $\varphi$ *satisface relaţia:*

$$\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B \operatorname{cotg}C$$

*să se arate că avem:*

$$*) \quad (2R + r - r_a)(2R + r - r_b)(2R + r - r_c) = abc \cdot \operatorname{cotg}\varphi \qquad (1)$$

*şi*

$$\frac{h_a}{\sin\varphi} = \frac{R(\cos 2A + 1)}{\sin(\varphi - A)}. \qquad (2)$$

I. Nicolau-Dobridor.

I. *Demonstrarea primei relaţii:*
Se ştie (G. M. XXIX), că

$$a \operatorname{cotg}A = 2R + r - r_a$$
$$b \operatorname{cotg}B = 2R + r - r_b$$
$$c \operatorname{cotg}C = 2R + r - r_c$$

Inmulţindu-le parte cu parte avem :

$$abc \operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B \operatorname{cotg}C = (2R + r - r_a)(2R + r - r_b)(2R + r - r_c)$$
$$= abc \operatorname{cotg}\varphi.$$

Gh. M. Călin (Caracal).

*) S'a rectificat în loc de:

$$\Upsilon (R - 2r_a)(R - 2r_b)(R - 2r_c) = abc \operatorname{cotg}\varphi$$

Au arătat că relaţia cum fusese propusă era eronată D-nii: Ulpiu M. Florescu (Craiova), C. I. Istinie-Brezuica (Caracal), Al. V. Roşculeţ (C-ţa).

Autorul problemei şi numeroşi corespondenţi s'au servit ca să stabilească relaţia publicată greşit, bazându-se pe relaţiile $2r_a = R(1 - \cos A)$, etc..... date la pag. 190 din „Compléments de Trig" par F. J., relaţii eronate, după cum a arătat şi D-l Roşculeţ, astfel:

Făcând înlocuirile

$$1 - \cos A = 2\sin^2\tfrac{1}{2}A \quad \text{şi} \quad r_a = p\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A,$$

se obţine

$$2p\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A = 2R\sin^2\tfrac{1}{2}A \quad \text{sau} \quad 4p = 2R\sin A,$$

$$\therefore \quad 4p = a \quad \text{ceeace nu e posibil.}$$

D-l Gh. Th. Gheorghiu a dat primei relaţii forma:

$$\gamma\left(R - \frac{ar_a}{2p}\right)\left(R - \frac{br_b}{2p}\right)\left(R - \frac{cr_c}{2p}\right) = abc\,\mathrm{cotg}\varphi.$$

II. *Demonstrarea relaţiei (2) din enunţ.*

*Soluţie* dată de D-nii: Ulpiu M. Florescu, Gh. Th. Gheorghiu, S.-loc. A. I. Călin, N. Popovici-Corodeanu, S.-loc. A. I. Stan, Cezar Coşniţă, I. C. Istinie-Brezuica, C. V. Costăchescu, Gh. M. Călin, I. N. Craiu, V. Gr. Dănciulescu, D. Iovănescu, Felix Iovănescu, S.-loc. Th. N. Panaite, Al. V. Roşculeţ, I. Vasiliev, I. O. Zaharia.

Pornim dela relaţia de condiţie pusă sub forma:

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C,$$

care se mai poate scrie:

$$\frac{\sin\varphi\,\cos A}{\cos\varphi\,\sin A} = \frac{\sin B\,\sin C}{\cos B\,\cos C}.$$

Scăzând în fiecare parte câte o unitate se obţine:

$$\frac{\sin\varphi\cos A - \cos\varphi\sin A}{\cos\varphi\sin A} = \frac{\sin B\sin C - \cos B\cos C}{\cos B\cos C}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin(\varphi - A)}{\cos\varphi\sin A} = \frac{\cos A}{\cos B\cos C}.$$

Inmulțind această ultimă relație, cu relația de condiție, avem:

$$\frac{\sin(\varphi - A)}{\cos\varphi \sin A} \cdot \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\cos A}{\cos B \cos C} \cdot \operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B \operatorname{cotg}C$$

$$\therefore \quad \frac{\sin(\varphi - A)}{\sin\varphi} = \frac{\cos^2 A}{\sin B \sin C}$$

sau

$$\frac{\sin(\varphi - A)}{\sin\varphi} = \frac{2R\cos^2 A}{2R \sin B \sin C}.$$

Ținând seamă de relațiile:

$$2\cos^2 A = 1 + \cos 2A \quad \text{și} \quad 2R \sin B \sin C = h_a$$

obținem imediat relația (2), adică:

$$\frac{\sin(\varphi - A)}{\sin\varphi} = \frac{R(1 + \cos 2A)}{h_a}.$$

*Notă.* In afară de relațiile analoage

$$\frac{\sin(\varphi - B)}{\sin\varphi} = \frac{R(1 + \cos 2B)}{h_b}, \text{ etc. . . .}$$

(I. O. Zaharia.)

se pot obține și alte relații interesante ca:

$$\frac{\sin(\varphi + A)}{\sin(\varphi - A)} = \frac{\cos(B - C)}{\cos A}.$$

(U. M. Florescu).

Colonel Gh. I. Liteanu.

---

PROBLEMA 3710 *). *Să se facă calculabilă prin logaritmi expresiunea:*

$$E = \Sigma \sin a [\cos a \cos 2(b + c) - \cos \tfrac{1}{2}(b + c) \cos \tfrac{1}{2}(b - c)] + \sin 2a \sin 2b \sin 2c.$$

*Să se deducă apoi, că într'un triunghiu oarecare avem relațiunea*

$$4[\Sigma \sin A \sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}(B - C) - 2\cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C] = \sin 4A + \sin 4B + \sin 4C + 4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C.$$

Gh. Th. Gheorghiu.

---

*) Enunț rectificat: în partea întâia ambele relații au semnul minus între termeni.

*Soluţie* dată de D-nii: CEZAR COŞNIŢĂ (Bârlad), H. P. IONESCU-BISS, EUG. I. DUMITRESCU (Buzău), P. I. GHIŞOIU, N. N. MIHĂILEANU (Constanţa), JUSTIN N. VÂLCEANU (Tg.-Jiu), N. N. VELICESCU.

Avem succesiv

$$E = \tfrac{1}{2}\Sigma\,[\sin 2a\cos 2(b+c) - \sin a(\cos b + \cos c)] + \sin 2a\sin 2b\sin 2c =$$

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\,[\sin 2a(\cos 2b\cos 2c - \sin 2b\sin 2c) - \sin(b+c)] + \sin 2a\sin 2b\sin 2c =$$

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\,[\sin 2a\cos 2b\cos 2c - \sin(b+c)] - \tfrac{1}{2}\sin 2a\sin 2b\sin 2c =$$

$$\tfrac{1}{2}[\sin 2(a+b+c) - \sin(b+c) - \sin(c+a) - \sin(a+b)]$$

$$= \sin\frac{b+c+2a}{2}\cos\frac{3(b+c)+2a}{2} - \sin\frac{b+c+2a}{2}\cos\frac{b-c}{2}$$

$$= \sin\frac{b+c+2a}{2}\left[\cos\frac{3(b+c)+2a}{2} - \cos\frac{b-c}{2}\right]$$

$$= -2\sin\frac{b+c+2a}{2}\sin\frac{c+a+2b}{2}\sin\frac{a+b+2c}{2}.$$

In cazul unui triunghiu oarecare, prin înlocuirea cantităţilor *a, b, c* prin unghiurile triunghiului, A, B, C, avem:

$$\sin\frac{B+C+2A}{2} = \sin\left(90^0 + \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{a}\ ;$$

$$\sin A\cos A\cos 2(B+C) = \tfrac{1}{4}\sin 4A\,;\ \cos\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}(b-c) = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

şi expresiunea E devine:

$$E = \Sigma\left[\tfrac{1}{4}\sin 4A - \sin A\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right] + \sin 2A\sin 2B\sin 2C$$

$$= -2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Inmulţind ambele părţi cu 4 şi grupând altfel termenii, se obţine

$$4\left[\Sigma\sin A\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right] = \sin 4A + \sin 4B + \sin 4C + 4\sin 2A\sin 2B\sin 2C,$$

relaţie, ce se putea verifica şi direct, deoarece fiecare parte se reduce la zero.

COL. G. I. LIT.

PROBLEMA 3828. *Fie* ABC *un triunghiu oarecare şi* M, N, P *mijloacele laturilor sale. Se iau numai într'un sens punctele* X, Y, Z *astfel ca*

$$\overline{MX} = 2\, d_a\, \mathrm{tg}\,(B - C)$$

$$\overline{NY} = 2\, d_b\, \mathrm{tg}\,(C - A)$$

$$\overline{PZ} = 2\, d_c\, \mathrm{tg}\,(A - B)$$

$d_a$, $d_b$, $d_c$ *fiind distanţele punctului lui* EULER *la laturi.*

*Să se demonstreze că* AX, BY, CZ *sunt concurente.*

CONST. C. POPOVICI.

*Soluţia I* dată de D-nii: MARIUS MARGULIUS, CORNELIU N. POPESCU, P. I. GHIŞOIU, CONST. DAN.

AX, BY şi CZ vor fi concurente, când ar fi îndeplinită condiţiunea teoremei lui CEVA:

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = -1$$

Dar

$$XB = MX + BM = 2\, d_a\, \mathrm{tg}\,(B - C) + \frac{a}{2}\ ;$$

iar

$$d_a = \frac{R}{2} \cos\,(B - C) \qquad \text{(G. M. vol. XXXVII pag. 105).}$$

Deci

$$BX = R \sin\,(B - C) + R \sin A = R[\sin(B - C) + \sin(B + C)] = 2R \sin B \cos C.$$

Tot astfel

$$CX = \frac{a}{2} - MX = \frac{a}{2} - R \sin\,(B - C) = 2R \sin C \cos B.$$

$$\therefore \qquad \frac{BX}{CX} = \frac{\mathrm{tg}\ B}{\mathrm{tg}\ C}\ ; \quad \text{etc....}$$

Prin urmare

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = \frac{\mathrm{tg}\,B}{\mathrm{tg}\,C} \cdot \frac{\mathrm{tg}\,C}{\mathrm{tg}\,A} \cdot \frac{\mathrm{tg}\,A}{\mathrm{tg}\,B} = 1.$$

în valoare absolută, căci în privinţa semnului, cele trei rapoarte fiind negative, produsul lor va fi egal cu — 1. Deci cele trei drepte sunt concurente.

*Soluţia II* dată de D-nii: I. MURĂROIU (Braşov), şi N. N. MIHĂILEANU (Constanţa).

Se ştie că

$$d_a = \frac{R\cos(B-C)}{2}\ ;\ d_b = \frac{R\cos(C-A)}{2}\ ;\ d_c = \frac{R\cos(A-B)}{2}.$$

Inlocuind găsim

$$MX = -R\sin(B-C)\ ;\ NY = R\sin(C-A)\ ,\ PZ = R\sin(A-B).$$

Dar aceste distanţe sunt chiar segmentele $K_a$, $K_b$, $K_c$, din laturile triunghiului cuprinse în cercul lui EULER (G. M. XXX, p. 278).

Rezultă că punctele X, Y, Z sunt picioarele înălţimilor sau simetricele lor faţă de mijloacele laturilor şi se ştie că înălţimile triunghiului sau transversalele lor unghiulare reciproce sunt concurente.

COL. G. I. LIT.

---

PROBLEMA 3848. *Notaţiile fiind cele obişnuite într'un triunghiu oarecare, să se stabilească relaţiunea*

$$\sum \cos A\cos^5\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2} = \frac{p(3R+r)}{4R^2}\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{A-C}{2}.$$

PETRE I. GHIŞOIU.

Notând cu E primul membru al relaţiei, avem

$$E = \Sigma \cos A\cos^4\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(B-C) =$$

$$= \tfrac{1}{8}\Sigma \cos A(1+\cos A)^2(\cos C-\cos B) = \tfrac{1}{8}\Sigma(1+\cos^2 A+$$

$$+ 2\cos A)\cos A(\cos C-\cos B) = \tfrac{1}{8}\Sigma \cos A(\cos C-\cos B)+$$

$$+\tfrac{1}{4}\Sigma \cos^2 A(\cos C-\cos B)+\tfrac{1}{8}\Sigma \cos^3 A(\cos C-\cos B).$$

Folosind următoarele identităţi algebrice:

$$\Sigma x\,(z-y)=0$$

$$\Sigma x^2(z-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$$

$$\Sigma x^3(z-y)=(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

expresiunea de mai sus se pune sub forma

$$E=\tfrac{1}{4}(\cos A-\cos B)(\cos B-\cos C)(\cos C-\cos A)(1+\tfrac{1}{2}\Sigma\cos A).$$

Descompunând în factori diferenţele de cosinuri, şi având în vedere relaţiile

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C=\frac{r}{4R}=\tfrac{1}{4}(\cos A+\cos B+\cos C-1);$$

$$\frac{p}{4R}=\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C$$

avem succesiv:

$$E=2\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}(B-A)\sin\tfrac{1}{2}(C-B)\sin\tfrac{1}{2}(A-C).\left[1+\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{r}{R}\right)\right]$$

$$E=2\cdot\frac{p}{4R}\cdot\frac{3R+r}{2R}\cdot\sin\tfrac{1}{2}(B-A)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(C-B)\sin\tfrac{1}{2}(A-C)$$

$$=\frac{p(3R+r)}{4R^2}\sin\tfrac{1}{2}(B-A)\sin\tfrac{1}{2}(C-B)\sin\tfrac{1}{2}(A-C)$$

adică relaţia din enunţ.

Cezar Coşniţă
Bârlad.

---

PROBLEMA 3969. *Printr'un punct* M *luat pe latura* BC *a unui triunghiu* ABC *se duc perpendicularele* MP *şi* MQ *pe* AC *şi* AB.

1°. *Să se exprime aria triunghiului* MPQ *în funcţie de* MP=x.

2°. *Să se exprime aria triunghiului* MPQ *în funcţie de raportul* $\frac{MP}{MQ}=t$.

3°. *Să se demonstreze că există pe* BC *două puncte* M *pentru care aria triunghiului are o valoare dată. Să se arate că aceste puncte sunt simetrice faţă de mijlocul lui* BC.

4°. *Să se determine punctul* M *pentru care aria triunghiului* MPQ *este maximă.*

D. V. Ionescu.

*Soluţie* dată de D-ra E. ANTONIU (Cluj) şi de D-nii: S.-LOC. AURELIAN STAN (Cluj), S.-LOC. I. ZAMFIRESCU (Piteşti), VELEA MIHAIL (Cluj), ARŞAVSKI ALEXE (Cluj), IONESCU I. VICTOR (Bucureşti), GHIŞOIU I. PETRE (Bucureşti), OLTEANU ŞTEFAN (Blaj), MIHĂILEANU NICOLAE (Constanţa), ŞERBĂNESCU FLORICEL, GHEORGHIU ADRIAN, ŞOVA GRIGORENI şi VASILE VASSU (Cluj).

1°. Să notăm cu $x$ şi $y$ segmentele MP şi MQ. Mai notăm cu $\Sigma$ aria triunghiului MPQ şi cu S aria triunghiului ABC. Avem:

$$2\Sigma = xy \sin A. \tag{1}$$

$$bx + cy = 2S. \tag{2}$$

Eliminând pe $y$ între ecuaţiile (1) şi (2), se găseşte:

$$\Sigma = \frac{S \sin A}{c} x - \frac{b \sin A}{2c} x^2. \tag{3}$$

2°. Fie:

$$t = \frac{x}{y}. \tag{4}$$

Dacă eliminăm între ecuaţiile (1), (2) şi (4) pe $x$ şi pe $y$ se găseşte $\Sigma$ în funcţie de $t$.

Ecuaţia (4) se mai scrie:

$$\frac{x}{t} = \frac{y}{1} = \frac{bx + cy}{bt + c} = \frac{2S}{bt + c}$$

de unde rezultă imediat că:

$$\Sigma = 2S^2 \sin A \frac{t}{(bt+c)^2}. \tag{5}$$

3°. Să căutăm deasemenea expresia lui $\Sigma$ în funcţie de:

$$u = \frac{MC}{MB}.$$

Observăm că:

$$x = MC \sin C \quad , \quad y = MB \sin B,$$

de unde

$$t = u \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b} u.$$

Rezultă că:

$$\Sigma = \frac{2S^2 \sin A}{bc} \cdot \frac{u}{(u+1)^2} .$$

Să presupunem că $\Sigma$ este dat; punctele M care îi corespund sunt date de ecuaţia.

$$\frac{u}{(u+1)^2} = \frac{1}{m} , \tag{6}$$

unde s'a notat

$$m = \frac{2S^2 \sin A}{bc\,\Sigma} .$$

Ecuaţia (6) se mai scrie:

$$u^2 + (2 - m)\, u + 1 = 0.$$

Ea este de gradul al doilea, deci pe dreapta BC există două puncte $M', M''$ la care corespund arii egale cu $\Sigma$.

Produsul celor două rădăcini fiind egale cu 1, rezultă că:

$$\frac{M'B}{M'C} \cdot \frac{M''B}{M''C} = 1 ,$$

ceeace dovedeşte că $M'$ şi $M''$ sunt simetrice faţă de mijlocul lui BC.

$4^0$. Maximul lui $\Sigma$ are loc odată cu maximul funcţiunei

$$f(u) = \frac{u}{(u+1)^2} .$$

Observăm că putem scrie:

$$f(u) = \tfrac{1}{4} - \frac{(u-1)^2}{4\,(u+1)^2} .$$

de unde rezultă că maximul are loc pentru $u = 1$, şi că valoarea maximă a lui $f(u)$ este $\frac{1}{4}$.

Maximul lui $\Sigma$ este deci

$$\Sigma_1 = \frac{S^2 \sin A}{2\,bc} .$$

Punctul M care corespunde la $u = 1$, este mijlocul lui BC.

*Observare :*

Fie M' şi M'' cele două puncte dela No. 3, simetrice în raport cu mijlocul lui BC. Notăm cu P', Q' proecţiile lui M' pe AC şi AB şi cu P'', Q'' proecţiile lui M'' pe AC şi AB.

Să notăm cu R intersecţia paralelei duse din P'' la BC, cu M'P' şi cu S intersecţia paralelei duse din Q' la BC, cu M'Q'.

Proprietatea stabilită la No. 3, arată că *dreptele* Q'R, SP *sunt paralele.*

D. V. I.

---

*PROBLEMA 4007. *Să se facă un studiu general al problemei ogarului care aleargă după o vulpe, dându-se lungimea paşilor lor şi numărul paşilor pe care îi fac fiecare în acelaş timp.*

V. Crivăţ.

*Soluţie.* Problema generalizată este : *„O vulpe urmărită de un ogar are* p *sărituri înaintea ogarului; ea face* k *sărituri în timp ce ogarul face* l; *lungimile respective ale săriturilor sunt* m *şi* n. *Câte sărituri va face ogarul ca să ajungă vulpea ?“*

Fie $x$ numărul de sărituri ce voim să aflăm. Ogarul are de parcurs mai întâi cele $p$ sărituri ale vulpei pentru care va face $\left(\frac{p \cdot m}{n}\right)$ sărituri de ale sale. In timp ce ogarul va face cele $x$ sărituri ca să ajungă vulpea, aceasta va mai înainta cu distanţa $\left(\frac{k \cdot m}{l} x\right)$ pentru care ogarul va mai face $\left(\frac{k \cdot m}{l \cdot n} x\right)$ paşi. Aşa dar în total

$$x = \frac{k \cdot m}{l \cdot n} x + \frac{p \cdot m}{n}$$

de unde scoatem:

$$x = \frac{lmp}{ln - km} .$$

Dacă $ln > km$, $x$ este finit şi pozitiv, adică ogarul va ajunge vulpea dacă fuge mai repede ca ea.

Dacă $ln = km$, $x$ este infinit, adică iuţelile lor fiind egale, ogarul va ajunge vulpea la infinit.

In fine dacă $ln < km$, $x$ este finit şi negativ, adică dacă ogarul fuge mai încet ca vulpea, nu o va ajunge niciodată, căci punctul lor de întâlnire a fost îndărăt.

Au rezolvat analog problema D-nii: N. N. MIHĂILEANU, PETRE M. VARLAM şi C. D. IONESCU-ŢIU.

GEORGE ŞT. ROŞCA.

---

PROBLEMA 4008. *Să se demonstreze identitatea:*

$$5\operatorname{tg}5\theta - \operatorname{tg}\theta = \frac{4(2\sin 4\theta - \sin 2\theta)}{1 - 2\cos 2\theta + 2\cos 4\theta}.$$

N. C.

*Soluţie.* Considerăm expresia ce se obţine trecând $\operatorname{tg}\theta$ în membrul al doilea:

$$\frac{4(2\sin 4\theta - \sin 2\theta)}{1 - 2\cos 2\theta + 2\cos 4\theta} + \operatorname{tg}\theta = \frac{4(2\sin 4\theta - \sin 2\theta)\cos\theta + (1 - 2\cos 2\theta + 2\cos 4\theta)\sin\theta}{\cos\theta - 2\cos\theta\cos 2\theta + 2\cos\theta\cos 4\theta}$$

$$= \frac{8\sin 4\theta\cos\theta + 2\cos 4\theta\sin\theta - 4\sin 2\theta\cos\theta - 2\cos 2\theta\sin\theta + \sin\theta}{\cos\theta - (\cos 3\theta + \cos\theta) + (\cos 5\theta + \cos 3\theta)} =$$

$$\frac{5\sin 5\theta + 3\sin 4\theta\cos\theta - 3\cos 4\theta\sin\theta - 3\sin 2\theta\cos\theta - 3\sin\theta\cos 2\theta - \sin(2\theta - \theta) + \sin\theta}{\cos 5\theta}$$

$$= \frac{5\sin 5\theta + 3\sin 3\theta - 3\sin 3\theta - \sin\theta + \sin\theta}{\cos 5\theta} = 5\frac{\sin 5\theta}{\cos 5\theta} = 5\operatorname{tg}5\theta$$

Q. S. D.

*Soluţii* mai complicate, făcând uz de formula lui MOIVRE sau de formule elementare de multiplicare a arcelor dela D-nii: N. N. ALDEA; I. D. CÂRSTOIU; I. V. COJOCARU; VL. CRIVĂŢ; I. DEAC; EM. MEREUŢĂ; M. L. NEGREA; I. PARAPEANU; C. I. NAFORNIŢĂ, G. ST. ROŞCA; N. N. VELICESCU.

Au verificat identitatea D-nii: C. D. RUSU şi N. ZANE.

N. C.

---

PROBLEMA 4136. *Să se rezolve sistemul:*

$$x + \frac{y}{z} = 2, \quad y + \frac{z}{x} = 2, \quad z + \frac{x}{y} = 2.$$

*Să se arate direct că suma* $(x + y + z)$ *nu poate fi decât 3 sau 7.*

I. IONESCU.

*Soluţie* dată de D-l ŞTEFAN E. OLTEANU (Blaj).

Din prima ecuaţie scoatem:

$$x = (2z - y)/z.$$

Această valoare o introducem în ultimele două ecuaţii şi găsim:

$$y + [z^2/(2z - y)] = 2, \qquad z + [(2z - y)/yz] = 2.$$

Din a doua scoatem pe $y$:

$$y = -2z/(z^2 - 2z - 1).$$

Introducem această valoare în prima din ecuaţiile precedente şi găsim:

$$-2z/(z^2 - 2z - 1) + z^2/[2z + 2z/(z^2 - 2z - 1)] = 2,$$

$$\therefore \quad z^4 - 8z^3 + 14z^2 - 7 = (z - 1)(z^3 - 7z^2 + 7z + 7) = 0.$$

De aci se vede că o primă rădăcină este $z = 1$, care introdusă în valorile lui $y$ şi $x$ de mai sus dau $y = 1$, $z = 1$. Deci o primă soluţie a sistemului dat este $x = y = z = 1$. Aci $x + y + z = 3$. Celelalte rădăcini sunt date de ecuaţia de gradul III:

$$z^3 - 7z^2 + 7z + 7 = 0,$$

întrucât necunoscutele $x$, $y$, $z$ intrând în acelaş fel în sistemul dat ajungem tot la această ecuaţie dacă căutam ecuaţia definitivă în $x$ sau $y$. Se vede că suma rădăcinilor este 7. Dacă rezolvăm această ecuaţie de gradul III prin metode aproximative cunoscute, găsim $x = -0{,}603\ldots$, $y = 2{,}109\ldots$, $z = 5{,}494\ldots$ sau le putem face două permutări circulare.

*Notă.* Demonstraţia privitoare la suma rădăcinilor, pentru cazul rădăcinilor egale cu 1, nu e directă. Pentru a demonstra direct că suma nu poate fi decât 3 sau 7, să însemnăm cu $s$ acea sumă:

$$s = x + y + z.$$

Gonim numitorii la ecuaţiile date şi le adunăm. Găsim;

$$xz + yx + zy + x + y + z = 2z + 2x + 2y, \quad \therefore \quad xy + yz + zx = s,$$

La ecuaţiile date oprim numai fracţiile în partea I şi le înmulţim. Găsim:

$$1 = (2 - x)(2 - y)(2 - z) = 8 - 4(x + y + z) + 2(xy + yz + zx) - xyz,$$

$$xyz = 7 - 2s.$$

Ecuaţiile date le înmulţim cu $zy$, $xz$, $yx$ şi le adunăm. Găsim:

$$3xyz + y^2 + z^2 + x^2 = 2(yz + zx + xy) = 2s.$$

Dar:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = s^2 - 2s.$$

Înlocuind în relaţia precedentă găsim:

$$3xyz = 4s - s^2 = 3(7 - 2s),$$

$$\therefore \quad s^2 - 10s + 21 = 0. \qquad \therefore \quad s = 5 \pm \sqrt{5^2 - 21} = 5 \pm 2.$$

rădăcinile sunt numai 3 şi 7, c. c. e. d. d.

I. I.

---

## *EXERCIŢII

38. Să se arate că în orice triunghiu există relaţia:

$$S = p\frac{a_1 b_1 c_1}{16R^2}$$

$a_1$, $b_1$, $c_1$ fiind distanţele dela centrul cercului înscris la centrele cercurilor exînscrise; celelalte notaţii fiind cele cunoscute.

MIHAIL I. POPESCU-STĂNEŞTI.

R. Avem:

$$a_1 = 4R \sin\tfrac{1}{2}A$$

obţinem:

$$S = p\frac{4R\sin\frac{1}{2}A \; 4R\sin\frac{1}{2}B \; 4R\sin\frac{1}{2}C}{16R^2} = 4pR\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C.$$

Cum:

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

$$\therefore \quad 4Rp\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Simplificând obţinem:

$$2p\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C = R\sin A\sin B\sin C$$

De unde

$$2p = 8R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C.$$

Ori

$$4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C = \sin A + \sin B + \sin C.$$

Deci:

$$2p = 2R(\sin A + \sin B + \sin C) = a + b + c.$$

---

# PROBLEME PROPUSE

*4145 [1]). Se consideră cercul circumscris triunghiului ABC şi fie D mijlocul arcului ABC, iar E mijlocul arcului DC. Se descrie cercul ($\gamma$) cu centrul în D şi trecând prin A şi C şi fie F punctul unde acest cerc este tăiat din nou de AE.

1°. Să se arate că punctele B, D, F sunt în linie dreaptă.

2°. Perpendiculara în B pe BDF tae pe AF în G, iar cercul ($\gamma$) în M şi N.

Să se arate că patrulaterul BGCF este inscriptibil în cercul cu centrul în E.

3°. Să se arate că MN este bisectoarea unghiului ABC.

N. ABRAMESCU.

*4151. Cu cifrele semnificative 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate o singură dată să se formeze un număr de 10 cifre aşa ca adunând 1 la prima cifră dela stânga să se obţină un cub perfect.

V. THÉBAULT.

*4152. Se dau numerele *abcde, bcdea, cdeab, deabc, eabcd* formate prin permutare circulară a cifrelor *a, b, c, d, e.* In ce caz unul din ele este media aritmetică a celorlalte patru ?

I. IONESCU.

*4153. Să se demonstreze că dacă *a, b, c* sunt laturile unuia din triunghiurile înscrise într'un cerc dat şi circumscrise unui triunghiu dat, atunci suma

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$$

este constantă.

COL. GH. BUICLIU.

*4154. Fie ABC un triunghiu dat. In afara lui se duce BR perpendicular pe BC şi egal cu BC, BQ perpendicular pe AB şi egal cu AB, AM perpendicular pe AC şi egal cu AC. Se notează cu P simetricul lui A în raport cu C.

1) Problema publicată cu acest număr fiind identică cu problema Nr. 4115, se înlocueşte cu prezenta.

Să se dovedească, că diagonalele patrulaterului MQRP sunt egale şi perpendiculare.

Să se dovedească, că aria patrulaterului MQRP este egală cu $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 4S$, S fiind aria triunghiului ABC.

Să se deducă lungimile segmentelor MR şi PQ în funcţie de elementele triunghiului ABC.

D. V. Ionescu.

*4155. In triunghiul ABC se iau punctele variabile B' şi C' pe laturile AB şi AC, aşa încât să satisfacă relaţiei:

$$\frac{C'B}{C'A} = \frac{AC}{B'A} - 2.$$

Să se demonstreze că dreapta B'C' trece printr'un punct fix.

Gh. Zapan.

*4156. Să se dovedească inegalitatea

$$\frac{m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots m_p a_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p} \geqq a_1^{\frac{m_1}{s}} \cdot a_2^{\frac{m_2}{s}} \ldots a_p^{\frac{m_p}{s}},$$

în care avem

$$s = m_1 + m_2 + \ldots + m_p,$$

numerile $a_1, a_2, \ldots, a_p$, $m_1, m_2, \ldots, m_p$ fiind pozitive.

Să se arate că avem egalitate numai pentru

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_p.$$

Th. Angheluţă.

4157. Să se stabilească identităţile:

(1) $x^n - C_{n+1}^1 (x+a)^n + C_{n+1}^2 (x+2a)^n - C_{n+1}^3 (x+3a)^n + \ldots \equiv 0$

(2) $1^m C_{n+1}^1 (x+a)^{n-m} - 2^m C_{n+1}^2 (x+2a)^{n-m}$

$$+ 3^m C_{n+1}^3 (x+3a)^{n-m} - \ldots \equiv 0$$

ce au loc oricare ar fi $x$ şi $a$.

N. C.

*4158. In triunghiul ABC notăm cu $0_9$ , I , $I_a$ centrele cercurilor medial, înscris şi exînscris relativ la A.

Să se stabilească relaţia

$$(R + 2r_a)\ \cos\widehat{AI_a 0_9} - (R - 2r)\ \cos\widehat{AI 0_9} = 8R \sin\tfrac{1}{2}A$$

R, $r$, $r_a$ având notaţii cunoscute.

N. N. MIHĂILEANU.

*4159. Să se stabilească identităţile:

$$2\cos rx \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos(m \pm kr)\,x - \sum_{k=-1}^{k=n-2} \cos(m \pm kr)\,x = \frac{\sin \frac{1}{2}nr\,x}{\sin \frac{1}{2}r\,x} \cos\frac{2m \pm r\,(n+1)}{2}\,x.$$

$$2\cos rx \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin(m \pm kr)\,x - \sum_{k=-1}^{k=n-2} \sin(m \pm kr)\,x = \frac{\sin \frac{1}{2}nr\,x}{\sin \frac{1}{2}r\,x} \sin\frac{2m \pm r\,(n+1)}{2}\,x.$$

I. V. MĂTIEŞ.

4160. Se ştie că recordul internaţional de lansare cu paraşuta a fost bătut în America de românca SMARANDA BRĂESCU, asvârlindu-se dela 7315 m. (24.000 picioare).

Se cere să se calculeze timpul de cădere până la sol, ştiind că viteza de cădere a unei paraşute variază invers proporţional cu rădăcina patrată a densităţei aerului. Se va admite că la sol viteza de cădere este $5^m/_{sec}$ (condiţia cerută în caetele de sarcini este $5{,}5^m/_{sec}$ la nivelul mării), iar densitatea aerului în funcţie de altitudine este dată de formula:

$$\delta = (1 - 0{,}0000226 \cdot z)$$

din condiţiunele «atmosferei standard», $z$ fiind altitudinea. Se va neglija timpul iniţial de cădere până la deschiderea paraşutei (circa 3″).

CĂPITAN I. LINTEŞ.

*ERATĂ.* In enunţul problemei 4147, rândul 7 s'a tipărit $p^2 - 49$ în loc de $p^2 - 4q$.

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII" SIBIU

LA REDACȚIUNEA REVISTEI „GAZETA MATEMATICĂ“
SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL V-LEA
(MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)
DE
BOLETIN MATEMATICO
COSTUL UNUI ABONAMENT FIIND DE 300 LEI
ȘI PENTRU ANUL AL III-LEA
(MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)
DE
BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL
COSTUL ABONAMENTULUI FIIND DE 125 LEI,
PUBLICATE ÎN BUENOS AIRES; AMÂNDOUĂ 400 LEI

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

---

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Abramescu Mariana* (4105); *Acikgheozian A. Nubar* (4125); *Dogaru S. D.* (4084); *Efstate Sorin* (4115); *Gheorghiu C. Ad.* (2971, 3210, 320, A, P); *Hortopan Ana* (4084); *Malpig* (N); *Margulius M.* (3734, 68, 82, 823, 67, 72, 929, 36, 48, 65, 73, 78, 4019, 22, 33, 56, 76, 77, 133, E); *Mihăileanu N. N.* (3817, 973, 4125, 31, 44, E, P, R); *Milea G. E. Subloc.* (4091); *Negrea A. M. L.* (4067); *Neumann Maria* (A); *Olteanu E. Şt.* (3889, 4127); *Patraulea N.* (4019, 115); *Petrescu Ion* (4067); *Popescu-Stăneşti I. M.* (P); *Roşca St. George* (3948, 75, 4019, 60, 64, 75, 77, 96, 105, 15, 25); *Sager N. Iancu* (4125, 27, 34, 38, 39, 41, 44, P); *Savin C. Ioan Subloc.* (3978, 4067, 84); *Şaramet I.* (4124); *Şeremet M. Gh.* (4125); *Zamfirescu Gh. I. Subloc.* (2025).

---

*Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

---

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor trată mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caet de dictando.

---

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

# Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

**La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.**

## Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călugei 23, Bucureşti 4.**

# GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVII

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1932

## SUMARUL

1. Observaţiuni în legătură cu o propoziţiune a D-lui Pompeiu . . . . . *Nic. Botea*
2. Note matematice: 39 — 40.
3. Bibliografie.
4. Cereri: 220.
5. Probleme rezolvate: 2658, 3398, 3734, 3814, 3826, 3854, 3856, 3889, 3994, 4002, 4019, 4043, 4076, 4078, 4117, 4130, 4149.
6. Exerciţii: 39.
7. Probleme propuse: 4161 — 4170.
8. Tabla de Materii.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1932

# SPRE ŞTIINŢA

**Gazeta Matematică** se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVII se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **C. D. Orăşanu**, Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Cassier.

---

**Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.**

---

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

---

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

---

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 84, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 33, 44, 72, 76, 83, 87, 4010, 13, 24, 30, 34, 44, 45, 53, 57, 59, 62, 68, 70, 71, 73, 79, 80, 85, 102, 03, 06, 11, 12, 13, 18, 19, 20, 21, 23, 26, 28, 32, 35, 37, 42, 43, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70.

---

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

---

# OBSERVAȚIUNI IN LEGĂTURĂ CU O PROPOZIȚIUNE A D-LUI POMPEIU

1°. D-l D. Pompeiu a demonstrat [1]) în mod elegant următoarea propoziţiune :

«*Fie* ABC *şi* A'B'C' *două triunghiuri direct asemenea şi* O *un punct oarecare în planul lor. Dacă prin punctul* O *se duc vectorii* OA', OB', OC' *şi apoi vectorii* $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, *respectiv echipolenţi cu* OA', OB', OC': *triunghiul* $A_1B_1C_1$ *este asemenea cu triunghiul* ABC».

Dacă $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z'_1$, $z'_2$, $z'_3$ sunt afixele vârfurilor triunghiurilor ABC, A'B'C', demonstraţia D-lui Pompeiu se bazează pe relaţia :

$$(1) \qquad z'_1(z_2 - z_3) + z'_2(z_3 - z_1) + z'_3(z_1 - z_2) = 0$$

ce rezultă din asemănarea triunghiurilor ABC, A'B'C' şi pe relaţia ce rezultă de aci :

$$(2) \quad z'_1[(z_2 + z'_2) - (z_3 + z'_3)] + z'_2[(z_3 + z'_3) - (z_1 + z'_1)]$$
$$+ z'_3[(z_1 + z'_1) - (z_2 + z'_2] = 0.$$

D-l D. V. Ionescu revine în două articole [2]) asupra chestiunei, dând o soluţie geometrică şi făcând câteva observaţiuni şi generalizări. In cele de faţă vom urma cu câteva complectări şi precizări.

2°. Propoziţia D-lui Pompeiu admite o foarte simplă soluţie geometrică, diferită de cea a D-lui Ionescu.

---

1) D. Pompeiu. „Remarque sur la note de M. Teodoriu". Bulletin de Mathématiques et de Physique de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, 1ère année page 161.

2) D. V. Ionescu. Asupra unei teoreme a D-lui D. Pompeiu, „G. M." XXXVI, pag 124.

D. V. Ionescu. Sur une remarque de M. D. Pompeiu. Bulletin de Mathématiques et de Physique de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, 2ème année, page 178.

Relațiile geometrice:

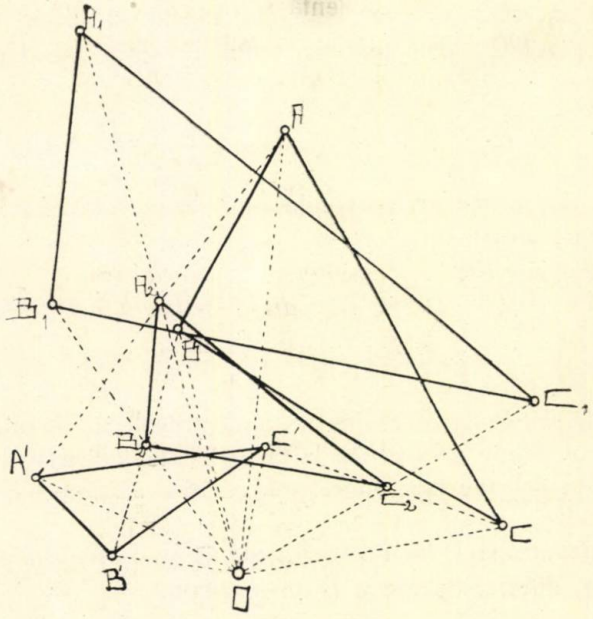
$$(OA)+(OA_1)=(OO_1)+(O_1A)+(OO_1)+(O_1A_1)=2(OO_1)+(O_1A)+(OA_1)$$

$$(OB)+(OB_1)(OO_1)=2+(O_1B)+(O_1B_1)$$

$$(OC)+(OC_1)=2(OO_1)+(O_1C)+(O_1C_1)$$

ne arată că putem face demonstrația pentru un punct $O_1$ particular oarecare. Triunghiurile $A_1B_1C_1$, ce se obțin plecând dela două puncte diferă numai printr'o translație.

In acest caz să presupunem că punctul $O_1$ este polul dublu al figurilor asemenea și de acelaș sens ABC, A'B'C'. Se știe că în acest caz triunghiul $O_1AA'$, $O_1BB'$, $O_1CC'$ sunt asemenea.



Construcțiile pe care le facem ca să obținem punctele $A_1, B_1, C_1$ (luăm simetricele punctului $O_1$ în raport cu segmentele AA', BB', CC'), sunt construcții corespunzătoare în triunghiurile asemenea de mai sus.

Rezultă că triunghiurile $O_1AA_1$, $O_1BB_1$, $O_1CC_1$, sunt asemenea și deci și triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$ sunt asemenea c. c. t. d.

3⁰. *In același mod se poate demonstra imediat propoziția mai generală enunțată de D-l* IONESCU.

*„Fie* ABC, A'B'C', *două triunghiuri direct asemenea şi* O *un punct fix. Prin vârfurile* A', B', C' *ducem vectorii* $\overrightarrow{A'A_1}$, $\overrightarrow{B'B_1}$, $\overrightarrow{C'C}$ astfel ca:

$$\overrightarrow{A'A_1} = K\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{B'B_1} = K\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{C'C_1} = K\overrightarrow{OC}$$

K *fiind un număr real. Triunghiul* $A_1B_1C_1$ *este direct asemenea cu triunghiurile* ABC *şi* A'B'C'.

4⁰. O fiind polul dublu al triunghiurilor asemenea ABC şi A'B'C' din propoziţia precedentă şi $A_2$, $B_2$, $C_2$, punctele în care dreptele $OA_1$, $OB_1$, $OC_1$, întâlnesc respectiv dreptele AA', BB', CC' din asemănările triunghiurilor OAA', OBB', OCC', şi din asemănarea triunghiurilor $OAA_1$, $OBB_1$, $OCC_1$ rezultă:

$$\frac{A_2A}{A_2A'} = \frac{B_2B}{B_2B'} = \frac{C_2C}{C_2C'} = e$$

şi deci următoarea teoremă a lui Van Aubel:

*„Fiind date două triunghiuri asemenea* ABC, A'B'C', *triunghiul* $A_2B_2C_2$, *ale cărui vârfuri divid în acelaşi raport segmentele* AA', BB', CC', *este asemenea cu* ABC.

Din această proprietate se poate deduce propoziţia D-lui Pompeiu dela care am plecat.

5⁰. Să considerăm triunghiurile direct asemenea ABC, A'B'C' şi punctul O. Vectorii duşi prin O echipolenţi cu vectorii $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, formează un triunghiu A"B"C" asemenea cu ABC.

Triunghiul A"B"C" rotit în jurul punctului O de un unghiu $\varphi$ ne conduce la triunghiul egal A‴B‴C‴. Să aplicăm construcţia indicată de teorema D-lui Pompeiu relativă la triunghiurile asemenea ABC, A‴B‴C‴. Ţinând seama că:

$$OA''' = OA'' = AA'$$

$$OB''' = OB'' = BB'$$

$$OC''' = OC'' = CC'$$

deducem:

*„Se consideră două triunghiuri direct asemenea* ABC, A'B'C'. *Se rotesc vectorii* $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ *de un acelaşi unghiu* $\varphi$, *în jurul vârfurilor* A, B, C. *Noul triunghiu* $A_1B_1C_1$ *este direct asemenea cu triunghiurile* ABC *şi* A'B'C'*"*.

Demonstraţia dată este mai simplă decât cea a D-lui Ionescu şi face să se vadă legătura acestei proprietăţi cu cea dela care s'a plecat.

6⁰. *Se consideră două triunghiuri invers asemenea* ABC, A'B'C' *şi un punct* O *în planul lor. Vectorii* $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ *respectiv echipolenţi cu vectorii* $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$ *formează un triunghiu* $A_1B_1C_1$ *direct asemenea cu* ABC.

In adevăr dacă considerăm triunghiul A"B"C" simetric cu A'B'C' în raport cu punctul O acest triunghiu este invers asemenea cu A'B'C' şi deci asemenea cu ABC.

7⁰. Dacă se păstrează notaţiile dela punctul 1⁰ afixele vârfurilor triunghiului $A_1B_1C_1$ sunt

$$Z_1 = z_1 + z'_1 \quad , \quad Z.$$

D-l Ionescu demonstrează că mai general, triunghiul $A_2B_2C_2$ ale cărui vârfuri au afixele:

$$Z_1 = az_1 + bz'_1 + c$$

$$Z_2 = az_2 + bz'_2 + c$$

$$Z_3 = az_3 + bz'_3 + c$$

este asemenea cu triunghiurile ABC, A'B'C'.

Dacă se face $a = b = 1$, $c = 0$, triunghiul $A_2B_2C_2$ devine triunghiul D-lui Pompeiu $A_1B_1C_1$.

Mai general triunghiul $A_3B_3C_3$ ale cărui vârfuri au afixele

$$Z_1 = az_1 + bz'_1 + c(z_2 + z_3) + d(z'_2 + z'_3) + \frac{e}{z_2 z_3} + \frac{f}{z'_2 z'_3}$$

$$+ g\left[\frac{z_2 + z_3}{z_1 z_2 z_3}\right] + h\left[\frac{z'_2 + z'_3}{z'_1 z'_2 z'_3}\right] + l$$

$$Z_2 = az_2 + bz'_2 + c(z_3 + z_1) + d(z'_3 + z'_1) + \frac{e}{z_3 z_1} + \frac{f}{z'_3 z'_1}$$

$$+ g\left[\frac{z_3 + z_1}{z_1 z_2 z_3}\right] + h\left[\frac{z'_3 + z'_1}{z'_1 z'_2 z'_3}\right] + l$$

$$Z_3 = az_3 + bz'_3 + c(z_1 + z_2) + d(z'_1 + z'_2) + \frac{e}{z_1 z_2} + \frac{f}{z'_1 z'_2}$$

$$+ g\left[\frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2 z_3}\right] + h\left[\frac{z'_1 + z'_2}{z'_1 z'_2 z'_3}\right] + l$$

este asemenea cu triunghiurile ABC, A'B'C'.

NIC. BOTEA.

## NOTE MATEMATICE

39. *Alte zece algebre diverse.* (Vezi Nota 60. Anul XXXI, pag. 422).

81. **Asociativă.** Vezi *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1928, pag. 332.

82. **Claselor.** Idem, pag. 332.

83. **Comutativă.** Idem, pag. 332.

84. **Cu 2 dimensiuni.** *M. Stuyvaert.* Algèbre à deux dimensions, Paris 1921.

85. **Indempotenta.** Vezi *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1928, pag. 331.

86. **Inferioară.** L. EULER. Niedere und höhere Algebra, St. Petersburg 1770.

87. **Logistică.** FERRARI. Algèbre logistique.

88. **Morală.** Vezi A. REBIÈRE: *Mathématiques et mathématiciens*, pag. 227.

89. **Tensorilor.** Vezi *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1928, pag. 334.

90. **Zero.** Idem, pag. 331. (Zero-algebra).

(Va urma).

I. IONESCU.

40. *Asupra numărului indicatorilor unui număr dat.* Am impresia că funcţiunea care dă acest număr şi de care s'a ocupat D-l T. Popovici într'un articol de anul trecut (vol. XXXVI, pag. 86), se poate preciza pânăla un punct. In adevăr, D-sa impune acestei funcţiuni numerice, pe care o notează cu $I(x)$ condiţiunile

(1) $\qquad I(1) = 0 \quad , \quad I(2) = 1$

(2) $\qquad I(xy) = I(x) + I(4)$

(3) $\qquad I(x) = I(x-1)$ când $x$ e prim.

Ori, observ că condiţiunile (1) şi (2) determină complect pe $I(x)$ pentru orice valoare a lui $x$; mai întâiu condiţia (2) cere

$$I(x) = \log_a^x .$$

Prima din condiţiile (1) este evident verificată; a doua cere $a = 2$; cum însă $I(x)$ este un număr întreg şi positiv şi cum $\log_2 x$ nu este la fel decât pentru $x = 2^k$, în aplicaţiile numerice vom lua întregul cel mai apropiat, de obiceiu mai mic, de $\log_2 x$; astfel că formula definitivă o vom scrie, întrebuinţând logaritmi ordinari

(A) $\qquad I(x) \sim \dfrac{\log x}{\log 2} .$

Proprietăţile stabilite de D-l T. Popovici sunt acum aproape evidente. Astfel din

$$x < 2^k$$

rezultă imediat

$$I(x) \sim \frac{\log x}{\log 2} < k.$$

De asemeni, din

$$x > 3^k$$

rezultă

$$I(x) \sim \frac{\log x}{\log 2} > k \frac{\log 3}{\log 2} > k.$$

Când $x$ tinde către infinit, obţinem

$$\lim_{x=\infty} \frac{I(x)}{\log x} = \frac{1}{\log 2}$$

rezultat care precizează ultima afirmaţiune a D-lui T. Popovici.

M. G.

# BIBLIOGRAFIE

**Mathematica.** Vol. VI. 1932. Cluj. Sur une équation fonctionelle caractérisant les polynomes, par TH. ANGHELUTZA. Remarques sur les polynomes binomiaux par T. POPOVICIU. Une nouvelle théorie du rayonnement et de l'optique des corps en mouvement. L'hypothèse de la courbe de poursuite, par V. LALAN. Sur un complément au théorème de M. BOREL, par G. CALUGARÉANO. Sur les zéros des fonctions holomorphes, par M. BIERNACKI. Sur le troisième théorème de FREDHOLM, relatif à une équation intégrale particulière, par R. BĂDESCU. Sur un théorème des „Vorlesungen über Dynamik" de JACOBI, par R. H. T. GERMAY. Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un cercle, par G. CALUGARÉANO. Démonstration élémentaire d'un théorème de détermination à un factour constant près d'une fonction harmonique par G. BOULIGAND. Sur une inégalité vérifiée par une fonction et sa dérivée d'ordre $n$, par J. SOULA. Sur les suites de fonctions analytiques bornées dans un domaine par F. LEJA. Sur les sous-groupes simplement transitifs d'un groupe transitif de mouvement, par G. VRÂNCEANU. Sur deux propriétés des ensembles mesurables B, par W. SIERSPINSKI. Une approximation des images de fonctions à la construction de certains ensembles singuliers, par CASIMIR KURATOWSKI Sur les points accessibles dans les ensembles fermés, par W. WOLIBNER. Sur la généralisation d'un théorème de LORD KELVIN, par N. BOTEA. Sur une équation algébrique; application à la formule de TAYLOR, par TH. ANGHELUTZA. Sur quelques propriétés des fonctions harmoniques et des fonctions préharmoniques, par I. CAPOUTADE. Quelques nouvelles conditions initiales pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique, par N. CIORANESCO. Sur certaines équations intégrales, par S. SANIELEVICI.

**Anales de la Sociedad Cientifica Argentina.** Tomul CXIII. Fascicula VI. Iunie 1932. Buenos Aires.

**Boletin Matematico.** Anul V. No. 4. Iunie 1932. Buenos Aires. Asupra unor medii, de B. I. BAIDAFF.

**Boletin Matematico Elemental.** Anul III. No. 4. Iunie 1932. Buenos Aires. Locurile geometrice încă uzuale, de B. I. B.

**Journal des Mathématiques élémentaires.** publié par H. VUIBERT Anul 56. No. 20. Iulie 1932.

**Revista Matematică din Timişoara.** Anul XII. No. 5. Iulie 1932. Asupra unui loc geometric, de D. V. IONESCU.

**Revista Ştiinţifică „V. Adamachi".** Anul XVIII. No. 2. Iunie 1932. Iaşi.

**Bulletin of the American Mathematical Society.** Vol. XXXVIII. No. 6. Iunie 1932. New-York. Probabilităţi şi sisteme fizice, de G. D. Birkhoff. Notă asupra definirii proprietăţilor funcţiunilor armonice, de S. Saks. Notă asupra numerelor lui Mersenne, de D. H. Lehmer. Asupra formelor canonice binare triliniare, de R. Oldenburger. Asupra propoziţiei *4.78 din principia matematica, de B. A. Bernstein. O condiţiune suficientă pentru existenţa unei duble limite, de J. A. Clarkson. O generalizare a teoremei lui Wilson-Glaisher, de G. Ricci. Legea frecuenţei arătând stabilitatea, cu referinţă la media geometrică şi la alte medii, de E. L. Dodd. Asupra suprafeţei lui Kummer, de W. V. Parker. Independenţa postulatelor logicei, de P. Heule. Asupra contactului a două curbe în spaţiu, de E. B. Stouffer. Rectificabilitatea în spaţiul metric, de W. A. Wilson. O examinare a unor serii de tăeturi ale spaţiului, de C. H. Harky. O generalizare a teoremei valorii medii a lui Weierstrass şi Fekete, de M. Marden. Asupra zerorilor unor polinomiale în legătură cu polinomialele lui Jacobi şi Laguerre, de W. Lawton. O construcţie a algebrei diviziunii normală neciclică, de A. A. Albert.

M. Ghermanesco. *Sur l'intégrale de* Poisson. (Extras din *Bulletin scientifique de l'école polytechnique de Timişoara).* Timişoara 1926.

M. Ghermanesco. *Sur l'intégrale des fonctions de deux variables complexes.* (Extras din *Bulletin scientifique de l'école polytechnique de Timişoara).* Timişoara 1927.

M. Ghermanesco. *Sur une classe de fonctions monogènes.* (Extras din *Bulletin scientifique de l'école polytechnique de Timişoara).* Timişoara 1923.

M. Ghermanesco. *Sur les fonction monogènes.* (Extras din *Bulletin scientifique de l'école polytechnique de Timişoara).* Timişoara 1929.

M. Ghermanesco. *Sur l'intégrale de* Weyl. (Extras din *Bulletin scientifique de l'école polytechnique de Timişoara).* Timişoara 1931.

M. Ghermanesco. *Sur une généralisation de l'équation de* Laplace. (Extras din *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège).* Liège 1932.

M. Ghermanesco. *Sur le problème de* Riquier. (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris).* Paris 1932.

## CERERI

220. S'a ocupat cineva cu strângerea folklorului aritmetic la români?

I. I.

# PROBLEME REZOLVATE

*PROBLEMA 2658. *Dacă* $\varphi(N)$ *reprezintă numărul întregilor inferiori şi primi cu* N, *să se afle:*

*1. Condiţia* $\varphi(N) = a^p$ ;

*2. Cari sunt factorii primi mai mici ca 4500, pe care îl poate avea* N, *când* $\varphi(N) = a^2$ *?*

I. N. VELESCU.

*Soluţie* dată de D-l I. B. FLORESCU.

1) Fie $N = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \ldots a_n^{\alpha_n}$ unde $a_1\ a_2, \ldots a_n$ sunt numere prime. Se ştie că:

$$\varphi(N) = a_1^{\alpha_1 - 1} \cdot a_2^{\alpha_2 - 1} \cdot \ldots a_n^{\alpha_n - 1} (a_1 - 1)(a_2 - 1) \ldots (a_n - 1).$$

Fie:

$$(a_1 - 1)(a_2 - 1) \ldots (a_n - 1) = a_1^{\beta_1} \cdot a_2^{\beta_2} \ldots a_n^{\beta_n} \cdot b_1^{\gamma_1} \cdot b_2^{\gamma_2} \ldots b_m^{\gamma_m}$$

unde $b_1, b_2, \ldots b_m$ sunt deasemenea numere prime. Natural că o parte din corespondenţii $\beta_i$ sau chiar toţi, pot fi nuli. Atunci:

$$\varphi(N) = a_1^{\alpha_1 + \beta_1 - 1} \cdot a_2^{\alpha_2 + \beta_2 - 1} \cdot \ldots a_n^{\alpha_n + \beta_n - 1} b_1^{\gamma_1} \cdot b_2^{\gamma_2} \cdot \ldots b_m^{\gamma_m}.$$

Pentru ca $\varphi(N)$ să fie puterea $p$ a unui număr intreg, trebuie ca

$$\alpha_i + \beta_i - 1 = k_i \cdot p \quad ; \quad \gamma_i = l_i \cdot p.$$

In cazul când aceste condiţiuni nu sunt îndeplinite, putem să înmulţim pe N cu anumiţi factori pentru a face ca ele să fie satisfăcute.

Pentru a evidenţia aceasta, voiu trata un caz particular, anume:

$$\varphi(Q \cdot N) = a^5$$

unde

$$N = 23^a \cdot 19^b \cdot 13^c \cdot 7^d$$

urmând să determinăm pe Q, pe care îl vom presupune prim cu N pentru simplificare.

In adevăr, cum:

$$\varphi(Q \cdot N) = \varphi(N) \cdot \varphi(Q)$$

şi cum:

$$\varphi(N) = 23^{a-1} \cdot 19^{b-1} \cdot 13^{c-1} \cdot 7^{d-1} \cdot 11 \cdot 3^4 \cdot 2^5.$$

Iar dacă presupunem că:

$$a = b = c = d = M5 + 1,$$

atunci

$$\varphi(Q) = 11^{5\alpha+4} \cdot 7^{5\beta} \cdot 5^{5\gamma} \cdot 3^{5\delta+1} \cdot 2^{5\lambda}$$

unde am luat factori primi mai mici ca *13*. De aici rezultă că:

$$Q = 11^{5\alpha+5} \cdot 7^{5\beta+1} \cdot 5^{5\gamma} \cdot 3^{5\delta+1} \cdot 2^{5\lambda-4}.$$

Prin urmare Q poate avea o infinitate de soluţii.

Cazul când $p = 2$ nu prezintă nimic particular şi deci nu este nici un număr prim $< 4500$ astfel încât dacă îl conţine N, atunci $\varphi(N)$ să nu poată fi patrat perfect.

*Observaţiuni:*

1) Soluţiunile directe ale problemei sunt:

N *are un factor:* $\begin{cases} N = 2^{\alpha \cdot p+1} \\ N = (2^{\alpha \cdot p} \cdot k^{q \cdot p} + 1)^{\beta \cdot p+1} \end{cases}$

N *are doi factori:* $N = 2^{\alpha \cdot p-n} \cdot b^{\beta \cdot p+1}$

unde:

$$b = 2^{n+1+\alpha p} \cdot k^{q \cdot p} + 1$$

sau:

$$N = b^{\beta p+1} \cdot c^{\gamma \cdot p+1}$$

unde:

$$\begin{cases} b = 2^{x_1+\alpha_1 p} \cdot k_1^{q_1 \cdot p} + 1 \\ c = 2^{x_2+\alpha_2 \cdot p} \cdot k_2^{q_2 p} + 1 \end{cases}$$

cu condiţia:

$$x_1 + x_2 = t \cdot p$$

. . . . . .

. . . . . .

Şi tot astfel se poate ajunge la diverse forme a lui N, pentru mai mulţi factori.

Factorii primi mai mici ca 4500, pe care ii poate avea N, în cazul când $\varphi(N) = a^2$ sunt de forma:

$$2^m \cdot k^{2q} + 1$$

şi urmărind o tabelă de numere prime vom găsi: 3, 5, 17, 37, 73, 101, etc...

2) In *G. M. XXIX nota 7* se studiază *numerile de forma* $A^m$, *al căror indicator au forma* $B^n$, care reprezintă o restrângere şi mai interesantă faţă de problema No. 2658.

CĂPITĂN I. LINTEŞ.

---

PROBLEMA 3398. *Să se demonstreze că ecuaţia*

$$x^4 - \frac{a^4 - b^4}{2} x^3 + \left[ \frac{(a^4 - b^4)^2}{16} - \lambda^2 (a - b)^2 \right] x^2$$

$$+ \frac{(a-b)^5 (a+b) \lambda^2}{6} x - \frac{(a+b)^2 (a-b)^8 \lambda^2}{144} = 0,$$

*are toate rădăcinile reale.*

D. V. IONESCU.

Să observăm că ecuaţia dată se mai scrie

$$x^2 \left[ x^2 - \frac{a^4 - b^4}{2} x + \frac{(a^4 - b^4)^2}{16} \right]$$

$$- \lambda^2 (a - b)^2 \left[ x^2 - \frac{(a-b)^3 (a+b)}{6} x + \frac{(a+b)^2 (a-b)^6}{144} \right] = 0$$

sau:

$$\left[ x \left( x - \frac{a^4 - b^4}{4} \right) \right]^2 - \lambda^2 (a - b)^2 \left( x - \frac{(a-b)^2 (a^2 - b^2)}{12} \right)^2 = 0.$$

Ecuația dată se descompune deci în ecuațiile

$$(1)\quad x\left(x-\frac{a^4-b^4}{4}\right)-\lambda(a-b)\left(x-\frac{(a-b)^2(a^2-b^2)}{12}\right)=0$$

$$(2)\quad x\left(x-\frac{a^4-b^4}{4}\right)+\lambda(a-b)\left(x-\frac{(a-b)^2(a^2-b^2)}{12}\right)=0.$$

Fiecare din aceste ecuații are rădăcinile reale. Într'adevăr, dacă se consideră ecuația

$$f(x)=x\left(x-\frac{a^4-b^4}{4}\right)+\mu\left(x-\frac{(a-b)^2(a^2-b^2)}{12}\right)=0,$$

ea are rădăcini reale oricare ar fi $\mu$.

Pentru a dovedi aceasta observăm că $f(\pm\infty)>0$ și că

$$f\left(\frac{(a-b)^2(a^2-b^2)}{12}\right)=\frac{(a-b)^2(a^2-b^2)}{12}\left[\frac{(a-b)^2(a^2-b^2)}{12}-\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{4}\right]$$

adică

$$f\left(\frac{(a-b)^2(a^2-b^2)}{12}\right)=-\frac{(a-b)^2(a^2-b^2)^2}{72}(a^2+ab+b^2)<0,$$

și prin urmare rădăcinile sunt reale. Una este mai mică decât $\frac{(a-b)^2(a^2-b^2)}{12}$ iar alta mai mare.

Excludem cazul când $a=b$, ecuația reducându-se la $x^4=0$.

D. V. I.

*Notă.* D-l Gh. Th. Gheorghiu-Gladiș a dat două soluții acestei probleme. Una cu ajutorul teoremei lui Rolle, alta directă.

D-nii Gh. Th. Gheorghiu-Gladiș și M. Velea au demonstrat că ecuațiile (1) și (2) au rădăcinile reale, calculând realizantul lor. Dânșii au găsit că realizantul este:

$$\Delta=(a-b)^2[[12\lambda\pm(a+b)(a^2+6ab+b^2)]^2+8(a^2-b^2)^2(a^2+ab+b^2)],$$

care se vede că este totdeauna pozitiv.

*PROBLEMA 3734. *Prin vârful* A *al unui paralelogram* ABCD *se duce o secantă, care întâlneşte laturile* CB *şi* CD *respectiv în* M *şi* N.

*Să se arate că:*

$$\text{aria MCD} + \text{aria NCB} = \text{aria MCN}. \qquad (A)$$

O. N. Ţino.

*Soluţiune* dată de D-l Eugen I. Dumitrescu (Buzău).

Să considerăm secanta NAM exterioară ariei paralelogramului. In acest caz, DA fiind paralelă cu BC, triunghiul MCD este echivalent cu MCA, adică:

$$\text{aria MCD} = \text{aria MCA}. \qquad (1)$$

Asemenea, BA fiind paralelă cu CD, triunghiul NCB este echivalent cu triunghiul NAC, adică:

$$\text{aria NCB} = \text{aria NAC}. \qquad (2)$$

Adunând relaţiunile (1) şi (2) obţinem:

$$\text{aria MCD} + \text{aria NCB} = \text{aria MCA} + \text{aria NAC} = \text{aria MCN}$$

care este relaţiunea cerută.

Să presupunem acum că secanta AMN taie aria paralelogramului.

Egalităţile (1) şi (2) sunt încă adevărate şi pentru aceleaşi motive, însă relaţiunea între cele trei arii date în enunţ devine:

$$\text{aria NCB} - \text{aria MCD} = \text{aria MCN}. \qquad (A')$$

In cazul secantei ANM, relaţiunea din enunţ devine:

$$\text{aria MCD} - \text{aria NCB} = \text{aria MCN}.$$

Au rezolvat deasemenea complet problema, dând alte soluţiuni D-nii: Gh. th. Gheorghiu-Gladiş (student), Eugeniu N. Burlacu (Şc. Art. Timişoara).

Au rezolvat problema numai în cazul când secanta este exterioară ariei paralelogramului, dând soluţiuni diferite:

*a)* D-ra Justina Gurău şi D-nii: Petre I. Ghişoiu, Aurel Em. Bădescu, Nicolae N. Mihăileanu folosind expresiunea trigonometrică a ariei unui triunghiu în funcţiune de unghiul C al paralelogramului şi demonstrând relaţiunea $\frac{\overline{CD}}{\overline{CN}} + \frac{\overline{CB}}{\overline{CM}} = 1$, cu ajutorul asemănării triunghiurilor ADM şi MCN.

*b)* D-nii: Dan Novleanu, Ioan C. Savin, Cristian Râmniceanu, Alex. Arsene, Teodor Panaite, N. N. Aldea, Haralamb P. Ionescu-Biss exprimând geometric ariile şi reducând problema la stabilirea relaţiunii:

$$\frac{\overline{NM}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MB}};$$

*c)* D-nii: N. Zaharia, Ioan C. Boian, Corneliu I. Drăgan, D-ra Justina Gurău şi N. N. Aldea introducând înălţimile triunghiurilor MCD şi BCN relative respectiv la bazele $\overline{DC}$ şi $\overline{NC}$.

*d)* D-nii: M. D. Motoc (Oltenița), Paul Mihăilescu (Cluj), T. G. Baciu (Topliceni) însemnând cu I punctul dreptelor NB şi MD şi arătând că patrulaterul BCDI este echivalent cu triunghiul MIN;

*e)* D-nii: Justin Vâlceanu, C. D. Ionescu-Ţiu, Aurelian Călinescu, Ovidiu Birceanu şi Marius Margulius cu ajutorul geometriei analitice.

*Observare.*

Se pune întrebarea, dacă se poate obţine o reciprocă a proprietăţii paralelogramului, dată în enunţul problemei. Observăm că la stabilirea relaţiunii (A) am folosit paralelismul a două perechi de drepte şi deducem că singură relaţiunea (A), pentru un patrulater oarecare ABCD, nu este suficientă ca să atragă paralelismul ambelor perechi de laturi opuse. Vom enunţa deci reciproca în felul următor:

*Dacă, ducând prin vârful* A *al unui trapez* ABCD (AD ∥ BC) *o secantă exterioară care taie pe* CB *în* M *şi pe* CD *în* N *avem relaţiunea:*

$$\text{aria MCD} + \text{aria NCB} = \text{aria MCN}, \qquad (A)$$

*trapezul este un paralelogram.*

Din relaţiunea (A) deducem succesiv:

$$\text{aria MCD} = \text{aria MCN} - \text{aria NCB}$$

$$\text{aria MCD} = \text{aria MBN}, \qquad (1)$$

dar AD fiind paralelă cu BC, avem:

$$\text{aria MCD} = \text{aria MCA}, \qquad (2)$$

deci

$$\text{aria MCA} = \text{aria MBN} \qquad (3)$$

şi scăzând de ambele părţi aria MBA obţinem:

$$\text{aria ABC} = \text{aria ABN} \qquad (4)$$

Triunghiurile echivalente ABC şi ABN, având aceiaş bază $\overline{AB}$, au înălţimile vârfurilor C şi N egale, *deci dreptele* $\overline{CD}$ *şi* $\overline{AB}$ *sunt paralele.*

Proprietatea reciprocă este adevărată şi în cazul când secanta ANM (sau AMN) taie suprafaţa trapezului, înlocuind relaţiunea (A) însă prin relaţiunea (A') sau analoaga ei.

Drumul de urmat la demonstraţie este identic celui precedent.

A mai rezolvat problema şi D-l N. N. Mihăilescu (Constanţa).

O. N. Ţ.

*PROBLEMA 3814. *Se dă un trapez oarecare* ABCD (AB *şi* CD *fiind laturile paralele). Dreapta paralelă cu bazele trapezului, care pleacă din mijlocul* F *al laturei* $\overline{BC}$, *taie diagonalele* AC *şi* $\overline{BD}$ *în punctele* G *şi* H. *Se construiesc paralelogramele* ABED *şi* GHEK. *Ce condiţiune trebuie să îndeplinească trapezul dat, pentru ca* BK *şi* EF *să se întâlnească pe diagonala* AC?

V. Dorneanu.

Fie M punctul unde dreapta FGH taie pe BE.

Din proprietatea dreptei paralelă cu o latură a unui triunghiu şi plecând din mijlocul alteia, rezultă că avem:

$$\overline{AG} = \overline{GC}\ ;\ \overline{BH} = \overline{HD}\ ,\ \overline{BM} = \overline{ME}. \qquad (1)$$

Dreapta EH, unind mijlocul diagonalei $\overline{BD}$ cu al treilea vârf, E, este cealaltă diagonală a paralelogramului ABED, adică trece prin A, deci în virtutea proprietăţii amintite mai sus, avem: $\overline{HG} = \frac{1}{2}\overline{EC}$ şi cum $\overline{EK} = \overline{HG}$ prin construcţiune, deducem că *punctul* K *este mijlocul lui* EC. Aşadar, EF şi BK fiind mediane în triunghiul BCE, pentru ca AC să treacă prin punctul lor comun, trebuie ca punctul G să se confunde cu M; însă în acest caz, *patrulaterul* ABCE *trebuie să fie un paralelogram,* deoarece diagonalele lui trebuie să se împartă în părţi egale.

In rezumat, pentru ca dreptele EF, BH, AC să fie concurente în acelaş punct, trebuie ca $\overline{EC} = \overline{AB} = \overline{DE}$, adică *baza mică a trapezului să fie jumătatea bazei mari.*

*Observare.* Dacă I este simetricul punctului K faţă cu punctul E, *dreptele* BI *şi* EF *se întâlnesc pe latura* AD *a trapezului* ABCD $(\overline{CD} = 2\overline{AB})$.

Este de ajuns, pentru a o demonstra, să observăm că EF este paralelă cu BD şi că I este mijlocul lui ED, deci că BI este a doua diagonală a paralelogramului DBEL.

Au rezolvat problema D-nii: Gh. Th. Gheorghiu-Gladiş, Ioan Gh. Popa, H. P. Ionescu, A. Em. Bădescu, Chiţu P. Marin, V. Ionescu, C-tin Gh. Lupescu, Romeo N. Dumitraşcu, Mircea D. Motoc, N. N. Mihăileanu şi Alex. H. Halperin.

D-l Cristian I. Râmniceanu a rezolvat problema cu ajutorul geometriei analitice.

O. N. Ţ.

*PROBLEMA 3826. *Dacă* O, H, ω, A′, A″ *sunt într'un triunghiu central* ABC *respectiv: centrul cercului circumscris, ortocentrul, cercului celor nouă puncte; mijlocul laturei* BC, *piciorul înălțimii* AH, *să se construiască triunghiul* ABC, *cunoscând:*

*I) punctele* O, H *și* A′ ;

*II) punctele* A″, H *și* ω .

VLADIMIR I. CRIVĂȚ.

I. Să presupunem triunghiul construit când cunoaștem O, H și A′. Punctul ω este mijlocul segmentului cunoscut $\overline{OH}$, segmentul $\overline{\omega A'}$ este raza cercului celor nouă puncte, iar raza $\overline{OB}$ a cercului circumscris triunghiului egală cu $2 . \overline{\omega A'}$.

Din aceste observări rezultă următoarea construcțiune a triunghiului cerut ABC:

Unim punctul O cu punctul H și determinăm punctul ω, mijlocul segmentului $\overline{OH}$. Descriem cercul ω, cu centrul în ω și cu raza cât $\overline{\omega A'}$. El taie a doua oară dreapta, perpendiculară în A′ pe OA′, în punctul A″ ; apoi descriem cercul O, cu o rază cât diametrul cercului ω și cu centrul în O, care taie dreapta A′A″ în punctele B și C, iar semidreapta A″H în punctul A. Unind vârfurile A, B, C avem triunghiul ABC.

*Observare.*

Dacă punctele O, H, A′ sunt în linie dreaptă, triunghiul este isoscel și construcțiunea se simplifică. Dacă O și H sunt date în același punct distinct de A′, triunghiul este echilateral și construirea este imediată. Dacă O și A′ sunt în același punct distinct de H, triunghiul este dreptunghiu, iar vârful A fiind în H, construcțiunea este imediată. Dacă toate trei punctele O, H, A′ sunt date în același punct, triunghiul este redus la acel punct. Dacă H și A′ sunt date în același punct, iar O la distanță finită, triunghiul cerut nu există. Dacă H și A′ sunt date în același punct, iar O la infinit, triunghiul este redus la o dreaptă oarecare trecând prin H.

II. Să presupunem triunghiul ABC construit când cunoaștem A″, H și ω. Observând că $\overline{H\omega} = \overline{\omega O}$ și că raza $\overline{OA}$ a cercului ABC este dublul segmentului $\overline{\omega A''}$ (raza cercului celor nouă puncte), rezultă următoarea construcțiune:

Unim punctele H și ω și prelungim segmentul obținut cu o lungime $\overline{\omega O}$ egală cu $\overline{H\omega}$. Din centrul O, cu raza cât dublul seg-

mentului $\omega A''$, descriem cercul ABC, care determină pe semidreapta A″H, vârful A, iar pe dreapta perpendiculară pe A″H în A″, vârfurile B, C. Unind B, C cu vârful A obţinem triunghiul cerut ABC.

*Observare.*

Punctele H şi A″ nu pot fi confundate căci în acest caz punctele ω şi O ar fi la infinit.

Dacă punctele A″, H şi ω sunt în linie dreaptă, triunghiul cerut este isoscel. Construcţiunea din cazul general este aplicabilă.

Dacă punctele ω şi H sunt date în acelaş punct, O este tot în acel punct şi triunghiul este echilateral. Construcţiunea se simplifică în acest caz. Punctele ω şi A″ nu pot fi date în acelaş punct, căci în acest caz cercul celor nouă puncte şi deci triunghiul ABC se reduce la acel punct (H fiind comfundat cu ω). Dacă ω şi A″ sunt date în acelaş punct, iar H distinct de acel punct, triunghiul ABC nu există.

Au rezolvat problema D-nii: Faţe Mărgărit, N. N. Aldea, Cezar Coşniţă, Petre I. Ghişoiu, Aurel Em. Bădescu, Aurel Ştefănescu-Goangă, Nicolae Antonescu, Victor Ionescu, Cristian I. Râmniceanu, Romeo N. Dumitraşcu, Haralamb P. Ionescu, Ioan G. Popa (anul 1930), D. Şerban-Ulmeni, Nicolae N. Velicescu, Corneliu N. Popescu, Titu Gh. Velicescu, Aurel D. Constantinescu, N. N. Mihăileanu, Haralamb P. Ionescu-Biss, Ioan C. Boian, C. F. Heytmaneh (anul 1931), Marius Margulius (anul 1932).

O. N. Ţ.

---

*PROBLEMA 3854. *Pe o dreaptă se iau două puncte fixe* B, C. *Prin* C *se duce o dreaptă* Δ, *înclinată de* 45° *pe* BC, *iar pe* Δ *se ia un punct* A. *Diametrul corespunzător punctului* B *al cercului* BAC *taie cercul a doua oară în* D.

*Se prelungeşte* $\overline{DA}$ *cu segmentul* $\overline{AM} = \overline{DA}$.

*Care este locul punctului* M, *când punctul* A *descrie dreapta* Δ?

V. Dorneanu.

*Soluţiune* dată de D-nii: Gh. Oprescu (Liceul Internat, Iaşi), P. I. Ghişoiu (Şc. Politecnică Buc.), Constantinescu C. Aurel, Corneliu N. Popescu, Alex. H. Halperin (Şc. Politecnică Buc.), H. P. Ionescu-Biss şi Nicolae Antonescu.

Fie N proiecțiunea punctului M pe dreapta BC. Patrulaterul BCAD fiind înscris într'un cerc, $\sphericalangle$ BDA este egal cu suplimentul unghiului BCA, adică:

$$\text{măs.} \sphericalangle BDA = \text{măs.} \sphericalangle ACN = 45^0.$$

Apoi, triunghiul DBM, având dreapta BA *înălțime* (căci măs. $\sphericalangle$ BAD $= 90^0$) și *mediană* ($\overline{DA} = \overline{AM}$), este un triunghiu *isoscel*. Triunghiul isoscel DBM, având unul din unghiurile egale de $45^0$, *este triunghiu dreptunghiu în* B. Acum, observăm că triunghiurile dreptunghiuri BNM și BCD (având ipotenuzele $\overline{BM}$ și $\overline{BD}$ egale și unghiurile ascuțite MBN și BDC egale) sunt egale, deci laturile omoloage $\overline{MN}$ și $\overline{BC}$ sunt și ele egale.

Punctele B și C find fixe, $\overline{BC}$ *este constant*, prin urmare, când punctul A descrie dreapta $\Delta$, *punctul* M, rămânând la distanță constantă de dreapta BC, *descrie o dreaptă paralelă cu dreapta fixă* BC așezată la distanța $\delta = \overline{BC}$.

*Observare:*

Dacă dreapta $\Delta$, dusă prin C, face cu dreapta $\overrightarrow{BC}$ un unghiu de $135^0$, *locul punctului* M *este cealaltă echidistantă (loc al punctelor* M *la distanță constantă* $\overline{MN} = BC$ *de dreapta* BC).

D-l N. N. Mihăileanu a rezolvat problema cu ajutorul geometriei analitice.

O. N. Ț.

---

*PROBLEMA 3856. *Fie* $O_1$ *și* $O_2$ *două cercuri fixe,* M *un punct mobil în planul lor, iar* $MT_1$ *și* $MT_2$ *tangentele duse din* M *la cercurile* $O_1$ *și* $O_2$. *Se cere:*

*Locul intersecțiunii* $P_{1,2}$ *a cercurilor* $O_1MT_1$ *și* $O_2MT_2$.

*In cazul a trei cercuri* $O_1$, $O_2$, $O_3$, *care este locul punctului* M *așa că intersecțiunile* $P_{1,2}, P_{1,3}, P_{2,3}$ *să fie colineare?*

I. I. Georgescu-Racoviță.

*Soluțiunea I-a.* Triunghiurile $O_1T_1M$ și $O_2T_2M$ fiind dreptunghiuri, centrele $O'_1$ și $O'_2$ ale cercurilor $O_1T_1M$ și $O_2T_2M$ sunt mijloacele ipotenuzelor $\overline{O_1M}$ și $\overline{O_2M}$, adică avem:

$$\frac{\overline{MO'_1}}{\overline{MO_1}} = \frac{\overline{MO'_2}}{\overline{MO_2}} = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Dar, dreapta centrelor $O'_1O'_2$ taie coarda comună $\overline{MP_{1,2}}$, a cercurilor $O'_1$ şi $O'_2$, în două părţi egale, aşa că, I fiind mijlocul lui $\overline{MP_{1,2}}$, avem:

$$\frac{\overline{MI}}{\overline{MP_{1,2}}} = \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Comparând (1) şi (2), deducem relaţiunile

$$\frac{\overline{MO'_1}}{\overline{MO_1}} = \frac{\overline{MO'_2}}{\overline{MO_2}} = \frac{\overline{MI}}{\overline{MP_{1,2}}}, \qquad (3)$$

din care rezultă că, $O'_1$, $O'_2$, I fiind pe aceiaşi dreaptă, $O_1$, $O_2$, $P_{1,2}$ aparţin deasemenea unei aceleaş drepte; adică *oricare ar fi punctul* M *în plan, punctul* $P_{1,2}$ *aparţine dreptei fixe* $O_1O_2$.

De oarece $O'_1O'_2$ este paralelă cu $O_1O_2$ şi perpendiculară pe $\overline{MP_{1,2}}$, *punctul* $P_{1,2}$ *este proiecţiunea punctului* M *pe dreapta centrelor* $O_1O_2$ *a celor două cercuri fixe.*

2°. Când avem trei cercuri fixe $O_1$, $O_2$, $O_3$, observăm, că proiecţiunile punctului M pe laturile triunghiului $O_1O_2O_3$ sunt în linie dreaptă, dacă M aparţine cercului $O_1O_2O_3$ şi reciproc (Teorema lui Simson şi reciproca ei).

Aşadar, *locul punctului* M *în condiţiunile cerute, este cercul* $O_1O_2O_3$.

*Soluţiunea II-a.* Unind punctul $P_{1,2}$ cu $O_1$ şi $O_2$, avem:

$$\text{măs.} \sphericalangle O_1P_{1,2}M = \text{măs.} \sphericalangle O_2P_{1,2}M = 90^0,$$

(fiind unghiuri înscrise, în semicercuri), deci măs. $\sphericalangle O_1P_{1,2}O_2 = 180^0$, adică *punctul* $P_{1,2}$ *aparţine dreptei fixe* $O_1O_2$, fiind proiecţiunea punctului M pe $O_1O_2$.

Restul ca în prima soluţiune.

*Observare.*

I. D-l A. Em. Bădescu a semnalat cazul excepţional al centrelor $O_1$, $O_2$, $O_3$ în linie dreaptă, în care problema locului punctului M nu se mai pune.

II. Enunţul problemei este restrictiv din cauză că cercurile $O'_1$ şi $O'_2$ au fost definite cu ajutorul tangentelor duse din M la cercurile $O_1$ şi $O_2$. Se poate înlătura această restricţiune înlocuind în enunţ „cercurilor $O_1MT_1$ şi $O_2MT_2$" prin „cercurilor de diametre $\overline{MO_1}$ şi $\overline{MO_2}$".

Au rezolvat problema D-nii: N. Aldea, Corneliu N. Popescu, Petre I. Ghişoiu, Adrian Gheorghiu, Aurel Em. Bădescu, Nicolae Antonescu, Cezar Coşniţă (an. 1930), N. N. Mihăileanu (an. 1931).

O. N. Ţ.

*PROBLEMA 3889. *Dacă* $i_a$, $i_b$, $i_c$ *reprezintă distanţele centrului cercului circumscris la laturile unui triunghiu, să se demonstreze relaţiunile*

$$i_a \sin A + i_b \sin B + i_c \sin C = \frac{S}{R},$$

$$\frac{(R-i_a)(R-i_b)}{\sin A \cdot \sin B} + \frac{(R-i_b)(R-i_c)}{\sin B \cdot \sin C} + \frac{(R-i_c)(R-i_a)}{\sin C \cdot \sin A} = R^2.$$

C. V. COSTĂCHESCU.

Unind centrul O, al cercului circumscris triunghiului ABC, cu vârfurile A, B, C, putem scrie imediat relaţiunea geometrică:

$$\text{aria } AOB + \text{aria } BOC + \text{aria } COA = \text{aria } ABC$$

sau încă:

$$i_a \cdot a + i_b \cdot b + i_c \cdot c = 2S, \qquad (1)$$

(S însemnând aria, iar $a$, $b$, $c$ laturile triunghiului ABC). Dar, din relaţiunile între laturi şi sinusurile unghiurilor opuse, avem :

$$a = 2R \sin A, \; b = 2R \sin B, \; c = 2R \sin C \qquad (2)$$

(R fiind raza cercului ABC), în consecinţă relaţiunea (1) devine :

$$R(i_a \sin A + i_b \sin B + i_c \sin C) = S, \qquad (3)$$

care este prima relaţiune cerută.

Pentru a stabili a doua relaţiune a enunţului, fie $A_1$ mijlocul laturei $\overline{BC}$, iar $A_2$ punctul unde semidreapta $OA_1$ taie cercul ABC; fie $B_1$, $B_2$; $C_1$, $C_2$ punctele analoage.

Observăm în primul rând că avem :

$$\overline{A_1A_2} = R - i_a, \; \overline{B_1B_2} = R - i_b, \; \overline{C_1C_2} = R - i_c, \qquad (4)$$

apoi că:

$$\sphericalangle A_1CA_2 = \sphericalangle BCA_2 = \tfrac{1}{2}A, \; \sphericalangle B_1AB_2 = \sphericalangle CAB_2 = \tfrac{1}{2}B$$

$$\sphericalangle C_1BC_2 = \sphericalangle ABC_2 = \tfrac{1}{2}C. \qquad (5)$$

Din triunghiurile dreptunghiuri $A_2A_1C$, $B_2B_1A$, $C_2C_1B$, avem relaţiunile cunoscute :

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1C} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A, \; \overline{B_1B_2} = \overline{B_1A} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B, \; \overline{C_1C_2} = \overline{C_1B} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C, \qquad (6)$$

sau încă:

$$R - i_a = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A, \; R - i_b = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B, \; R - i_c = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}. \qquad (7)$$

Făcând acum produsele câte două, obţinem:

$$(R-i_a)(R-i_b)=\frac{ab}{4}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\,.\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B=R^2\,\sin A\,\sin B\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B$$

sau încă:

$$\frac{(R-i_a)(R-i_b)}{\sin A\,.\,\sin B}=R^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \qquad (8)$$

şi analoagele ei şi ca urmare însumând aceste trei relaţiuni, obţinem

$$\sum\frac{(R-i_a)(R-i_b)}{\sin A\,.\,\sin B}=R^2\,\Sigma\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\,.\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B=R^2 \qquad (9)$$

căci

$$\Sigma\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B=1. \qquad (10)$$

(Culeg. de probl. I. Ţ. I. C. pag. 395 ex. 15).

*Observare.* Relaţiunea (10) se poate stabili repede, exprimând $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}B$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$ în funcţiune de laturi şi semiperimetrul triunghiului şi observând că având $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}B=\frac{p-c}{p}$, etc., avem $\Sigma\operatorname{tg}\frac{1}{2}A\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}B=\Sigma\frac{p-a}{p}=1$.

Putem folosi asemenea relaţiunile:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A=\frac{r}{p-a},\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B=\frac{r}{p-b},\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C=\frac{r}{p-c}$$

în care caz, avem:

$$\Sigma\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B=\frac{r^2}{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}\,\Sigma\,(p-a)=\frac{S^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=1.$$

Au rezolvat problema D-nii: Mircea-Leonte, A. Negrea, Mihail Velea, Mircea I. Grossu, Petre I. Ghişoiu, N. N. Aldea, Nicolae Donciu, Emilian Mereuţă, Ioan Parepeanu, Haralamb P. Ionescu-Biss, Ioan Gh. Popa, Cezar Coşniţă, Corneliu Popescu, Vladimir I. Crivăţ (anul 1930), S.-Lt. Th. N. Panaite, S.-Lt. C. D. Ionescu-Ţiu, S.-Lt. Aurelian I. Stan-Cluj, Nicolae N. Mihăileanu, Vasile Vasu, Nicolae Velicescu, E. Gh. Milea, Titu G. Velicescu, Ioan C. Boian, Aurel C. Constantinescu, Const. Gh. Lupescu (anul 1931), Marius Margulius, Ştefan E. Olteanu (anul 1932).

O. N. Ţ.

PROBLEMA 3994. *Să se construiască un patrulater, inscriptibil, cunoscându-i-se direcţiile şi lungimile diagonalelor, precum şi aşezarea punctului lor de intersecţie pe una din ele.*

N. C.

Fie AB diagonala pe care cunoaştem intersecţia I, cu cealaltă diagonală CD. AB fiind dată în mărime şi direcţie, o fixăm cu aproximaţia unei translaţii.

CD = 2′*d* este un segment pe dreapta Δ, care trece prin I şi are direcţia dată. Să notăm AI = *m*, IB = *n*.

*Soluţia I* dată de D-l GEORGE ŞT. ROŞCA.

Relaţiile :

$$(1) \qquad IC + ID = CD = 2d.$$

$$(2) \qquad \overline{IC} \cdot \overline{ID} = \overline{IA} \cdot \overline{IB} = m \cdot n.$$

reduc problema la găsirea segmentelor IC şi ID, când cunoaştem suma lor 2*d* şi produsul lor *m* . *n*.

Un mod simplu de construcţie este următorul:

Construim un segment C′D′ = CD = 2*d*. Ridicăm perpendiculara la extremităţile C′ şi D′, pe segmentul C′D′, pe care luăm respectiv C′F = *m*, D′G = *n*, în aceiaşi direcţie. Descriem apoi un semicerc pe FG ca diametru, care întâlneşte pe C′D′ în două puncte M şi N. Triunghiurile asemenea FC′M şi MD′G ne dau:

$$C'M \cdot MD' = C'F \cdot D'G = m \cdot n.$$

Deci C′M = CI şi MD′ = ID sunt segmentele căutate. Deasemenea segmentele C′N şi ND′ răspund problemei, care admite deci două soluţiuni.

Pentru ca problema să admită soluţie e necesar ca cercul descris pe FG ca diametru să întâlnească dreapta C′D′.

$$\frac{m+n}{2} \leqslant \frac{\sqrt{(2d)^2 + (m-n)^2}}{2}$$

$$\therefore \quad mn < d^2 \qquad \text{sau} \qquad AI \cdot IB < \left(\frac{CD}{2}\right)^2 .$$

Dacă $mn = d^2$ avem o singură soluție.

*Soluțiuni* analoage au fost date de D-na: ȘTEFANIA CĂPITAN TRUȚESCU, D-rele: MARIANA ABRAMESCU, ELEONORA ANTONIU (studente Cluj) și D-nii: N. N. ALDEA, EMILIAN MEREUȚĂ (studenți București), TRAIAN PUTA (student), MODY JUSTIN, VASU VASILE (studenți Cluj), S.-LT. I. GH. ZAMFIRESCU (Pitești), AUREL EM. BĂDESCU (Șc. Preg. Artilerie), AVRAM N. CONSTANTIN (Șc. militară Geniu), BUȚAN M. AURELIU (elev cl. VI), I. V. COJOCARU (Lic. «Meșota»), NIC. N. MIHĂILEANU, PATRAULEA N., V. I. C. VISARION și un anonim.

*Soluția II* dată de D-l ADRIAN C. GHEORGHIU.

Intre C și D, pe Δ, există afinitatea:

$$(1) \qquad CD = 2d = \text{const.}$$

Pe de altă parte patrulaterul ACBD, trebuind să fie inscriptibil, între C și D pe Δ există involuția:

$$(2) \qquad IC \cdot ID = IA \cdot IB = \text{const.}$$

Problema revine în a găsi punctele corespunzătoare C și D, comune în cele două corespondente.

Punctul I fiind interior segmentului AB, fie S intersecția perpendicularei în I pe AB, cu cercul de diametru AB și fie pe perpendiculara în I pe Δ, IT = IS. Formula (2) devine:

$$IC \cdot ID = IA \cdot IB = \overline{IS}^2 = \overline{IT}^2.$$

Deci triunghiul CTD e dreptunghic în T și cum $CD = 2d$, dacă O este mijlocul lui CD avem $OC = OD = OT$. Cu un cerc de centru T și de rază $d$ tăiem dreapta Δ în $O_1$ și $O_2$. Luând pe Δ:

$$C_1O_1 = O_1D_1 = d \text{ și } C_2O_2 = O_2D_2 = d$$

obținem două patrulatere soluțiuni.

Pentru ca problema să fie posibilă trebuie să avem:

$$d > IT \qquad \text{sau} \qquad d^2 > m \cdot n.$$

*PROBLEMA 4002. *Să se afle ultimile trei cifre ale cubului numărului 43046721, fără a face ridicări la cub.*

N. N. MIHĂILEANU.

1°. Căutând divizorii numărului dat, observăm că avem :

$$N = 43046721 = 9^8 = 81^4 = 6561^2$$

încât putem scrie :

$$N^3 = (10 - 1)^{24} = (80 + 1)^{12} = (6560 + 1)^6.$$

Să dezvoltăm pe $N^3 = (10 - 1)^{24}$, formă care se pretează mai bine pentru scopul ce-l urmărim, după formula lui NEWTON :

$$N^3 = 10^{24} - 24 \cdot 10^{23} + \frac{24 \cdot 23}{1 \cdot 2} 10^{22} - \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3} 10^{21} + \cdots$$

Observăm că termenii cari conţin pe 10 la o putere superioară sau egală lui 3, vor da numere terminate cu cel puţin trei zeruri, deci cari nu interesează problema de faţă. Ca atare, din dezvoltarea de mai sus, nu vom reţine decât ultimii trei termeni şi pentru a-i găsi, atunci în termenul general al dezvoltării :

$$\frac{m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} a^{m-n} b^n$$

unde în cazul nostru avem :

$$a = 10 \quad ; \quad b = -1 \quad \text{şi} \quad m = 24,$$

vom face pe rând :

$n = 24$ şi obţinem ultimul termen $\ldots : (-1)^{24} = 1$

$n = 23$ şi obţinem penultimul termen $\ldots : 24 \cdot 10 \cdot (-1)^{23} = -24 \cdot 10$

$n = 22$ şi ob. al treilea din urmă termen $\ldots : \frac{24.23}{2} \cdot 10^2 (-1)^2 = \frac{24.23}{2} \cdot 10^2$

încât expresiunea, care ne va da ultimile trei cifre ale lui $N^3$ este :

$$E = \frac{24 \cdot 23}{2} \cdot 10^2 - 24 \cdot 10 + 1 = 27.600 - 240 + 1 = 27361$$

adică ultimile trei cifre sunt : 3 ; 6 ; 1.

*Observări:*

*a)* Soluția de mai sus, care după forma numărului dat, bănuiesc a fi și cea dată de autorul problemei este indicată la cercetări analoage problemei de față numai pentru numere N, cari se pot pune sub una din formele:

$$N = (10 \pm 1)^k \; ; \; N = (10\,A \pm 1)^p$$

prima din aceste forme, fiind cea mai convenabilă, iar cea de a doua, cu cât numărul A este mai mic. Evident că pe această cale putem face cercetări și pentru un număr de forma:

$$N = (a + b)^m$$

dar devine mai greoaie.

*b)* Calea urmată la soluția de sub (1⁰) și pentru numere de forma indicată sub (a) — poate fi extinsă pentru orice putere a unui număr dat N, fără a se întâmpina greutăți —, dar câștigând în importanță. Astfel problema 4002 s'ar fi putut enunța astfel, spre exemplu:

„Să se afle ultimile trei cifre ale puterii a $100^a$ a numărului 43046721". Și în acest caz n'ar mai fi fost nevoie de recomandația de a nu se ridica numărul la puterea o sută!! Pentru curiozitate să căutăm aceste ultime trei cifre în cazul puterii 100. Pentru puterea $n$, numărul dat devine: $N^n = (10 - 1)^{8n}$ iar expresiunea care dă ultimile trei cifre se scrie:

$$E = \frac{8n\,(8n-1)}{1\,.\,2} \cdot 10^2 - 8n\,.\,10 + 1\,,$$

care pentru $n = 100$ devine:

$$E = 400 \times 799 \times 100 - 800 \times 10 + 1$$

adică ultimile trei cifre vor fi: 001.

Remarcăm cu această ocaziune că ultimile trei cifre și ale numărului $N^n = (10 + 1)^{8n}$, pentru $n = 100$, ar fi fost tot: 001 iar ultimile patru cifre: 8001.

*c)* Problema se mai poate extinde și în sensul de a se căuta un număr mai mare de cifre dela urmă.

2⁰. Pentru cazul când numărul N, nu este de forma $N = a^k$, atunci este evident că nu putem urma calea indicată până aci. In acest caz, vom conduce rezolvarea problemei în felul următor:

Scriem :

$$N = 10^3 (10^{n-4} a + 10^{n-5} b + 10^{n-6} c + \ldots + v) + 10^2 x + 10y + 2$$

sau :

$$N = 10^3 A + B$$

unde am însemnat pentru uşurinţă, paranteza cu A iar suma ultimilor trei termeni cu B. Dacă ridicăm această din urmă expresiune la cub observăm că toţi termenii dezvoltării conţinând pe A au cel puţin ultimile trei cifre pe zero. In concluzie :

*Ultimile* p *cifre ale puterii de ordinul* k *ale unui număr depind numai de ridicarea la puterea* k *a ultimelor* p *cifre ale acelui număr.*

Urmează deci să ridicăm la cub numai pe B şi obţinem :

$$(100x + 10y + z)^3 = (100\ x)^3 + 3\,(100x)^2\,(10y + z)$$
$$+ 3\,(100x)\,(10y)^2 + 6\,(100x)\,(10yz) + (10y)^3$$
$$+ 3z^2\,(100x + 10y) + 3\,(10y)^2 z + z^3.$$

Eliminând şi din această dezvoltare, termenii cari ar avea ca ultime trei cifre pe zero, ne rămâne de considerat numai expresiunea

$$E = z^3 + 300\,xz^2 + 30\,yz^2 + 300\,y^2 z$$

sau :

$$E = z\,[z^2 + 30\,z\,(10x + y) + 300\,y^2].$$

Introducem în această expresie valorile : $x = 7$ ; $y = 2$ ; $z = 1$ şi obţinem :

$$E = [1 + 30\,(10 \times 7 + 2) + 300 \times 4] = 1 + 30 \times 72 + 1200 = 3361$$

deci ultimile trei cifre căutate sunt : 3 ; 6 ; 1.

*Observări.*

*a)* Concluzia generală de sub ($2^0$) reiese din faptul că pentru a căuta ultimile $p$ cifre, vom scrie numărul astfel :

$$N = 10^p\,(10^{n-p-1} a + 10^{n-p-2} b + \ldots + g) + 10^{p-1} h + \ldots + 10y + z$$

şi vom avea :

$$N^k = [10^p A + B]^k$$

*b*) Concluzia amintită o putem aplica numărului dat, care revine a considera numai numărul format din ultimile trei cifre, adică pe 721. Dar acest număr se scrie:

$$721 = 720 + 1 = 10 \cdot 72 + 1$$

adică este de forma $10A + 1$ şi dacă îi aplicăm dezvoltarea la cub, ultimii trei termeni dau:

$$300 \times 72^2 + 30 \times 72 + 1 = 1554200 + 2160 + 1 = 1556361,$$

ceeace revine a ridica tot la cub, lucru nepermis de datele problemei. In acest fel au rezolvat problema D-nii: I. EPURAN (elev cl. 7-a Lic. militar Tg.-Mureş) şi P. M. VARLAM (cl. VI. Seminarul Pedagogic, Buc.) pe când D-l SUB-LT. C. D. IONESCU-ŢIU (Geniu) nu a urmat nici această cale, ci a înmulţit pe 721 prin el însuşi de 3 ori, oprind produsele cari conveneau la găsirea numărului format din ultimile trei cifre.

CPT. GH. N.

PROBLEMA 4019. *Oricare ar fi* $\alpha$ *şi* $\beta$ *să se arate că avem:*

$$\frac{\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta)+2}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}(\alpha-\beta)} - 2\operatorname{cotg}2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$$

$$\frac{\operatorname{cotg}^2(\alpha+\beta)+\operatorname{cotg}^2(\alpha-\beta)+2}{\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)+\operatorname{cotg}(\alpha-\beta)} + 2\operatorname{cotg}2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}.$$

N. C.

*Soluţie.*

1°. Pentru a demonstra prima identitate, vom exprima mai întâi $\operatorname{cotg}2\alpha$ în funcţie de $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ şi $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ în modul următor:

$$\operatorname{cotg}2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]} = \frac{1-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}.$$

Ţinând seama de această expresiune a cotg2α, vom transforma succesiv prima parte a identităţii întâi aducând-o sub forma părţii a doua:

$$\frac{tg^2(\alpha+\beta)+tg^2(\alpha-\beta)+2}{tg(\alpha+\beta)+tg(\alpha-\beta)} \quad \frac{2-2tg(\alpha+\beta)\,tg(\alpha-\beta)}{tg(\alpha+\beta)+tg(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{[tg(\alpha+\beta)+tg(\alpha-\beta)]^2}{tg(\alpha+\beta)+tg(\alpha-\beta)}=tg(\alpha+\beta)\,tg(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{sin2\alpha}{cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}=\frac{sin2\alpha}{cos^2\alpha-sin^2\beta}.$$

Prima identitate este astfel demonstrată.

2⁰. In mod analog pentru a doua identitate vom exprima cotg2α în funcţie de cotg(α+β) şi cotg(α−β) astfel:

$$cotg2\alpha=cotg[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\frac{cotg(\alpha+\beta)\,cotg(\alpha-\beta)-1}{cotg(\alpha+\beta)+cotg(\alpha-\beta)}.$$

In baza acestei expresii partea întâi a identităţii a doua se transformă:

$$\frac{cotg^2(\alpha+\beta)+cotg^2(\alpha-\beta)+2}{cotg(\alpha+\beta)+cotg(\alpha-\beta)}+\frac{2cotg(\alpha+\beta)\,cotg(\alpha-\beta)-2}{cotg(\alpha+\beta)+cotg(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{[cotg(\alpha+\beta)+cotg(\alpha-\beta)]^2}{cotg(\alpha+\beta)+cotg(\alpha-\beta)}=cotg(\alpha+\beta)+cotg(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{sin2\alpha}{sin(\alpha+\beta)\,sin(\alpha-\beta)}=\frac{sin2\alpha}{sin^2\alpha-sin^2\beta}.$$

Am demonstrat astfel şi a doua identitate.

GEORGE ŞT. ROŞCA.

*Soluţii* bune, însă demonstraţii mai lungi, dela D-nii: N. N. ALDEA, A. EM. BĂDESCU, IULIU DEAC, GH. V. GHIUŢĂ, C. D. IONESCU-ŢIU (SUB-LOCOT.), M. MARGULIUS, EM. MEREÚŢĂ, N. N. MIHĂILEANU, M. L. A. NEGREA, ŞT. E. OLTEANU, I. G. PAREPEANU, N. PATRAULEA, RUSU D. CONST.

N. C.

PROBLEMA 4043. *Soient* $\Omega_a$ , $\Omega_b$ , $\Omega_c$ *les cercles qui passent par les sommets* A, B, C *d'un triangle et sont tangents respectivement aux côtés* BC, CA, AB *en leur millieux ;* $M_a$ *et* $N_a$ , $M_b$ *et* $N_b$ , $M_c$ *et* $N_c$ *les intersections de* BC, CA, AB *avec* $\Omega_b$ *et* $\Omega_c$ , $\Omega_c$ *et* $\Omega_a$ , $\Omega_a$ *et* $\Omega_b$ . *Montrer que :*

1) *Les médianes du triangle sont moyennes proportionelles entre les hauteurs et les diamètres des cercles* $\Omega_a$ , $\Omega_b$ , $\Omega_c$ .

2) *On a la relation :*

$$a \cdot \overline{M_aN_a} + b \cdot \overline{M_bN_b} + c \cdot \overline{M_cN_c} = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

V. THÉBAULT.

*Soluţie şi generalizare* dată de D-l M. POPESCU-STĂNEŞTI.

1°. Fie A' un punct oarecare pe latura BC şi fie $\Omega_a$ cercul trecând prin vârful A şi tangent laturei BC în punctul A'. Segmentul AA' este medie proporţională între înălţimea $AA_1$ şi diametrul cercului $\Omega_a$. In adevăr, perpendicularele în A pe AA' şi în A' pe BC se întâlnesc în punctul A''. Cercul de diametru A'A'' este cercul $\Omega_a$. Dacă $A_2$ este proiecţia lui A pe A'A'', segmentul $A'A_2$ este egal cu înălţimea $AA_1$. In triunghiul dreptunghic AA''A' avem :

$$\overline{AA'}^2 = \overline{A'A''} \cdot \overline{A'A_2} = \overline{A'A''} \cdot \overline{AA_1}$$

care demonstrează prima parte a problemei, într'un caz mai general.

2°. Să considerăm punctele A', B', C' pe laturile BC, CA, AB, astfel ca :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\lambda \ , \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\mu \ , \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\nu .$$

Deducem :

$$\overline{A'B} = \frac{\lambda a}{\lambda - 1} \ , \quad \overline{A'C} = \frac{a}{1 - \lambda}$$

şi patru relaţii analoage.

Fie $\Omega_b$ , $\Omega_c$ cercurile analoage cu $\Omega_a$ ; $M_a$ , $N_a$ , $M_b$ , $N_b$ , $M_c$ , $N_c$ punctele definite în enunț relativ la aceste cercuri.

Puterea punctului C, față de cercul $\Omega_b$ este:

$$\overline{CM_a} \cdot \overline{CB} = \overline{CB'}^2$$

din care scoatem

$$\overline{CM_a} = \frac{\overline{CB'}^2}{a} = \frac{\mu^2 b^2}{a(\mu - 1)^2} .$$

Analog deducem:

$$\overline{BN_a} = \frac{\overline{BC'}^2}{a} = \frac{C^2}{a(\nu - 1)^2} .$$

Rezultă:

$$\overline{M_a N_a} = a - \frac{\mu^2 b^2}{a(\mu - 1)^2} - \frac{C^2}{a(\nu - 1)^2}$$

$$a \cdot \overline{M_a N_a} = a^2 - \frac{\mu^2 b^2}{(\mu - 1)^2} - \frac{C^2}{(\nu - 1)^2}$$

și două relații analoage, care adunate ne dau:

$$a \cdot \overline{M_a N_a} + b \cdot \overline{M_b N_b} + c \cdot \overline{M_c N_c} = -2\left[\frac{\lambda a^2}{(\lambda - 1)^2} + \frac{\mu b^2}{(\mu - 1)^2} + \frac{\nu c^2}{(\nu - 1)^2}\right]$$

și dacă $\lambda = \mu = \nu = -1$, se obține relația problemei.

Au rezolvat foarte bine problema D-nii: N. N. Aldea, Aurel Em. Bădescu, Cezar Coșniță, George Roșca, Gh. C. Lupescu, N. N. Mihăileanu, Ioan C. Parepeanu, Nicolae Patraulea, Radu N. Patraulea, M. Popescu-Stănești, Nic. Popescu, S.-Lt. I. Gh. Zamfirescu.

*PROBLEMA 4076. *Două sfere goale în interior, una de fer şi alta de aluminium, au razele exterioare egale. Introduse într'un vas cu apă, ambele se scufundă până la jumătate.*

*Ştiind că densitatea ferului este* **7,8** *şi a aluminiumului* **2,9,** *se cere grosimea pereţilor fiecărei sfere.*

CĂPITAN I. LINTEŞ.

*Soluţie* dată de D-nii: ALEXANDRU D. STOICA, MARGULIUS MARIUS şi I. C. ŞOVA.

Fie R raza exterioară a sferelor, $r_f$ raza interioară a sferei de fer şi $r_a$ raza interioară a sferei de aluminium; atunci greutăţile lor fiind egale şi egale cu volumul de apă deslocuit, avem relaţiile:

$$\frac{4}{3}\Pi(R^3 - r_f^3) \times 7{,}8 = \frac{4}{3}\Pi(R^3 - r_a^3) \times 2{,}9 = \frac{2}{3}\Pi R^3 \times 1$$

unde am presupus densitatea apei egală cu unitatea.

Din relaţiunile de mai sus deducem uşor că:

$$r_f = R \cdot \sqrt[3]{\frac{73}{78}} \quad \text{şi} \quad r_a = R \cdot \sqrt[3]{\frac{24}{29}}$$

$$= 0{,}97816 \cdot R \qquad = 0{,}93888 \cdot R.$$

Atunci grosimea pereţilor fiecărei sfere va fi:

$$R - r_f = 0{,}02184 \cdot R \quad \text{şi} \quad R - r_a = 0{,}06112 \cdot R.$$

*Observaţiune.*

Grosimea practică a unei sfere de fer poate atinge un minim de *0,2mm* iar de aluminium de *0,5mm*, înţelegându-se prin grosime practică aceia ce o putem realiza cu actualele mijloace de uzinare şi pe care maleabilitatea metalelor o permite. Plecând deci dela acele cifre presupuse minime, găsim că:

$$R \geqslant \frac{0{,}2}{0{,}02184} \quad \text{şi} \quad R \geqslant \frac{0{,}5}{0{,}06112}.$$

Sau:

$$R \geqslant 9{,}157\text{mm} \quad \text{şi} \quad R \geqslant 8{,}181\text{mm}.$$

Vom admite deci:

$$R \geqslant 9{,}157 \text{ milimetri.}$$

I. L.

PROBLEMA 4078. *Să se rezolve ecuația*

$$x^3 - p(r_a + r_b + r_c)x^2 + p^4 x - Sp^4 = 0$$

*notațiile fiind cele obișnuite într'un triunghiu.*

CEZAR COȘNIȚĂ.

*Soluție* dată de D-nii: MARIUS MARGULIUS, N. A. ACIKGHEOZIAN, N. N. ALDEA, H. P. IONESCU-BISS, M. LEONTE A. NEGREA, ȘT. E. OLTEANU, I. C. PAREPEANU, G. ȘT. ROȘCA, SUBLOC. I. C. SAVIN, I. C. ȘOVA-GRIGORENI.

Scriind relațiile dintre rădăcini și coeficenți avem

$$x_1 + x_2 + x_3 = p(r_a + r_b + r_c)$$
$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = p_4$$
$$x_1 x_2 x_3 = Sp_4.$$

Din relația cunoscută

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

scoatem

$$\sum r_a r_b = \frac{r_a r_b r_c}{r} \quad ;$$

iar din

$$r_a = \frac{S}{p - a}$$

avem

$$\sum r_a r_b = p^2.$$

Din egalarea valorilor ambelor însumări rezultă

$$r_a r_b r_c = p S.$$

Ținând seamă de acestea putem scrie

$$x_1 + x_2 + x_3 = pr_a + pr_b + pr_c$$
$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = pr_a \cdot pr_b + pr_b \cdot pr_c + pr_c \cdot pr_a$$
$$x_1 x_2 x_3 = pr_a \cdot pr_b \cdot pr_c.$$

Acestea ne arată că rădăcinile ecuației din enunț sunt:

$$x_1 = pr_a \ , \ x_2 = pr_b \ , \ x_3 = pr_c,$$

cari se mai pot pune sub forma:

$$x_1 = p^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \ , \ x_2 = p^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \ , \ x_3 = p^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C.$$

COL. G. I. L.

PROBLEMA 4117. *Să se demonstreze că într'un triunghiu oarecare există relaţia*

$$16R^2\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{c_1^2}\right)=\sum\frac{bc}{p(p-2)}$$

$a_1$, $b_1$, $c_1$ *fiind distanţele între centrele cercurilor exînscrise, iar celelalte notaţii cunoscute.*

M. I. POPESCU-STĂNEŞTI.

Dacă se demonstrează că

(1) $$a_1=4R\cos\tfrac{1}{2}A\ ;\ b_1=4R\cos\tfrac{1}{2}B\ ;\ c_1=4R\cos\tfrac{1}{2}C$$

relaţia din enunţ se stabileşte imediat, deoarece din

$$\frac{4R}{a_1}=\frac{1}{\cos\frac{1}{2}A}\ ;\ \text{etc.}\ .\ .\ .$$

prin ridicare la patrat şi însumare, se obţine:

$$16R^2\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{c_1^2}\right)=\sum\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}A}=\sum\frac{bc}{p(p-a)}$$

adică relaţia din enunţ.

Relaţiile (1) au fost demonstrate de diferiţi corespondenţi astfel:

I. D-nii: Şt. E. OLTEANU (Blaj) şi N. PATRAULEA (Lic. mil. N. Filipescu):

Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul format de centrele cercurilor exinscrise şi $R_1$ raza cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$.

Avem:

$$\hat{A}_1=90^0-\tfrac{1}{2}A\ ;\ \hat{B}_1=90^0-\tfrac{1}{2}B\ ;\ \hat{C}_1=90^0-\tfrac{1}{2}C.$$

Triunghiul ABC fiind triunghiul ortic al triunghiului $A_1B_1C_1$, rezultă că cercul ABC este cercul lui EULER al triunghiului $A_1B_1C_1$ şi prin urmare $R_1=2R$.

Avem relaţiile:

$$\frac{a_1}{2\sin A_1}=\frac{b_1}{2\sin B_1}=\frac{c_1}{2\sin C_1}=R_1=2R$$

sau

$$\frac{a_1}{2\cos\frac{1}{2}A}=\frac{b_1}{2\cos\frac{1}{2}B}=\frac{c_1}{2\cos\frac{1}{2}C}=2R.$$

II. D-nii: M. LEONTE, A. NEGREA şi M. MARGULIUS
Triunghiul ABC fiind triunghiul ortic al triunghiului $A_1B_1C_1$, avem:

$$AB = A_1B_1 \cos A_1 \qquad \text{sau} \qquad a = a_1 \cos A_1 \text{ etc.}$$

Insă deoarece $IBA_1 = ICA_1 = 90^0$, patrulaterul ABCI e inscriptibil, deci $A_1 = 90^0 - \frac{1}{2}A$, şi prin urmare $a = a_1 \sin\frac{1}{2}A$.
Cum $a = 2R \sin A = 4R \sin\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}A$, rezultă $a_1 = 4R \cos\frac{1}{2}A$, etc.
III. D-nii: GH. ŞT. ROŞCA şi I. P. IACOBESCU:
Avem

$$a_1 = A_2A_3 = A_2A + AA_3$$

Dar

$$A_2A = \frac{r_b}{\cos\frac{1}{2}A} \quad \text{şi la fel} \quad AA_3 = \frac{r_c}{\cos\frac{1}{2}A}.$$

Deci

$$a_1 = \frac{r_b + r_c}{\cos\frac{1}{2}A}$$

Inlocuind $r_b$, $r_c$ in funcţie de $\operatorname{tg}\frac{1}{2}B$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$ şi $p$, avem

$$a_1 = \frac{p\,(\operatorname{tg}\frac{1}{2}B + \operatorname{tg}\frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{p.\dfrac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{p\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{p}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C} = \frac{p}{\sqrt{\dfrac{p\,(p-b)}{ac}\cdot\dfrac{p\,(p-c)}{ba}}} = \frac{p}{\dfrac{p}{a}\sqrt{\dfrac{(p-b)\,(p-c)}{bc}}}$$

$$= \frac{a}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{4R\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}A}$$

sau

$$a_1 = 4R\cos\tfrac{1}{2}A \quad , \quad \text{etc.} \ldots$$

*Notă.*
1. O formă generală a relaţiei enunţate

$$4^{2n}R^{2n}\sum\frac{1}{a_1^{2n}} = \sum\frac{1}{\cos^{2n}\frac{1}{2}A} = \sum\frac{b^n c^n}{p^n(p-a)^n}.$$

G. ŞT. ROŞCA şi ŞT. E. OLTEANU.

2. Alte soluţii dela D-nii S.-LT. E. G. MILEA, N. ZANE, I. I. PETRESCU.
COL. G. I. LIT.

PROBLEMA 4130. *Să se găsească*

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}.$$

D. V. IONESCU.

I. *Soluţie* dată de D-l GEORGE ST. ROŞCA (Craiova).
Observăm că putem scrie

$$(1) \qquad \frac{x}{\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}} \cdot \sqrt{a^2+x^2}.$$

Se ştie că

$$\lim_{u=0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Dacă punem

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sin u$$

vedem că

$$\frac{\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}} = \frac{\sin u}{u}.$$

Când $x$ tinde către zero, $u$ tinde deasemenea către zero, astfel că limita primului factor din formula (1) este 1. Limita celui de al doilea factor când $x$ tinde către zero este $a$.

Deci

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}} = a.$$

II. *Soluţie* dată de D-nii: ACIKGHEOZIAN NUBAR (Bucureşti), AUREL EM. BĂDESCU, CURCHI ION (Student, Bucureşti), MARIUS MARGULIUS (Bucureşti), MIRCEA LEONTE NEGREA (Student, Bucureşti), ŞTEFAN OLTEANU (Blaj), GEORGE ŞT. ROŞCA (Craiova), TEODORESCU ŞTEFAN.

Pentru a se găsi limita cerută se aplică regula lui HÔPITAL pentrucă expresiunea:

$$E = \frac{x}{\arcsin \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}},$$

se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$ când se face $x = 0$.

Vom avea

$$\lim_{x=0} E = \lim_{x=0} \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2+x^2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)'}$$

adică

$$\lim_{x=0} E = \lim_{x=0} \frac{a^2+x^2}{a} = a.$$

---

PROBLEMA 4149. *Modulul sumei a două numere al căror modul e mai mare ca 2, e inferior modulului produsului lor.*

P. SERGESCU.

*Soluție* dată de D-ra DORINA FABIUS (Studentă Cluj) și D-l IANCU N. SAGER.

Fie $a$ și $b$ cele două numere. Avem prin ipoteză

$$|a| > 2 \quad |b| > 2$$

$$\left|\frac{1}{a}\right| < \frac{1}{2} \quad \left|\frac{1}{b}\right| < \frac{1}{2}.$$

Ca atare

$$\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right| \leqslant \left|\frac{1}{a}\right| + \left|\frac{1}{b}\right| < \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

Cu alte cuvinte.

$$\left|\frac{a+b}{ab}\right| < 1$$

$$|a+b| < |ab|.$$

Proprietatea e stabilită.

*Altă soluție.* In baza enunțului:

$$|a| = 2+\alpha \qquad |b| = 2+\beta$$

unde $\alpha$ și $\beta$ *sunt pozitivi.* Prin urmare:

$$|ab| = (2+\alpha)(2+\beta) = 4+2(\alpha+\beta)$$
$$+\alpha\beta > 4+\alpha+\beta = (2+\alpha)+(2+\beta) = |a|+|b|$$
$$\geqslant |a+b|.$$

Ca atare, ținând seama de toate semnele de egalități și inegalități

$$|ab| > |a+b|$$

c. c. e. d. d.

---

## *EXERCIȚII

39. *m, n, p,* fiind niște numere oarecare, avem într'un triunghiu relația:

$$\Sigma\,(m^q - n^q)\,\frac{\sin^q A}{a^q} = 0.$$

(Generaliz. ex. 8 G. M. XXXVI p. 37).

N. N. Velicescu.

R. Având $\qquad \frac{\sin^q A}{a^q} = \frac{\sin^q B}{b^q} = \frac{\sin^q C}{c^q}$,

relația dată se scrie și

$$\frac{\sin^q A}{a^q}\,\Sigma\,(m^q - n^q)$$

care este nulă, căci

$$\Sigma\,(m^q - n^q) = 0.$$

# PROBLEME PROPUSE

*4161. Un dulap are *6* sertare care se încheie cu *6* chei de acelaşi tip. Cheile fiind amestecate, care este numărul minimum şi numărul maximum de încercări ce trebuiesc făcute pentru a le descuia pe toate când ele sunt închise? Se va presupune mai întâiu că cheile sunt diferite şi apoi că unele se potrivesc la mai multe sertare.

I. Ionescu.

*4162. Să se găsiască un număr de trei cifre egal cu suma dintre cubul uneia din cifrele sale, plus pătratul altei cifre şi plus cea de-a treia cifră.

N. C.

*4163. Dacă printr'un punct K din planul unui dreptunghiu, ducem paralele cu laturile lui, unghiul a două diagonale adiacente, din două dreptunghiuri astfel formate, este egal cu unghiul celorlalte două diagonale ale acelor dreptunghiuri.

Cum trebuie construit punctul K în cazul unui paralelogram pentru ca proprietatea să subziste?

O. N. Ţino.

*4164. Se consideră în acelaş plan două triunghiuri ABC, A'B'C' şi un punct M.

1°. Dacă dreptele AM, BM, CM întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului A'B'C' în trei puncte colineare, sau în picioarele a trei ceviene concurente, atunci şi dreptele A'M, B'M, C'M întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului ABC în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente.

2°. Dacă perpendicularele coborîte din M pe AM, BM, CM întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului A'B'C' în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente, atunci şi perpendicularele coborîte din M pe A'M, B'M, C'M întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului ABC în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente.

3°. Să se dea cazuri particulare remarcabile.

N. Botea.

4165. Să se desvolte determinantul:

$$\begin{vmatrix} a_0^r & (a_0+1)^r & (a_0+2)^r & \dots & (a_0+r)^r \\ a_1^r & (a_1+1)^r & (a_1+2)^r & \dots & (a_1+r)^r \\ a_2^r & (a_2+1)^r & (a_2+2)^r & \dots & (a_2+r)^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r^r & (a_r+1)^r & (a_r+2)^r & \dots & (a_r+r)^r \end{vmatrix}$$

I. B. Florescu.

*4166. Să se determine funcțiunea,

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + \alpha x + \beta}$$

știind că:

$$f(-1) = 2,\ f(2) = 1,\ f(3) = \tfrac{4}{5},\ f(4) = \tfrac{7}{9}$$

și apoi să se calculeze expresia

$$E = x^2[f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)] + x[3f(x+1) - 2f(x) - f(x-1)] + 2[2f(x) - f(x-1)].$$

Gh. Th. Gheorghiu.

4167. Se dă relația de recurență

$$U_n = a^2 - U_{n-1}^2 \quad (1)$$

$U_1$ fiind dat relația (1) definește șirul de numere

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, \dots \quad (2)$$

Se consideră numărul $V_1$ pozitiv și inferior rădăcinii $x_1$ a ecuației

$$x^2 + x - a^2 = 0. \quad (3)$$

Să se arate că șirurile de numere,

$$U_1, U_3, \dots, U_{2n-1}, \dots$$

$$U_2, U_4, \dots, U_{2n}, \dots$$

deduse din șirul (2) sunt crescătoare sau descrescătoare.

Dacă

$$a^2 \leqq \tfrac{3}{4}$$

cele două şiruri au ca limită rădăcina $x_1$ a ecuaţiei (3);

dacă $$\tfrac{3}{4} < a^2 < 1$$

cele două şiruri au ca limită rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 - x + 1 - a^2 = 0.$$

TH. ANGHELUŢĂ.

4168. Să se rezolve ecuaţiile

$$P_4(x) \equiv x^4 - 2x^3 - 41x^2 + 42x + 360 = 0 \quad \text{şi} \quad P'_4(x) = 0$$

profitând de faptul că $P_4(x)$ se poate pune sub forma $Q_2[R_2(x)]$, unde $Q_2(x)$ şi $R_2(x)$ sunt nişte polinoame de gradul 2 în $x$.

Ce relaţie trebuie să existe între coeficienţii unui polinom $P_4(x)$ pentru a se putea aplica această metodă în rezolvarea ecuaţiei $P_4(x) = 0$?

Să se arate că dacă o ecuaţie de această formă are o singură rădăcină dublă, acea rădăcină dublă e egală cu media aritmetică a celorlalte două.

G. CĂLUGĂREANU.

4169. Se dă un cerc cu centrul în O şi o coardă AB. Pe arcul AB se dă un punct C. Prin C se duce o secantă mobilă care taie pe AB în P, iar cercul O în Q. Să se determine relaţiunea ce fixează poziţia de maximum a secantei CQ pentru ca segmentul PQ să fie maxim.

M. NICOLAU.

4170. Printre numerile de atracţie ale târgului naţional din *„Moşi"* este şi un motociclist, care merge cu motocicleta sa pe interiorul pereţilor unui cilindru vertical de rază *5m.*

Ştiind că diversele parcursuri le face cu vitezele: 80, 100 şi $120^{km}/_{oră}$, se cere să se calculeze înclinarea planului motocicletei, faţă de generatricea cilindrului, pentru fiecare parcurs în parte.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

---

*ERATĂ.* La problema 4160, propusă la pag. 440, densitatea aerului este:

$$\delta = (1{,}0000226 \,.\, z)^{4{,}256}.$$

# TABLA DE MATERII

# TABLA DE MATERII

## A. ARTICOLE

### Aritmetica


| | | Pag. |
|---|---|---|
| *V Thébault* | Sur les carrés parfaits . . . . . | 41 |
| *I. Ionescu* | Divizibilitatea determinanţilor numerici . . . | 124 |
| *I. B. Florescu* | Generalizări ale şirului lui Fibonacci . . . . . | 289 |
| *Ion V. Măties* | Asupra ultimului grup de *p* cifre ale patratelor perfecte . . . . . | 366 |


### Geometria


| | | |
|---|---|---|
| *Gh. Zapan* | O proprietate a trei drepte concurente tăiate de o transversală . . . . . | 17 |
| *D. Barbilian* | Articol de geometrie . . . . . | 81 |
| *V. Thébault* | Sur les points isotomiques dans le triangle . | 121 |
| *V. Thébault* | Sur une analogie entre le parallélograme et le parallélipipède . . . . . | 161 |
| *D. Barbilian* | Articol de geometrie (urmare) . . . . . | 165 |
| *V. Thébault* | Géométrie et Mécanique . . . . . | 241 |
| *Col. Gh. Buicliu* | Câteva locuri geometrice elementare . . . . . | 248 |
| *R. Goormaghtigh* | Sur le point et la conique de Frégier . . . . | 281 |
| *Căpitan Gh. Niculescu* | Triunghiuri „de laturi inverse" . . . . . | 283 |
| *V. Thébault* | Systèmes de points concycliques . . . . . | 321 |
| *Căpitan Gh. Niculescu* | Funcţiuni omogene simetrice şi triunghiuri de laturi inverse . . . . . | 364 |
| *V. Thébault* | Sur le triangle podaire . . . . . | 401 |
| *Gh. Zapan* | Asupra configuraţiilor determinate de *n* linii drepte intersectate de o transversală . . . | 409 |
| *Nic. Botea* | Observaţiuni în legătură cu o propoziţiune a d-lui Pompeiu . . . . . | 441 |

**Geometria analitică** Pag.

*A. Myller* — Curbe paralele şi antiparalele . . . . . 405
*Ion C. Vasiliu* — Asupra axelor conicelor unui triunghiu . . . 417

**Geometria diferenţială**

*R. Goormaghtigh* — Généralisation de la formule du rayon de courbure en coordonnées polaires . . . . . 324

**Algebra**

*Ioan B. Florescu* — Asupra rezolvării în numere întregi a unei ecuaţii omogene de gradul al doilea cu *n* variabile . . . . . 45
*Petre Sergescu* — Ecuaţii cu rădăcinile subunitare . . . . . 128
*George Călugăreanu* — Asupra unor serii cu termeni complecşi . . . 163
*N. Ciorănescu* — Asupra limitării rădăcinilor unei clase de ecuaţii algebrice . . . . . 201
*Gh. Constantinescu* — Soluţiuni întregi ale ecuaţiunii . . . . . 202
*A. Angelescu* — Asupra unor medii . . . . . 244
*I. Ionescu* — Reducerea preliminară a necunoscutelor la stabilirea ecuaţiilor . . . . . 326
*D. V. Ionescu* — Un sistem de ecuaţii liniare . . . . . 405

**Mecanica**

*Căpitan I. Linteş* — Mişcarea gazelor cu viteze foarte mari . . . . 415

**Diverse**

*** — Lista membrilor Societăţii „Gazeta Matematică". 5
*** — Membrii decedaţi . . . . . 14
*I. Buşilă, A. Sălăgeanu* — Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice" . . . . . 15
*Ing. Ion Antoniu, Căp. Ing. Gh. Zapan* — Raportul comisiunii asupra decernării premiului „General Sc. Panaitescu" . . . . . 254
*N. C.* — Al doilea Congres al Matematicienilor Români. 361


## B. NOTE MATEMATICE


1. *A. I. M.* — O soluţie practică a problemei 1364 . . . . . 21
2. *H. P. Ionescu* — Asupra exerciţiului din Anul XXXV, pag. 196 . 21

| | | | Pag. |
|---|---|---|---|
| 3. | *Al. A. Roşu* | Asupra exerciţiului 49 din Anul XXXIII . . . . | 22 |
| 4. | *Virgiliu C. Popescu* | Asupra patratelor perfecte de 7 şi 8 cifre . . | 22 |
| 5. | *I. B. Fl.* | Asupra problemei 3951 . . . . . | 23 |
| 6. | *V. Thébault* | Expresion du rapport de similitude de deux triangles . . . . . | 49 |
| 7. | *D. B.* | O demonstraţie a teoremei lui Laguerre . . . | 50 |
| 8 | *V. Thébault* | Curiosités arithmétiques . . . . . | 89 |
| 9. | *I. Ionescu* | Numitorii subinţeleşi . . . . . | 91 |
| 10. | *I. B. Fl.* | Asupra indicatorilor . . . . . | 92 |
| 11. | *Ion C. Vasiliu* | Asupra problemei 3055 . . . . . | 94 |
| 12 | *I. Murăroiu* | Asupra problemei 3860 . . . . . | 94 |
| 13. | *Virgiliu C. Popescu* | Asupra problemei 3652 . . . . . | 133 |
| 14. | *N. N. Mihăileanu* | O demonstraţie trigonometrică a teoremei lui Céva . . . . . | 133 |
| 15. | *Adrian C. Gheorghiu* | O definiţie a cercurilor directoare . . . . . | 135 |
| 16. | *I. I.* | Asupra problemei 3611 . . . . . | 172 |
| 17. | *H. P. Ionessu* | Asupra problemei 3882 . . . . . | 173 |
| 18. | *N. D. Dobrogeanu* | Asupra unor exerciţii . . . . . | 173 |
| 19. | *I. B. Fl.* | Descompunerea unei sume de patrate in patratele ei. . . . . | 173 |
| 20. | *V. Thébault* | Curiosités arithmètiques . . . . . | 205 |
| 21. | *I. Ionescu* | Patratele de patru cifre la care suma primelor două cifre egalează suma ultimilor două . . | 207 |
| 22. | *I. I.* | O axiomă enunţată de *Dimitrie Cantemir* . . | 208 |
| 23. | *Petre Sergescu* | Al doilea Congres al matematicienilor români | 254 |
| 24. | *Col. Gh. Buicliu* | Asupra numărului 5041 . . . . . | 256 |
| 25. | *N. N. Mihăileanu* | Asupra problemei 3967 . . . . . | 257 |
| 26. | *H. P. Ionescu-Biss* | Asupra exerciţiului 72 — XXXV — 479 . . . . | 257 |
| 27. | *V. Thébault* | Sur la relation du triangle $rr_a = (p-b)(p-c)$ . | 292 |
| 28. | *I. B. Fl.* | Asupra notei No. 39 Vol. XXXVI . . . . . | 292 |
| 29. | *Micu Grünbaum* | Două teoreme asupra triunghiurilor cosogonale. | 294 |
| 30. | *N. N. Mihăileanu* | Câteva forme trigonometrice ale relaţiilor Menelaus şi Céva . . . . . | 296 |
| 31. | *Adrian C. Gheorghiu* | Asupra Notei 15 . . . . . | 297 |
| 32. | *I. I.* | In „Gazeta Matematică". Anul XIII pagina 327, la Nota 25 . . . . . | 330 |
| 33. | *Ioan V. Mătieş* | Generalizarea problemei 3783 . . . . . | 330 |
| 34. | *Căp. Gh. Niculescu* | Asupra triunghiurilor $(\Delta)_0$ . . . . . | 370 |
| 35. | *Iuliu Deac* | Câteva teoreme ale lui Archimede . . . . . | 372 |
| 36. | *Adrian C. Gheorghiu* | Asupra problemei 2809 generalizată . . . . . | 374 |
| 37. | *I. Ionescu* | Alte zece Geometrii diverse . . . . . | 423 |
| 38. | *I. Ionescu* | Asupra mecanicelor diverse . . . . . | 423 |
| 39. | *I. Ionescu* | Alte zece algebre diverse . . . . . | 445 |
| 40. | *M. G.* | Asupra numărului indicatorilor unui număr dat. | 446 |

## C. CHESTIUNI DE EXAMEN

Pag.

*Şcoala Superioară de Aeronautică (Paris)* Sesiunea Iunie 1931 . . . . . 53
*Şcoala Politechnică „Regele Carol II" Bucureşti* Sesiunea Iunie 1931 . . . . . 54
*Şcolile Militare pregătitoare şi speciale ale Aeronauticei „Regele Carol II"* Examenul de admitere din August 1931 . . . 58
*Facultatea de Ştiinţe din Cluj* Probele la examenele din sesiunea Iunie 1931 . 208
*Facultatea de Ştiinţe din Cluj* Chestiuni de examen în sesiunea Octomvrie 1931 . . . . . 298, 375
*Şcoala Politechnică „Regele Carol II" Bucureşti* Concurs de admitere în Ciclul I (Octomv. 1931). 380

## D. BIBLIOGRAFII

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina . . 23, 61, 136, 176, 216, 258, 334, 381, 424, 447
Boletin Matematico . . . 23, 61, 97, 136, 176, 216, 258, 334, 381, 447
Sphinx . . . . . 23
Revista matematică din Timişoara 23, 97, 136, 176, 217, 258, 334, 382, 424, 447
*H. Beghin et G. Julia* Exercices de Mécanique . . . . . 60
Bulletin of the American Mathematical Society . . 60, 61, 136, 175, 216, 258 301, 334, 380, 448
Journal de mathématiques élémentaires . 62, 97, 136, 176, 216, 258, 302, 334, 381, 424, 447
Seminarul de matematici al Facultăţii de ştiinţe din Cluj. Activitatea didactică şi ştiinţifică . . . . . 62, 424
*P. Sergescu* Note din activitatea Societăţii matematice în anul 1921 . . . . . 62
*P. Sergescu* Sur le module des zéros des dérivées des fonctions bornées . . . . . 62
*P. Sergescu* Discours fait à la séance inaugurale du Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences à Alger, en 1930 . . . . . 62
Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine . . . 96, 175, 380
Mathesis . . . . . 96, 136, 216, 258, 334, 381
Mathematica . . . . . 96, 175, 447
Boletin del Seminario matematico Argentino . . . . . 96, 424
Revista ştiinţifică „V. Adamachi" . . . . . 97, 382, 447
Natura . . . . . 97, 176
*M. Ghermanesco* Sur les fonctions n-métaharmoniques . . . . 97
*Miron Nicolesco* Sur les fonctions harmoniques d'ordre *p*. . . 97
*Miron Nicolesco* Sur une équation à dérivées partielles caractérisant les moyennes de M. Picone . . . . 97

| | | Pag. |
|---|---|---|
| *Miron Nicolesco* | Sulle funzioni metaarmoniche in $n$ variabili . . | 97 |
| *Miron Nicolesco* | Sur certaines transformations ponctuelles de l'espace à quatre dimensions . . . . . | 97 |
| *Miron Nicolesco* | Remarque sur l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants . . . . . | 97 |
| *Miron Nicolesco* | Sur l'intégration orientée des équations différentielles non analytiques . . . . . | 97 |
| *Petru Bogdan* | Opera lui Anghel Saligny şi învăţământul tecnic în România . . . . . | 97 |
| Boletin Matematico Elemental . . . . | | 136, 176, 216, 302, 334, 381, 424, 447 |
| *D. Germani* | Sur la structure des formules et la synthèse des lois de similitude en physique. Considération sur les grandeurs et leurs unités . . . | 136 |
| *Cl. Servais* | Sur la géométrie du tetraédre . . . . . | 137 |
| *E. Heuchamps* | Sur des suites très générales qui se développent conformément à la loi de formation des réduites d'une fraction continue . . . . . | 137 |
| *Capitaine Ingénieur G. Niculesco* | Sur une famille spéciale de tolérances appliquée aux moteurs d'aviation . . . . . | 137 |
| *Căpitan Inginer G. Niculescu* | Studiu critic asupra Challenge-ului internaţional de turism din 1929 . . . . . | 137 |
| Buletinul Societăţii politechnice . . . . . | | 176 |
| Revista de pedagogie . . . . . | | 176 |
| *A. Haarbleicher* | De l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonées. Nouvelle géométrie du triangle | 176 |
| *N. Saegiu* | Fermat'sche Satz. Allgemeine Beweisführung . | 177 |
| Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliqués de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II" Bucarest . | | 216, 382 |
| Activité de la Société de mathématique de Belgique . . . . . | | 217 |
| *J. Leemans* | Changément du triangle de référence en coordonées barycentriques . . . . . | 217 |
| *De Montessus de Ballore* | Le génie de mathématiques . . . . . | 217 |
| *A. Devresse* | Le problème de Pothénot résolu à l'aide de la règle seulement . . . . . | 258 |
| *Alfred Errera* | Les mathématiques en Belgique de 1830 à 1930. | 259 |
| *Radu Bădescu* | Sur le troisième théorème de Fredholm relatif à une équation intégrale particulière . . . | 259 |
| *Radu Bădescu* | Sull'equazione di Fredholm nel campo complesso. | 259 |
| *Radu Bădescu* | Sur une équation fonctionelle . . . . . | 259 |
| *Radu Bădescu* | Résolution d'une équation fonctionelle et fonctions itératives generalisées . . . . . | 259 |
| *G. Călugăreanu* | Asupra unor serii cu termeni complecşi . . . | 259 |
| *G. Călugăreanu* | Sur un complément au théorème de E. Borel. | 259 |

| | | Pag. |
|---|---|---|
| *G. Călugăreanu* | Sur la condition nécessaire et suffisante pour l'univalence d'une fonction dans un cercle . | 259 |
| *Emile Picard* | Quelques applications analitiques de la Théorie des courbes et des surfaces algébriques . . | 259 |
| *E. Cartan* | Leçons sur la Géométrie projective complexe . | 259 |
| American Mathematical Society | . . . . . | 301 |
| *D. Barbilian* | Untersuchungen über die Cliffordschen Ketten . | 302 |
| *D. Barbiliau* | Beitrag zu einem Satz des Herrn Pompeiu . . | 302 |
| *G. Vrânceanu* | Sur quelques points de la théorie des espaces non holonomes . . . . . | 302 |
| *G. Vrânceanu* | Parallélisme et courbure dans une variété non holonomes . . . . . | 302 |
| *G. Vrânceanu* | Memoriu de titluri şi lucrări . . . . . | 302 |
| *N. Ciorănesco* | Sur les fonctions harmoniques conjuguées . . | 302 |
| *N. Ciorănesco* | Sur l'intégration des équations différentielles linéaires avec les conditions initiales linéaires les plus générales . . . . . | 302 |
| *G. Demetrescu* | Dare de seamă asupra activităţii Observatorului astronomic din Buc. in cursul anului 1931 . | 302 |
| *Alfred Henri* | Le calcul des differences finies et ses applications. | 302 |
| *Gheorghe Naneş* | Lecţiuni de astronomie pentru cl. VII sec. . . | 303 |
| *N. Abramesco* | Le mouvement d'une figure plane variable qui reste semblable à elle même . . . . . | 303 |
| *N. Abramesco* | Sur le facteur de convergence uniforme de M. Leja d'une série de polynomes . . . . . | 304 |
| *N. Abramesco* | Sur la détermination des fonctions holomorphes dans des domaines données . . . . . | 304 |
| Vlăstarul | . . . . . | 335 |
| *Gaston Julia* | Principes géométrique d'analyse . . . . . | 335 |
| *V. Thébault* | Contribution à la géométrie du triangle . . . | 335 |
| *Ion Ionescu* | Istoricul învăţământului, Inginerii în România . | 335 |
| *R. Noguès* | Théorème de Fermat. Son histoire . . . . . | 335 |
| *G. Sudan* | Zur Jacobsthalschen transfiniten Arithmetik . | 382 |
| *G. Sudan* | Sur une théorème de Hessenberg . . . . . | 382 |
| *M. Ghermanesco* | Sur les fonctions n-métaharmoniques . . . . | 382 |
| *M. Ghermanesco* | Sur les solutions fondamentales de l'équation n-métaharmonique . . . . . | 382 |
| *M. Ghermanesco* | Sur les moyennes successives d'une fonction métaharmonique . . . . . | 382 |
| *M. Ghermanesco* | Sur certains systèmes linéaires d'équations aux dérivés partielles du type elliptique . . . | 382 |
| *M. Ghermanesco* | Sur les fonctions n-métaharmoniques . . . . | 383 |
| *M. Ghermanesco* | Sur une complexe quadratique de droites . . | 383 |
| *Spiridon Ghiţescu* | Problema lui Bayess . . . . . | 383 |
| *C. C. Teodorescu* | Calculul probabilităţilor aplicat în industrie . . | 383 |

| | | Pag. |
|---|---|---|
| Buletinul Societăţii de Matematici a Liceului „Tasse Dumitrescu" din Mizil | | 383 |
| *P. Montel* | Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes | 424 |
| *P. Sergescu* | Spiritul cel nou în Legea învăţământului universitar | 424 |
| *Gaston Julia* | Principes géométriques d'analyse | 424 |
| *M. Ghermanesco* | Sur l'intégrale de Poisson | 448 |
| *M. Ghermanesco* | Sur l'intégrale des fonctions de deux variables complexes | 448 |
| *M. Ghermanesco* | Sur une classe de fonctions monogènes | 448 |
| *M. Ghermanesco* | Sur les fonctions monogènes | 448 |
| *M. Ghermanesco* | Sur l'intégrale de Weyl | 448 |
| *M. Ghermanesco* | Sur une généralisation de l'equation de Laplace | 448 |
| *M. Ghermanesco* | Sur le problème de Riquier | 448 |


## E. CERERI

| *Nr. Cererii* | *Pagina la care a fost:* Propusă | Dat răspuns | *Nr. Cererii* | *Pagina la care a fost:* Propusă | Dat răspuns |
|---|---|---|---|---|---|
| 209 | | | 215 | 260 (XXXVII) | |
| 210 | 62 (XXXVII) | | 216 | 304 „ | |
| 211 | 98 „ | | 217 | 337 „ | |
| 212 | 137 „ | | 218 | 384 „ | |
| 213 | 179 „ | | 219 | 425 „ | |
| 214 | 217 „ | | 220 | 448 „ | |

## F. DIVERSE

Informaţiuni privitoare la:

Activitatea Societăţii Române de Ştiinţe, Secţia Matematici;

Congresul matematicienilor Polonezi;

Premiul anual „Traian Lalescu";

Congresul internaţional al matematicienilor dela Zürich;

Alegerea D-lui P. Sergescu ca membru corespondent la Societas scientiarum Varsoviensis;

Suplimentul No. 8.

Congresul Asociaţiunei franceze pentru înaintarea ştiinţelor (fuzionată cu Asociaţiunea ştiinţifică din Franţa);

Al doilea congres al Matematicienilor Români.

## G. PROBLEME PROPUSE

### *a)* Repartizarea problemelor propuse după materii

| | |
|---|---|
| *Aritmetica* | 4051, 4052, 4053, 4061, 4063, 4071, 4072, 4073, 4074, 4081, 4082, 4091, 4092, 4093, 4101, 4102, 4103, 4111, 4112, 4113, 4121, 4122, 4123, 4131, 4132, 4133, 4141, 4142, 4143, 4151, 4152, 4162, 4167. |
| *Geometria* | 4054, 4055, 4056, 4064, 4065, 4075, 4083, 4085, 4094, 4095, 4096, 4097, 4104, 4114, 4115, 4117, 4124, 4125, 4126, 4134, 4135, 4144, 4145, 4153, 4154, 4155, 4163, 4164. |
| *Geom. Analitică* | 4060, 4066, 4079, 4084, 4090, 4105, 4110, 4127, 4169. |
| *Algebra* | 4057, 4058, 4059, 4062, 4067, 4077, 4078, 4080, 4086, 4098, 4099, 4106, 4107, 4116, 4118, 4120, 4128, 4130, 4136, 4137, 4146, 4147, 4149, 4150, 4156, 4157, 4161, 4165, 4166, 4168. |
| *Trigonometria* | 4087, 4088, 4089, 4100, 4108, 4109, 4119, 4129, 4138, 4139, 4140, 4158, 4159. |
| *Mecanica* | 3908, 4068, 4069, 4160, 4170. |
| *Analiza* | 4148. |
| *Cosmografie* | 4070. |
| *Fizică* | 4077. |

## H. PROBLEME REZOLVATE

### *b)* Indicarea paginei la care a fost propusă sau rezolvată

| | *Pagina la care a fost:* | | | *Pagina la care a fost:* | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nr. problemei** | **Propusă [1])** | **Rezolvată [2])** | **Nr. problemei** | **Propusă [1])** | **Rezolvată [2])** |
| 171 | 76 (II), 198 (XVI) | | 766 | 124 (VIII), 319 (XVI), 372 (XXXI) | NR |
| 485 | 104 (V), 198 (XVI) | NR | 825 | 288 (VIII), 358 (XVI) | |
| 585 | 172 (VI), 238 (XVI) | | 887 | 172 (IX), 358 (XVI) | NR |
| 676 | 148 (VII) | | 914 | 267 (IX) | |
| 691 | 196 „, 278 (XVI) | NR | 944 | 52 (X) | |

1) Numărul latin din paranteză indică volumul colecției, s. ex. 172 (IX), înseamnă că problema 886 a fost propusă la pag. 172 din volumul IX; problemele mai vechi nerezolvate încă, sau rectificate, li s'a publicat din nou enunțul, de ex.: problema 581 s'a mai publicat la pag. 51 vol. XI și la pag. 238 vol. XVI.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru acelea în dreptul cărora nu e trecut niciun număr, redacția posedă soluțiuni bune care nu au fost încă publicate.

| Nr. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 1000 | 220 (X) / 438 (XVI) | NR |
| 1008 | 224 (X) / 462 (XVI) | NR |
| 1056 | 100 (XI) | NR |
| 1058 | 100 „ | NR |
| 1092 | 196 „ | |
| 1146 | 76 (XII) | NR |
| 1156 | 100 „ | |
| 1178 | 172 „ | NR |
| 1180 | 172 „ | |
| 1188 | 228 „ | |
| 1214 | 296 „ | NR |
| 1236 | 64 (XIII) | NR |
| 1270 | 192 „ | NR |
| 1271 | 192 „ | NR |
| 1287 | 256 „ | NR |
| 1297 | 288 „ | NR |
| 1299 | 319 „ | NR |
| 1307 | 320 „ | |
| 1310 | 352 „ / 372 (XXXI) | NR |
| 1333 | 32 (XIV) / 198 (XVIII) | NR |
| 1342 | 64 (XIV) | |
| 1355 | 96 „ | NR |
| 1364 | 128 „ | 385*) |
| 1367 | 128 „ | NR |
| 1379 | 160 „ | |
| 1384 | 191 „ | NR |
| 1386 | 192 „ | NR |
| 1398 | 224 „ | |
| 1399 | 224 „ / 200 (XVI) | NR |
| 1412 | 256 (XIV) | NR |
| 1424 | 228 „ | |
| 1450 | 352 „ | NR |
| 1482 | 64 (XV) | 63 |
| 1497 | 128 „ | |
| 1500 | 128 „ | 24 |
| 1533 | 224 „ | |
| 1534 | 224 „ | |
| 1553 | 228 „ | NR |
| 1563 | 320 „ | |
| 1576 | 352 „ | |
| 1577 | 352 „ | |
| 1591 | 39 (XVI) | |
| 1632 | 159 „ | |
| 1637 | 160 „ | |
| 1650 | 200 „ | NR |
| 1656 | 239 „ | |
| 1676 | 279 „ | |
| 1679 | 280 „ | NR |

| Nr. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 1690 | 320 (XVI) | |
| 1702 | 360 „ | |
| 1711 | 399 „ / 372 (XXXI) | NR |
| 1729 | 440 (XVI) | NR |
| 1735 | 464 „ | |
| 1753 | 80 (XVII) | NR |
| 1764 | 120 „ | NR |
| 1773 | 160 „ | |
| 1778 | 199 „ | |
| 1782 | 200 „ | 98 |
| 1790 | 240 „ | |
| 1799 | 280 „ | 26 |
| 1807 | 320 „ / 422 (XXXI) | 260 |
| 1808 | 320 (XVII) | 27**) |
| 1823 | 400 „ | |
| 1831 | 439 „ | |
| 1835 | 440 „ | |
| 1840 | 446 „ | |
| 1858 | 78 (XVIII) | |
| 1876 | 119 „ | NR |
| 1882 | 120 „ | |
| 1892 | 160 „ | |
| 1898 | 199 „ | |
| 1906 | 200 „ | NR |
| 1911 | 239 „ | |
| 1914 | 239 „ / 280 „ | NR |
| 1922 | 278 „ | |
| 1929 | 279 „ | NR |
| 1934 | 280 „ / 320 „ | |
| 1937 | 318 „ | |
| 1944 | 319 „ | |
| 1945 | 320 „ | |
| 1948 | 358 „ | |
| 1958 | 359 „ | |
| 1959 | 360 „ | NR |
| 1968 | 399 „ | 69 |
| 1969 | 399 „ | |
| 1973 | 400 „ / 461 „ | 179 |
| 1976 | 431 „ | |
| 1983 | 432 „ | |
| 1987 | 462 „ | NR |
| 1991 | 38 (XIX) | |
| 2003 | 40 „ | NR |
| 2004 | 40 „ | NR |
| 2016 | 79 „ | |
| 2017 | 80 „ | NR |
| 2018 | 80 „ | |
| 2024 | 118 „ | |

*) A mai fost rezolvată la pag. 102, 221 şi 302, Vol. XXXVI.

**) A mai fost rezolvată la pag. 79, Vol. XXII.

| Nr. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 2025 | 119 (XIX) | |
| 2032 | 120 „ | |
| 2035 | 159 „ | |
| 2038 | 159 „ | |
| 2048 | 198 „ | |
| 2055 | 200 „ | |
| 2056 | 200 „ | |
| 2058 | 200 „ | |
| 2063 | 238 „ | |
| | 280 „ | |
| 2065 | 239 „ | |
| 2070 | 240 „ | NR |
| 2074 | 278 „ | NR |
| 2079 | 279 „ | |
| 2081 | 279 „ | |
| 2083 | 280 „ | |
| 2091 | 319 „ | |
| 2106 | 358 „ | |
| 2108 | 359 „ | |
| 2110 | 359 „ | |
| 2111 | 360 „ | NR |
| 2112 | 360 „ | |
| 2116 | 398 „ | |
| 2117 | 398 „ | |
| 2118 | 399 „ | |
| 2129 | 438 „ | |
| 2130 | 460 „ | |
| 2133 | 439 „ | |
| 2144 | 461 „ | |
| 2145 | 462 „ | |
| 2147 | 462 „ | |
| 2170 | 119 (XX) | NR |
| 2176 | 120 „ | |
| 2187 | 160 „ | |
| 2194 | 197 „ | |
| 2197 | 198 „ | |
| 2217 | 239 „ | |
| 2222 | 240 „ | |
| 2227 | 279 „ | |
| 2233 | 280 „ | |
| | 422 (XXXI) | |
| 2235 | 280 (XX) | |
| 2240 | 318 „ | |
| 2247 | 320 „ | |
| 2248 | 320 „ | |
| 2249 | 320 „ | |
| 2250 | 320 „ | |
| 2263 | 359 „ | |
| 2264 | 360 „ | |
| 2265 | 360 „ | |
| 2266 | 360 „ | |
| 2274 | 398 „ | |
| 2281 | 400 „ | |
| 2284 | 439 „ | |

| Nr. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 2289 | 439 (XX) | |
| 2290 | 439 „ | |
| 2295 | 461 „ | |
| 2298 | 462 „ | |
| 2301 | 462 „ | |
| 2302 | 462 „ | |
| 2311 | 40 (XXI) | |
| 2318 | 79 „ | |
| | 160 „ | |
| 2329 | 118 „ | |
| 2330 | 118 „ | |
| 2332 | 119 „ | |
| 2337 | 120 „ | |
| 2338 | 122 „ | |
| | 422 (XXXI) | NR |
| 2343 | 157 (XXI) | |
| 2344 | 158 „ | |
| 2346 | 158 „ | |
| 2353 | 159 „ | NR |
| 2354 | 198 „ | |
| 2356 | 199 „ | |
| 2357 | 199 „ | |
| 2359 | 199 „ | |
| 2360 | 199 „ | |
| 2365 | 200 „ | |
| 2370 | 239 „ | |
| 2375 | 240 „ | |
| 2381 | 278 „ | |
| 2382 | 278 „ | |
| | 422 (XXXI) | 100 |
| 2383 | 278 (XXI) | 305 |
| 2386 | 279 „ | |
| 2390 | 280 „ | |
| 2392 | 280 „ | |
| 2394 | 318 „ | |
| 2397 | 319 „ | |
| 2398 | 319 „ | |
| 2402 | 320 „ | |
| 2405 | 320 „ | |
| | 423 (XXXI) | NR |
| 2408 | 359 (XXI) | |
| 2414 | 360 „ | |
| 2421 | 399 „ | |
| 2422 | 399 „ | NR |
| 2423 | 399 „ | |
| 2430 | 439 „ | NR |
| 2435 | 440 „ | |
| 2436 | 440 „ | |
| 2439 | 440 „ | NR |
| 2440 | 459 „ | |
| 2443 | 459 „ | |
| 2456 | 31 (XXII) | NR |
| 2458 | 32 „ | |
| 2461 | 32 „ | |

| Nr. problemei | *Pagina la care a fost:* Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 2462 | 62 (XXII) | |
| 2466 | 63 „ | NR |
| 2469 | 63 „ | |
| 2477 | 95 „ | NR |
| 2481 | 96 „ | |
| 2489 | 120 „ | |
| 2497 | 144 „ | |
| 2500 | 144 „ | |
| 2502 | 167 „ | NR |
| 2503 | 167 „<br>333 (XXXII) | NR |
| 2510 | 191 (XXII) | |
| 2529 | 262 „ | |
| 2537 | 287 „ | |
| 2539 | 288 „ | |
| 2545 | 312 „ | NR |
| 2552 | 47 (XXIII) | |
| 2553 | 47 „ | |
| 2556 | 48 „ | NR |
| 2560 | 72 „ | |
| 2566 | 120 „ | |
| 2569 | 120 „ | |
| 2573 | 144 „ | |
| 2575 | 168 „ | |
| 2577 | 168 „ | NR |
| 2578 | 168 „ | |
| 2580 | 192 „ | 70 |
| 2585 | 215 „ | |
| 2586 | 216 „ | |
| 2587 | 216 „ | NR |
| 2591 | 240 „ | |
| 2593 | 264 „ | |
| 2598 | 288 „ | |
| 2599 | 288 „ | |
| 2602 | 318 (XXXI) | |
| 2607 | 31 (XXIV) | NR |
| 2609 | 32 „<br>454 (XXXI) | NR |
| 2623 | 80 (XXIV) | NR |
| 2631 | 112 „ | |
| 2638 | 127 „ | NR |
| 2640 | 128 „ | |
| 2643 | 128 „ | |
| 2645 | 143 „ | |
| 2647 | 143 „ | |
| 2655 | 191 „ | NR |
| 2656 | 191 „ | 218 |
| 2658 | 191 „ | 449 |
| 2660 | 191 „ | |
| 2661 | 192 „ | |
| 2664 | 24 (XXV) | |
| 2665 | 24 „ | NR |
| 2671 | 48 „ | |
| 2675 | 63 „ | |

| Nr. problemei | *Pagina la care a fost:* Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 2682 | 64 (XXV) | |
| 2683 | 79 „ | |
| 2684 | 80 „ | NR |
| 2688 | 80 „ | |
| 2689 | 80 „ | |
| 2692 | 108 „ | NR |
| 2694 | 108 „ | |
| 2695 | 109 „ | NR |
| 2701 | 141 „ | |
| 2706 | 142 „ | |
| 2709 | 142 „ | NR |
| 2713 | 143 „ | NR |
| 2717 | 143 „ | NR |
| 2727 | 168 „ | |
| 2731 | 191 „ | |
| 2735 | 192 „ | NR |
| 2752 | 264 „ | |
| 2758 | 56 (XXVI) | NR |
| 2769 | 79 „ | NR |
| 2778 | 104 „ | |
| 2780 | 104 „ | NR |
| 2789 | 135 „ | |
| 2795 | 159 „ | |
| 2803 | 160 „ | |
| 2814 | 192 „ | NR |
| 2818 | 216 „ | |
| 2820 | 216 „ | |
| 2822 | 216 „ | |
| 2827 | 247 „ | |
| 2828 | 248 „ | |
| 2837 | 279 „ | |
| 2850 | 335 „ | |
| 2851 | 335 „ | |
| 2860 | 39 (XXVII) | |
| 2861 | 40 „ | |
| 2865 | 70 „ | NR |
| 2886 | 104 „ | NR |
| 2888 | 104 „ | |
| 2889 | 104 „ | NR |
| 2895 | 143 „ | |
| 2906 | 184 „ | |
| 2909 | 221 „ | NR |
| 2912 | 222 „ | NR |
| 2913 | 222 „ | |
| 2920 | 262 „ | |
| 2922 | 262 „ | |
| 2926 | 264 „ | NR |
| 2936 | 343 „ | NR |
| 2947 | 376 „ | NR |
| 2953 | 416 „ | |
| 2955 | 416 „ | |
| 2956 | 416 „ | 306 |
| 2959 | 448 „ | |
| 2969 | 39 (XXVIII) | |

| Nr. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 2971 | 39 (XXVIII) | |
| 2972 | 40 „ | |
| 2980 | 79 „ | |
| 2983 | 79 „ | |
| 2985 | 80 „ | |
| 2986 | 80 „ | |
| 2991 | 119 „ | |
| 2993 | 119 „ | |
| 2996 | 120 „ | |
| 2999 | 120 „ | |
| 3000 | 120 „ | |
| 3003 | 159 „ | |
| 3005 | 159 „ | NR |
| 3013 | 199 „ | |
| 3019 | 200 „ | |
| 3031 | 278 „ | |
| 3041 | 319 „ | |
| 3045 | 319 „ | NR |
| 3052 | 359 „ | |
| 3054 | 360 „ | |
| 3059 | 360 „ | |
| 3069 | 400 „ | NR |
| 3070 | 400 „ | |
| 3071 | 439 „ | |
| 3073 | 439 „ | |
| 3075 | 439 „ | |
| 3081 | 479 „<br>454 (XXXI) | NR |
| 3085 | 480 (XXVIII) | |
| 3086 | 480 „ | |
| 3090 | 480 „ | |
| 3091 | 39 (XXIX) | |
| 3095 | 40 „ | |
| 3096 | 40 „ | |
| 3108 | 80 „ | |
| 3109 | 80 „ | |
| 3114 | 119 „ | |
| 3118 | 120 „ | |
| 3127 | 159 „ | NR |
| 3134 | 198 „ | |
| 3150 | 240 „ | NR |
| 3160 | 280 „ | |
| 3161 | 318 „ | NR |
| 3167 | 320 „ | |
| 3169 | 320 „ | NR |
| 3173 | 358 „ | |
| 3177 | 359 „ | |
| 3178 | 360 „ | |
| 3180 | 360 „ | |
| 3189 | 400 „ | |
| 3198 | 440 „ | |
| 3208 | 480 „ | NR |
| 3209 | 480 „ | |
| 3210 | 480 „ | |

| Nr. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 3220 | 40 (XXX) | |
| 3223 | 79 „ | |
| 3227 | 80 „ | |
| 3228 | 80 „ | |
| 3230 | 80 „ | NR |
| 3232 | 119 „ | |
| 3236 | 119 „ | |
| 3239 | 120 „ | |
| 3244 | 160 „ | |
| 3245 | 160 „ | |
| 3248 | 160 „ | |
| 3249 | 160 „ | |
| 3250 | 160 „ | |
| 3253 | 199 „ | |
| 3255 | 199 „ | NR |
| 3260 | 200 „ | NR |
| 3267 | 239 „ | |
| 3270 | 240 „ | |
| 3277 | 280 „ | |
| 3279 | 280 „ | |
| 3282 | 318 „ | |
| 3287 | 320 „ | |
| 3288 | 320 „ | |
| 3290 | 320 „ | |
| 3291 | 358 „ | |
| 3296 | 359 „ | |
| 3298 | 359 „ | NR |
| 3299 | 360 „ | |
| 3300 | 360 „ | NR |
| 3304 | 399 „ | NR |
| 3308 | 400 „ | NR |
| 3309 | 400 „ | NR |
| 3310 | 400 „ | NR |
| 3311 | 438 „ | |
| 3312 | 439 „ | |
| 3313 | 439 „ | |
| 3316 | 439 „ | NR |
| 3318 | 440 „ | NR |
| 3319 | 440 „ | |
| 3320 | 440 „ | NR |
| 3330 | 480 „ | |
| 3332 | 39 (XXXI) | |
| 3335 | 40 „ | 182 |
| 3340 | 40 „ | |
| 3341 | 79 „ | |
| 3343 | 79 „ | |
| 3350 | 80 „ | NR |
| 3354 | 120 „ | |
| 3356 | 120 „ | |
| 3360 | 120 „ | |
| 3361 | 159 „ | NR |
| 3365 | 159 „ | |
| 3368 | 160 „ | |
| 3379 | 200 „ | NR |

| Nr. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 3389 | 240 (XXXI) | |
| 3390 | 240 „ | |
| 3396 | 280 „ | |
| 3398 | 280 „ | 451 |
| 3404 | 318 „ | |
| 3405 | 319 „ | NR |
| 3412 | 358 „ | NR |
| 3419 | 360 „ | |
| 3424 | 399 „ | NR |
| 3425 | 399 „ | NR |
| 3429 | 400 „ | |
| 3430 | 400 „ | |
| 3438 | 440 „ | 265 |
| 3439 | 440 „ | |
| 3445 | 479 „ | NR |
| 3448 | 479 „ | |
| 3450 | 480 „ | |
| 3456 | 39 (XXXII) 119 (XXXIII) | |
| 3457 | 39 (XXXII) | |
| 3459 | 40 „ | |
| 3461 | 40 „ | |
| 3467 | 79 „ | |
| 3468 | 80 „ | |
| 3472 | 80 „ | NR |
| 3474 | 119 „ | |
| 3477 | 119 „ | |
| 3488 | 159 „ | |
| 3489 | 159 „ | NR |
| 3491 | 160 „ | NR |
| 3493 | 160 „ | NR |
| 3495 | 199 „ | |
| 3497 | 199 „ | |
| 3499 | 199 „ | |
| 3503 | 200 „ | |
| 3504 | 200 „ | |
| 3506 | 239 „ | |
| 3509 | 239 „ | |
| 3512 | 240 „ | |
| 3513 | 240 „ | |
| 3514 | 240 „ | 425 |
| 3517 | 279 „ | |
| 3521 | 279 „ | |
| 3522 | 280 „ | NR |
| 3523 | 280 „ | NR |
| 3524 | 280 „ | NR |
| 3532 | 320 „ | 138 |
| 3533 | 320 „ | NR |
| 3534 | 320 „ | |
| 3535 | 359 „ | |
| 3536 | 438 „ | |
| 3542 | 360 „ | NR |
| 3545 | 398 „ | NR |
| 3546 | 399 „ | NR |

| Nr. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 3547 | 399 (XXXII) | |
| 3548 | 39 (XXXIII) | |
| 3551 | 39 „ | |
| 3554 | 400 (XXXII) | |
| 3557 | 438 „ | |
| 3562 | 440 „ | NR |
| 3563 | 440 „ | |
| 3565 | 479 „ | |
| 3571 | 480 „ | |
| 3572 | 480 „ | NR |
| 3573 | 480 „ | NR |
| 3574 | 480 „ | |
| 3579 | 40 (XXXIII) | |
| 3584 | 79 „ | |
| 3588 | 80 „ | NR |
| 3589 | 80 „ | |
| 3556 | 119 „ | |
| 3593 | 119 „ | |
| 3597 | 120 „ | |
| 3600 | 120 „ | |
| 3602 | 158 „ | |
| 3607 | 159 „ | |
| 3608 | 159 „ | NR |
| 3610 | 160 „ | |
| 3613 | 278 „ | |
| 3620 | 199 „ | NR |
| 3622 | 239 „ | NR |
| 3625 | 239 „ | NR |
| 3627 | 278 „ | NR |
| 3630 | 240 „ | |
| 3632 | 279 „ | NR |
| 3635 | 279 „ | |
| 3636 | 279 „ | |
| 3639 | 280 „ | |
| 3640 | 280 „ | |
| 3644 | 319 „ | |
| 3646 | 320 „ | NR |
| 3647 | 320 „ | NR |
| 3649 | 320 „ | |
| 3650 | 320 „ | |
| 3653 | 359 „ | |
| 3655 | 359 „ | |
| 3657 | 359 „ | NR |
| 3658 | 360 „ | |
| 3659 | 360 „ | |
| 3660 | 360 „ | |
| 3664 | 399 „ | |
| 3665 | 399 „ | NR |
| 3668 | 400 „ | 102 |
| 3675 | 439 „ | |
| 3677 | 440 „ | |
| 3679 | 440 „ | 140 *) |
| 3681 | 478 „ | NR |
| 3682 | 479 „ | NR |

*) A mai fost rezolvată la pag. 339, Vol. XXXVI.

| Nr. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 3684 | 479 (XXXIII) | NR |
| 3689 | 480 „ | |
| 3692 | 39 (XXXIV) | |
| 3693 | 39 „ | |
| 3694 | 39 „ | NR |
| 3697 | 40 „ | |
| 3699 | 40 „ | NR |
| 3700 | 40 „ | NR |
| 3702 | 79 „ | |
| 3703 | 79 „ | NR |
| 3704 | 79 „ | 307 |
| 3705 | 79 „ | |
| 3706 | 79 „ | |
| 3710 | 80 „ | 427 |
| 3713 | 119 „ | |
| 3714 | 119 „ | |
| 3717 | 120 „ | |
| 3720 | 120 „ | NR |
| 3725 | 160 „ | |
| 3727 | 160 „ | 387 |
| 3728 | 160 „ | 104 |
| 3730 | 160 „ | 183 |
| 3732 | 199 „ | |
| 3733 | 199 (XXXV) | NR |
| 3734 | 199 (XXXIV) | 453 |
| 3736 | 200 „ | NR |
| 3739 | 200 „ | |
| 3747 | 240 „ | |
| 3749 | 240 „ | |
| 3751 | 279 „ | |
| 3755 | 279 „ | |
| 3758 | 280 „ | 141 |
| 3760 | 280 „ | |
| 3762 | 319 „ | |
| 3763 | 319 „ | |
| 3764 | 319 „ | |
| 3765 | 320 „ | |
| 3766 | 320 „ | |
| 3768 | 320 „ | |
| 3770 | 320 „ | |
| 3772 | 359 „ | |
| 3774 | 78 (XXXV) | 185 |
| 3775 | 360 (XXXIV) | |
| 3776 | 360 „ | |
| 3780 | 360 „ | NR |
| 3782 | 399 „ | |
| 3784 | 399 „ | NR |
| 3785 | 399 „ | |
| 3787 | 400 „ | |
| 3790 | 400 „ | |
| 3792 | 439 „ | |
| 3793 | 439 „ | NR |
| 3798 | 440 „ | 187 |
| 3799 | 440 (XXXIV) | 223 |
| 3802 | 479 „ | |
| 3804 | 479 „ | NR |
| 3807 | 480 „ | |
| 3808 | 480 „ | NR |
| 3809 | 480 „ | |
| 3810 | 480 „ | NR |
| 3814 | 40 (XXXV) | 455 |
| 3815 | 40 „ | |
| 3817 | 40 „ | |
| 3818 | 40 „ | 188 |
| 3819 | 40 „ | |
| 3820 | 40 „ | |
| 3823 | 79 „ | |
| 3824 | 79 „ | |
| 3826 | 79 „ | 456 |
| 3827 | 80 „ | |
| 3828 | 80 „ | 429 |
| 3829 | 80 „ | NR |
| 3832 | 119 „ | |
| 3833 | 119 „ | |
| 3835 | 120 „ | 73 |
| 3836 | 120 „ | NR |
| 3837 | 120 „ | |
| 3839 | 120 „ | |
| 3840 | 120 „ | |
| 3844 | 159 „ | NR |
| 3845 | 159 „ | NR |
| 3847 | 159 „ | 227 *) |
| 3848 | 160 „ | 430 |
| 3849 | 160 „ | |
| 3853 | 199 „ | NR |
| 3854 | 199 „ | 457 |
| 3855 | 199 „ | |
| 3856 | 200 „ | 458 |
| 3857 | 200 „ | |
| 3863 | 239 „ | |
| 3864 | 239 „ | NR |
| 3867 | 240 „ | |
| 3870 | 240 „ | 143 |
| 3872 | 279 „ | |
| 3873 | 279 „ | |
| 3874 | 279 „ | |
| 3875 | 279 „ | |
| 3876 | 279 „ | |
| 3878 | 280 „ | |
| 3879 | 280 „ | 388 |
| 3880 | 280 „ | NR |
| 3882 | 319 „ | 75 |
| 3883 | 319 „ | |
| 3884 | 319 „ | 105 |
| 3886 | 319 „ | 308 **) |
| 3888 | 320 „ | 144 |
| 3889 | 320 „ | 460 |

*) A mai fost rezolvată la pag. 351, Vol. XXXV.
**) A mai fost rezolvată la pag. 310, Vol. XXXVI.

| Nr. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 3893 | 359 (XXXV) | 337 |
| 3894 | 359 „ | |
| 3895 | 359 „ | |
| 3896 | 360 „ | NR |
| 3898 | 360 „ | NR |
| 3900 | 360 „ | |
| 3902 | 398 „ | |
| 3905 | 399 „ | 190 |
| 3906 | 399 „ | |
| 3907 | 399 „ | 146 |
| 3908 | 400 „ | |
| | 1119 „ | |
| 3909 | 400 „ | NR |
| 3910 | 400 „ | 148 |
| 3911*) | 439 „ | |
| 3913 | 439 „ | NR |
| 3914 | 439 „ | |
| 3915 | 439 „ | NR |
| 3916 | 439 „ | NR |
| 3919 | 440 „ | |
| 3920 | 440 „ | NR |
| 3921 | 479 „ | NR |
| 3922 | 479 „ | |
| 3924 | 479 „ | NR |
| 3925 | 480 „ | |
| 3926 | 480 „ | |
| 3928 | 480 „ | |
| 3929 | 480 „ | |
| 3930 | 480 „ | 76 |
| 3932 | 39 (XXXVI) | 389 |
| 3933 | 39 „ | NR |
| 3934 | 39 „ | |
| 3935 | 39 „ | |
| 3936 | 39 „ | |
| 3937 | 40 „ | |
| 3938 | 40 „ | 150 |
| 3939 | 40 „ | |
| 3940 | 40 „ | |
| 3943 | 79 „ | |
| 3944 | 79 „ | NR |
| 3945 | 79 „ | |
| 3948 | 80 „ | |
| 3949 | 80 „ | NR |
| 3950 | 80 „ | NR |
| 3952 | 118 „ | 192 |
| 3958 | 119 „ | |
| 3959 | 120 „ | |
| 3960 | 120 „ | 273 |
| 3961 | 159 „ | |
| 3965 | 159 „ | |
| 3968 | 160 „ | 274 |
| 3969 | 160 „ | 431 |
| 3971 | 199 „ | 152 |
| 3972 | 199 „ | NR |

| Nr. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 3973 | 199 (XXXVI) | NR |
| 3974 | 199 „ | |
| 3975 | 200 „ | |
| 3976 | 200 „ | NR |
| 3977 | 200 „ | |
| 3978 | 200 „ | |
| 3979 | 200 „ | 341 |
| 3980 | 200 „ | 109 |
| 3983 | 238 „ | NR |
| 3984 | 239 „ | |
| 3985 | 239 „ | |
| 3986 | 239 „ | 30 |
| 3987 | 239 „ | NR |
| 3988 | 240 „ | |
| 3989 | 240 „ | |
| 3994 | 279 „ | 462 |
| 3995 | 279 „ | 276 |
| 3997 | 280 „ | 33 |
| 3999 | 280 „ | NR |
| 4000 | 280 „ | NR |
| 4001 | 318 „ | 36 |
| 4002 | 319 „ | 464 |
| 4005 | 319 „ | |
| 4006 | 320 „ | 309 |
| 4007 | 320 „ | 434 |
| 4008 | 320 „ | 435 |
| 4009 | 320 „ | |
| 4010 | 320 „ | NR |
| 4011 | 359 „ | 229 |
| 4012 | 359 „ | 232 |
| 4013 | 359 „ | NR |
| 4014 | 359 „ | |
| 4015 | 359 „ | 193 |
| 4016 | 359 „ | |
| 4017 | 360 „ | NR |
| 4018 | 360 „ | 37 |
| 4019 | 360 „ | 467 |
| 4020 | 360 „ | 311 |
| 4021 | 398 „ | 233 |
| 4022 | 398 „ | NR |
| 4023 | 399 „ | NR |
| 4024 | 399 „ | NR |
| 4025 | 399 „ | NR |
| 4026 | 399 „ | 154 |
| 4027 | 400 „ | |
| 4028 | 400 „ | NR |
| 4029 | 400 „ | NR |
| 4030 | 400 „ | NR |
| 4031 | 439 „ | NR |
| 4032 | 439 „ | NR |
| 4033 | 439 „ | NR |
| 4034 | 439 „ | NR |
| 4035 | 440 „ | NR |
| 4036 | 440 „ | NR |

*) Inceputul soluției acestei probleme a fost dat la pag. 488, vol. XXXVI; continuarea va urma.

| Nr. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 4037 | 440 (XXXVI) | NR |
| 4038 | 440 „ | NR |
| 4039 | 440 „ | NR |
| 4040 | 440 „ | 234 |
| 4041 | 479 „ | NR |
| 4042 | 479 „ | NR |
| 4043 | 479 „ | 469 |
| 4044 | 479 „ | NR |
| 4045 | 479 „ | NR |
| 4046 | 480 „ | NR |
| 4047 | 480 „ | 313 |
| 4048 | 480 „ | 343 |
| 4049 | 480 „ | 117 |
| 4050 | 480 „ | NR |
| 4051 | 39 (XXXVII) | 195 |
| 4052 | 39 „ | NR |
| 4053 | 39 „ | NR |
| 4054 | 39 „ | 347 |
| 4055 | 39 „ | NR |
| 4056 | 40 „ | NR |
| | 79 „ | NR |
| 4057 | 40 „ | NR |
| 4058 | 40 „ | NR |
| 4059 | 40 „ | NR |
| 4060 | 40 „ | NR |
| 4061 | 79 „ | NR |
| 4062 | 79 „ | NR |
| 4063 | 79 „ | NR |
| 4064 | 79 „ | NR |
| 4065 | 80 „ | 314 |
| 4066 | 80 „ | NR |
| 4067 | 80 „ | NR |
| 4068 | 80 „ | NR |
| 4069 | 80 „ | 349 |
| 4070 | 80 „ | NR |
| 4071 | 119 „ | NR |
| 4072 | 119 „ | 394 |
| 4073 | 119 „ | NR |
| 4074 | 119 „ | NR |
| 4075 | 120 „ | NR |
| 4076 | 120 „ | 471 |
| 4077 | 120 „ | NR |
| 4078 | 120 „ | 472 |
| 4079 | 120 „ | NR |
| 4080 | 120 „ | NR |
| 4081 | 159 „ | 351 |
| 4082 | 159 „ | 352 |
| 4083 | 159 „ | NR |
| 4084 | 159 „ | NR |
| 4085 | 159 „ | NR |
| 4086 | 160 „ | NR |
| 4087 | 160 „ | 354 |
| 4088 | 160 „ | NR |
| 4089 | 160 „ | NR |

| Nr. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1]) | Rezolvată [2]) |
|---|---|---|
| 4090 | 160 (XXXVII) | NR |
| 4091 | 199 „ | NR |
| 4092 | 199 „ | NR |
| 4093 | 199 „ | NR |
| 4094 | 199 „ | NR |
| 4095 | 199 „ | NR |
| 4096 | 200 „ | NR |
| 4097 | 200 „ | NR |
| 4098 | 200 „ | NR |
| 4099 | 200 „ | NR |
| 4100 | 200 „ | 395 |
| 4101 | 239 „ | 396 |
| 4102 | 239 „ | NR |
| 4103 | 239 „ | NR |
| 4104 | 239 „ | NR |
| 4105 | 240 „ | NR |
| 4106 | 240 „ | NR |
| 4107 | 240 „ | NR |
| 4108 | 240 „ | NR |
| 4109 | 240 „ | NR |
| 4110 | 240 „ | 396 |
| 4111 | 279 „ | NR |
| 4112 | 279 „ | NR |
| 4113 | 279 „ | NR |
| 4114 | 279 „ | NR |
| | 318 „ | NR |
| 4115 | 279 „ | NR |
| 4116 | 280 „ | NR |
| 4117 | 280 „ | 473 |
| 4118 | 280 „ | NR |
| 4119 | 280 „ | NR |
| 4120 | 280 „ | NR |
| 4121 | 318 „ | NR |
| 4122 | 319 „ | NR |
| 4123 | 319 „ | NR |
| 4124 | 319 „ | NR |
| 4125 | 319 „ | NR |
| 4126 | 319 „ | NR |
| 4127 | 320 „ | NR |
| 4128 | 320 „ | NR |
| 4129 | 320 „ | NR |
| 4130 | 320 „ | 475 |
| 4131 | 359 „ | NR |
| 4132 | 359 „ | NR |
| 4133 | 359 „ | NR |
| 4134 | 359 „ | NR |
| 4135 | 359 „ | NR |
| 4136 | 360 „ | 436 |
| 4137 | 360 „ | NR |
| 4138 | 360 „ | NR |
| 4139 | 360 „ | NR |
| 4140 | 360 „ | NR |
| 4141 | 398 „ | NR |
| 4142 | 398 „ | NR |

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIA SIBIU

| Nr. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1] | Rezolvată [2] |
|---|---|---|
| 4143 . . . | 398 (XXXVII) | NR |
| 4144 . . . | 398 „ | NR |
| 4145 . . . | 399 „ | NR |
| | 438 „ | NR |
| 4146 . . . | 399 „ | NR |
| 4147 . . . | 399 „ | NR |
| 4148 . . . | 400 „ | NR |
| 4149 . . . | 400 „ | 476 |
| 4150 . . . | 400 „ | NR |
| 4151 . . . | 438 „ | NR |
| 4152 . . . | 438 „ | NR |
| 4153 . . . | 438 „ | NR |
| 4154 . . . | 438 „ | NR |
| 4155 . . . | 439 „ | NR |
| 4156 . . . | 439 „ | NR |

| Nr. problemei | Pagina la care a fost: Propusă [1] | Rezolvată [2] |
|---|---|---|
| 4157 . . . | 439 (XXXVII) | NR |
| 4158 . . . | 440 „ | NR |
| 4159 . . . | 440 „ | NR |
| 4160 . . . | 440 „ | NR |
| 4161 . . . | 478 „ | NR |
| 4162 . . . | 478 „ | NR |
| 4163 . . . | 478 „ | NR |
| 4164 . . . | 478 „ | NR |
| 4165 . . . | 479 „ | NR |
| 4166 . . . | 479 „ | NR |
| 4167 . . . | 479 „ | NR |
| 4168 . . . | 480 „ | NR |
| 4169 . . . | 480 „ | NR |
| 4170 . . . | 480 „ | NR |

## I. EXERCIȚII *)

| | |
|---|---|
| *Aritmetica* | 4(111). |
| *Algebra* | 2(78, 5(156), 6(157), 7(157), 8(157), 12(196), 14(197), 16(197), 19(198), 22(238), 23(278), 24(278), 25(278) 26(315), 28(316), 26(316), 32(357), 33(357), 34(357), 35(357), 36(397). |
| *Geometria* | 3(78), 9(158), 11(158), 13(197), 17(198), 18(198), 21(238), 30(317), 37(398), 38(437). |
| *Trigonometria* | 1(38), 27(316), 39(477) |
| *Analiză* | 10(158), 15(197), 20(198). |

## J. TABLOUL NUMELOR


**A.** I. M. 21.
Aaron F. 24.
Abason E. 5, 6, 53, 54, 55, 56, 57, 216, 380, 382.
Abel 336.
Abramescu M. D-ra 75, 76, 109, 276, 277, 314, 397, 463.
Abramescu N. 6, 30, 33, 80, 96, 109, 112, 129, 140, 141, 276, 279, 303, 304, 314, 363, 399, 438.
Achebfida 374.
Acikgheozian A. N. 347, 352, 395, 397, 472, 475.
Adamachi V. 97, 382, 447.
Adams R. C. 60, 175.
Agnew P. R. 61.
Agronomof M. 421
Aguilar F. 216.
Alaci V. 6, 97, 175, 217, 363.
Albert A. A. 175, 448.
Aldea N. N. 76, 103, 105, 117, 142, 154, 156, 188, 189, 191, 192, 231, 276, 277, 310, 313, 341, 343, 347, 355, 389, 393, 395, 435, 454, 457, 459, 461, 463, 468, 470, 472.
Alembert d' 96.
Alexiu J. 149, 276, 309, 386.
Allen S. E. 216.
Almăjan P. 103.
Alschiller-Court N. 96.
Anderson W. E. 61.
Andreescu C. 276.
Angelescu A. 5, 6, 179, 217, 247, 315, 385.
Angelescu V. A. 103.
Angelescu El. 304.
Angheluță Th. 5, 6, 76, 80, 105, 128, 131, 138, 160, 175, 363, 399, 439, 447, 480.
Anguita F. 381.
Anonim 463.
Antonescu N. 457, 459.
Antoniu E. D-ra 30, 76, 106, 276, 277, 432, 463.
Antoniu S. I. 6, 152, 254, 280.
Apolonius 52.
Aramburo J. 381.
Arbelus 373.


*) Numerele din paranteză indică pagina, iar cele din afară numărul ce-l poartă exercițiul

Archibald C. R. 61.
Archimede 372.
Arghiriade Em. 6, 216.
Arşavski A. 432.
Arsene Al. 454.
Arvanitopol N. 98.
Aurian J. 310, 312.
Avram N. C. 197, 341, 347, 463.
Avramescu C. 6, 24.

Baciu G. T. 454.
Bădărău A. 73.
Bădescu Em. A. 38, 118, 144, 149, 189, 236, 277, 313, 343, 347, 349, 389, 395, 397, 453, 455, 457, 459, 463, 468, 470, 475.
Bădescu R. 259, 363, 447.
Baidaff Ig. B. 6, 23, 136, 176, 182, 216, 258, 334, 381, 447.
Balaban I. Gh. 103, 308.
Banach S. 255.
Banciu I. 6.
Bandel F. R. 144.
Barbarin P. 136.
Barbilian D. 5, 6, 52, 89, 172, 179, 238, 302, 304, 337, 347.
Barisien N. E. 122, 353.
Bayess 383.
Beghin H. 60.
Bell C. 175.
Bell T. E. 61, 258, 381.
Bennett A. A. 175.
Bercu M. 189.
Berdiales A. F. 97.
Bernstein A. B. 61, 175, 301, 448.
Bickhoff D. G. 448.
Biernacki M. 96, 216, 255, 447.
Birceanu I. Ov. 105, 454.
Birkenmajer A. 362, 363.
Bliss A. G. 380.
Bloch A. 136.
Blumenthal M. I. 258.
Blumenthal M. L. 175, 381.
Böcher 61.
Bodea E. 304.
Bogdan-Duică Gh. 175.
Bogdan P. 97.
Boian C. I. 76, 105, 142, 189, 389, 454, 457, 461.
Boldea Gh. 355.
Boole 175.
Borel E. 259, 447.
Borneanu G. 6.
Borsuk K. 258.
Botea Gh. N. 179, 400, 445, 447, 478.
Boulanger A. 423.
Bouligand G. 447.
Bourlet C. 276.
Brăescu S. D-ra 440.
Brande L. 326
Bratu Gh. 5, 6, 129, 363.
Brener M. A. 5, 6.
Brigmann W. P. 380.
Brocard 50, 422.
Brown B. A. 60.
Brown E. O. 60.
Bruckner V. 6.
Brunet 334.
Bruwier L. 258.
Budeanu I. C. 7, 304.
Buicliu Gh. 5, 7, 70, 75, 120, 183, 199, 218, 223, 253, 257, 279, 308, 311, 313, 333, 359, 367, 387, 388, 398, 438.
Bujoreanu N. 7.
Bulancea I. 75, 144.
Bumbulici N. 142.
Bunescu D. A. 5, 7.
Bungescu I. 7.
Buradescu Tr. 7.
Burchi C. L. 277.
Buricovici A. 104.
Burlacu N. E. 103, 188, 453.
Bush E. L. 301.
Buşilă A. 7.
Buşilă D. C. 7.
Buşilă I. 7, 17.
Bustamante D. 381.
Buţan M. A. 118, 276, 277, 363.

Cahen 335, 336.
Călin I. A. 426.
Călin M. Gh. 425, 426.
Călinescu A. 454.
Călinescu A. G. 190, 276, 277.
Călinescu V. 190.
Călugăreanu G. 96, 166, 176, 179, 259, 363, 382, 447, 480.
Cambureanu V. D. 7.
Cambureanu V. 7.
Campbell D. A. 301.
Cantemir D. 208.
Cantor 179.
Capoutade I. 447.
Capriel H. 15.
Capriel I. 7.
Caraman E. 7.
Carlitz L. 380, 381.
Carmichael 47.
Carnot 323.
Carpenter F. A. 301.
Cârstoiu D. I. 277, 347, 357, 395, 397, 435.
Cartan E. 175, 259.
Carver B. W. 61.
Cassian Gh. 7.
Catalan 336.
Cauchy 201, 215, 336, 337.
Cazacu N. C. 7.
Cech 136.
Cesaro 122, 175, 381.
Céva 20, 133, 134, 296, 412, 429.
Charpentier M. D-ra 96,
Chiriac I. C. 383.
Chiricuţă A. 7
Chirnoagă E. 216, 282.
Chiţu P. M. 33, 75, 455.
Chiţulescu I. I. 7.
Cinsky W. C. 274, 276, 312.
Cioc M. 8, 274.
Ciorănescu N. 8, 40, 79, 98, 120, 159, 192, 199, 202, 239, 273, 274, 280, 302, 304, 320, 337, 341, 342, 363, 385, 399, 435, 439, 447, 462, 467, 468, 478.
Clarkson A. J. 448.
Claudel 384.
Clifford 179.
Cojocaru I. 276, 277, 342, 435, 463.
Constantin N. Av. 154.
Constantinescu C. A. 106, 144, 189, 275, 457, 461.
Constantinescu D. A. 457.
C-tinescu-Buzău 75, 76.
Constantinescu C. Gh. 73, 205, 369.
Constantinescu N. I. 73
Constantinescu J. 216, 382.
Constantinescu T. 8.
Constantiniu C. 276, 277.
Conta V. 16.
Coolidge 334.

Coşniţă C. 97, 103, 104, 120, 136, 160, 176, 187, 188, 189, 308, 343, 426, 428, 431, 457, 459, 461, 470, 472.
Costăchescu V. C. 103, 142, 240, 426, 460.
Costescu Th. 363
Costinescu D. 8.
Craig V. H. 175.
Craiu N. I. 104, 274, 276, 426.
Cramer 155, 156.
Cristeanu Zoe A. 276, 277.
Crivăţ I. Vl. 104, 118, 142, 144, 188, 189, 276, 277, 279, 341, 389, 434, 435, 456, 461.
Cuciureanu Şt. 274.
Cummings D. L. 301.
Curchi I. 118, 314, 359, 396, 397, 475.

Damé Fr. 24.
Dan C. 103, 189, 429.
Dănciulescu Gr. V. 426.
Darboux 61, 177.
Dăscălescu Şt. H. 189, 387.
Dassen C. C. 61.
Davis T. H. 61.
Dawson H. B. 61.
Deac J. 76, 159, 200, 274, 374, 435, 468.
Deaux R. 96, 216, 258, 334, 381.
Debely N. 301.
De Donder 255.
Deleanu-Pană A. 189, 190.
Demetrescu G. 302.
De Montessus de Ballore 217.
Démontrer 239.
Demoulin A. 423.
Denjoy A. 62, 255, 362.
Descartes 129, 300.
Devresse A. 258.
Deweck M. 217.
Diaconu C. O. 104.
Dickson E. L. 61, 336.
Dickstein S. 62.
Didicescu I. P. 69.
Dieudonné J. 136.
Dieulefait C. 61.
Dinoci Fl. 142.
Dinulescu I. N. 104.
Diophante 328, 329, 330.
Dirac 61, 216, 337.
Dirichlet 336.
Dobrescu Şt. 383.
Dobrogeanu A. N. 190.
Dobrogeanu N. R. 173.
Dodd L. E. 448.
Dogaru D. 354.
Donciu T. N. 104, 105, 160, 189, 274, 309, 319, 354, 461.
Don José S. Corti 23.
Doole P. H. 61.
Dordea Tr. 200, 258, 340, 366.
Dorneanu V. 273, 455, 457.
Dorroh L. J. 301.
Drăgan I. C. 454.
Drăguţ Gh. V. 103, 309.
Droz-Farny 73, 74, 96
Dumitraşcu N. R. 227, 276, 277, 387, 389, 455, 457.
Dumitrescu A. 8.
Dumitrescu-Arg. D. 40, 79, 80, 319, 360.
Dumitrescu I. E 185, 308, 387, 428, 453.
Dumitrescu I. Gh. 5. 8.
Dumitrescu N. R. 152.
Dumitrescu T. 383.
Dunham J. 61.
Durton O. 96.
Dushnik Ben 258.

Emanuel V. 254.
Epuran A. I. 277, 342, 467.
Errera A. 255, 259, 362, 363.
Euclide 61.
Euler 105, 158, 194, 195, 218, 336, 429, 430, 445.

Fabius D. D-ra 314, 476.
Fabry 336.
Faţe M. 144, 276, 457.
Fekete 448.
Felix C. 8.
Fermat 119, 177, 178, 335, 336.
Ferrari 445.
Feuerbach 78, 304.
Fibonacci 239, 289, 292.
Fife B. W. 61.
Filipescu Em. G. 8, 63.
Fleck 336.
Florescu B. I. 23, 39, 48, 61, 68, 93, 119, 175, 239, 292, 294, 360, 398, 449, 479.
Florescu M. U. 73, 234, 426, 427.
Focşeneanu I. M. 8, 40.
Fort T. 334.
Fredholm 176, 258, 259, 380, 447.
Frégier 281.
Frobenius 336.
Fubini 136.
Fundăţeanu C. I. 8.

Gabrielescu R. 8.
Gâlcă I. T. 8.
Galois 301.
Gambioli 336.
Ganassini L. D-ra 136.
Gataianţu V. B. 103.
Gauss 47, 335.
Gavrilescu C. V. 103.
Genocchi 336.
Georgescu C. 160, 316, 389.
Georgescu I. C. 102.
Georgescu I. N. 8.
Georgescu N. N. 8.
Georgescu-Racoviţă I. I. 458
Georgescu-Roegen N. 8, 337.
Gérard L. 258.
Gergen J. J. 61.
Gergonne 121.
Germani D. 136, 304, 363.
Germay J. H. R. 96, 136, 334, 424, 447.
Gheorghiu C. Ad. 76, 103, 104, 115, 135, 148, 149, 189, 191, 218, 222, 228, 234, 236, 240, 297, 307, 308, 347, 374, 389, 396, 432, 459, 463.
Gheorghiu Th. Gh 104, 343, 426, 427, 479.
Gheorghiu S. I. 8.
Gheorghiu A. M. 8.
Gheorghiu A. Ş. 8.
Gheorghiu-Gladiş T. Gh. 142, 189, 387, 452, 453, 455.
Ghermănescu N. M. 5. 8, 26, 39, 97, 98, 119, 137, 240, 347, 349, 360, 363, 382, 383, 446, 448.
Ghica Al. 176.

Ghimuş D. A. 9.
Ghişoiu I. P. 73, 75, 103, 104, 105, 141, 148, 187, 189, 190, 191, 274, 276, 277, 307, 308, 337, 341, 428, 429, 430, 432, 453, 457, 459, 461.
Ghiţescu Sp. 383.
Ghiţescu V. 9.
Ghiuţă V. G. 277, 468.
Gibss 60.
Gluşco N. 76, 276, 277.
Godeau L. 217.
Godeau R. 96.
Godeaux L. 62, 96, 334.
Goormaghtigh M. 217.
Goormaghtigh R. 73, 96, 136, 258, 282, 326, 334, 381.
Gospodin T. 274.
Gottschalk O. 258.
Gouy 336.
Grâce 143.
Grant D. J. 175.
Graustein C. W. 216.
Graves M. L. 216.
Grecu M. Cr. 189, 308.
Grigorescu C. 9.
Grosu I. M. 142, 190, 461.
Grubenmann Gr. 103.
Grünbaum M. 136, 176, 216, 296.
Guerin C. L. 136.
Guillet L. 216.
Gurău Almé 104.
Gurău Gh. J. D-ra 387, 453, 454.
Gutzu V. 9.

Haarbleicher A. 176.
Halperin H. A. 36, 75, 144, 189, 192, 276, 277, 455, 457.
Hamburger L. 248.
Hanganu D. M. 9.
Haralamb P. E. 144.
Hardy 175.
Haret C. Spiru 15, 276, 361.
Harky H. C. 448.
Hartmann J. 330, 334.
Henri Alfred 302.
Hessenberg 382.
Heuchamps E. 137, 334.
Heule P. 448.
Heytmanek C. 189, 457.
Heywood 143.
Hildebrandt H. T. 381.
Hill G. 24.
Hill D. J. 96.
Hoborski 255.
Holl L. D. 61.
Hollcroft T. R. 216, 301.
Hôpital 158, 339, 398, 476.
Hortopan A. D-ra 354.
Hostinsky B. 362, 363.
Hubbs N. H. 381.
Hurvitz 336.
Hussenot M. 381.
Hutcherson P. W. 175.

Iacobescu P. I. 474.
Ianculescu R. 9.
Ibn-ab-Bamma 22.
Iliescu Gh. 5, 9.
Iliescu Tr. 9.
Ingraham H. M. 136, 301.
Ioachimescu G. A. 9, 60.
Ioachimescu A. Gh. 5, 9.
Ioanovici A. 9.
Ionescu A. 175.
Ionescu V. D. 9, 128, 176, 216, 221, 223, 320, 363, 382, 408, 431, 434, 441, 442, 444, 447, 451, 452, 475.
Ionescu H. 79.
Ionescu D. H. 258.
Ionescu I. H. 227.
Ionescu P. H. 22, 36, 117, 173, 200, 337, 455, 457.
Ionescu I. 5, 9, 21, 24, 36, 37, 39, 62, 70, 73, 79, 91, 98, 100, 102, 117, 118, 119, 127, 137, 159, 173, 175, 176, 177, 178, 195, 196, 200, 208, 217, 233, 234, 239, 260, 264, 279, 303, 306, 318 330, 335, 336, 351, 360, 384, 385, 386, 394, 396, 398, 423, 425, 436, 437, 438, 445, 448, 478.
Ionescu M. 274.
Ionescu G. M. 277, 342.
Ionescu V. 457.
Ionescu I. V. 118, 189, 192, 276, 277, 432, 455.
Ionescu-Biss P. H. 103, 118, 142, 144, 149, 155, 179, 189, 192, 196, 198, 257, 276, 277, 308, 310, 337, 341, 347, 348, 349, 357, 389, 393, 395, 397, 428, 454, 457, 461, 472.
Ionescu-Ţiu D. C. 36, 38, 103, 105, 154, 187, 189, 190, 231, 232, 277, 278, 341, 435, 439, 454, 461, 466, 468.
Iorceanu S. 98.
Iordănescu I. 396.
Iorga N. 62.
Iovănescu D. 426.
Iovănescu F. 426.
Istinie-Brezuică I. C. 103, 426.

Jackson D. 258.
Jacobi 447, 448.
Jijie A. 9.
Joffroy 336.
Jonquières 336.
Jovmir T. 144, 189.
Julia G. 60, 259, 335, 424.
Justin Mody 463.

Kakeya 132.
Karamata J. 175, 255, 362, 363, 382.
Kaufmann N. 9.
Kelemen J. 363.
Kelvin Lord 447.
Kempisty S. 255, 362, 363.
Kennison S. L. 301.
Ketchum W. P. 301.
Koebe 61.
Koopman O. B. 61.
Korkine 336.
Korneck 336.
Kraïtchik M. 23, 381.
Kronecker 60, 336.
Kummer 336, 448.
Kuratowski C. 255, 362, 363, 447.

Lagrange 60, 301, 306.
Laguerre 50, 51, 179, 419, 448.
Lalan V. 447.
Lalescu Tr. 179.
Lambert G. 258.
Lambert I. G. 381.
Lamé 336.
Landry 336.
Lane P. E. 136.
Laplace 381, 424, 448.
Laurent 378.
Laval 415.
Lawton W. 448.
Lazăr Gh. 137, 176, 217.

Lazu C. 5, 9.
Léber M. D-ra 314, 355.
Lebesgue 61, 336.
Leemans J. 217.
Lefschetz 136.
Legendre 336.
Lehmer H. D. 448.
Lehmer N. D. 61, 175.
Leibnitz 408.
Leibniz W. G. 423.
Leja F. 255, 304, 362, 363, 447.
Lejeune-Dirichlet G. P. 178.
Lemoine 50, 121, 123.
Lepage Th. 217.
Libos P. 96, 136.
Linteş I. 5, 10, 40, 80, 120, 154, 156, 265, 273, 305, 309, 310, 417, 440, 451, 471, 480.
Liouville 96, 336.
Liteanu I. Gh. 5, 10, 104, 105, 142, 145, 188, 190, 276, 277, 389, 393, 395, 427, 428, 430, 472, 474.
Littlewood 175.
Lomnicki A. 201.
Loria 334.
Lupescu Gh. 142.
Lupescu Gh. C. 76, 106, 118, 144, 152, 189, 276, 277, 389, 455, 461, 470.
Lurquin C. 216, 381.

Macduffer C. C. 61, 258.
Maclovschi I. 76, 276, 277.
Maillet 336.
Makarie Gr. 384.
Malcoci C. 10.
Malfatti 258.
Mandelbrojt S. 255, 362, 363.
Manicatide 30, 112.
Mannheim 324.
Manoilescu M. 10, 382.
Mansion 336.
Marcelino S. 26, 29.
Marcu V. 395.
Marden M 448.
Mareş Em. 276.
Mareş T. 5, 10.
Margulius M. 347, 351, 352, 354, 384, 388, 394, 395, 396, 397, 429, 454, 457, 461, 468, 471, 472, 474, 475, 478.
Marinescu M. 382.
Markoff 258.
Marsieu T. 23, 310.
Martin 47.
Martin S. R. 61.
Martin T. 301.
Masoutié 336.
Mateescu Cr. 5, 10, 98.
Mateescu G. 388.
Mathews 336.
Măţieş V. I. 142, 160, 309, 319, 370, 440.
Mayer O. 176, 381.
Mcshane J. E. 61.
Menelaus 296, 302, 409, 410, 411.
Menge O. W. 301.
Mereuţă E. 118, 154, 189, 196, 231, 274, 276, 277, 312, 316, 333, 347, 360, 389, 435, 461, 463, 468.
Mereuţă V. 10.
Mersenne 448.
Michal D. A. 61, 136.
Mihai Gh. 103.
Mihăileanu N. N. 73, 105, 109, 118, 134, 142, 144, 150, 154, 156, 157, 189, 193, 221, 231, 232, 257, 276, 277, 278, 297, 308, 310, 312, 313, 315, 316, 335, 341, 354, 355, 358, 389, 393, 395, 397, 398, 428, 430, 432, 435, 440, 453, 455, 457, 458, 459, 461, 463, 464, 468, 470.
Mihăilescu N. N. 454.
Mihăilescu P. 454.
Mihăilescu P. T. 10.
Mihalcea I. Em. 142.
Mihalopol C. 10
Mihoc Gh. 217, 304.
Millea G. E. 76, 144, 189, 277, 341, 354, 389, 461, 474.
Miller A. G. 258, 334, 405.
Mineur Ad. 96, 161, 162, 216, 321, 322, 334, 381, 385.
Mircea M. E. 10.
Mirea S. 24, 26.
Mirea N. Şt. 10, 27, 80, 98, 179.
Mirimanoff 336.
Mitchell K. A. 380.
Mitescu C. 10
Mititelu C. Cl. 10.
Mititelu C. I. 10.
Möbius 87, 89, 166, 167.
Moisil C. Gr. 62, 96, 137, 176, 363.
Moivre 342, 435.
Montel P. 62, 96, 175, 255, 362, 424.
Mordell J. L. 335, 336, 381.
More E. L. C. 334.
Moţoc D. M. 189, 276, 277, 341, 393, 454, 455.
Moulton 61.
Murăroiu I. 76, 95, 104, 105, 141, 142, 144, 172, 189, 308, 313, 430.
Myers B. S. 381.

N. M. 304.
Naforniţă I. C. 275, 277, 435.
Nagel 121.
Naneş Gh. 303, 363.
Narly C. 176.
Negrea A. M. L. 76, 103, 142, 154, 188, 189, 227, 274, 276, 277, 309, 343, 347, 389, 395, 435, 461, 468, 472, 474, 475.
Negrescu Tr. 216.
Negretzu I. 10.
Negură St. 10.
Neper 389.
Newton 309, 424, 464.
Nichifor A. G. 5, 10, 179.
Nicolau H C. 5, 11.
Nicolau M. 320, 418, 480.
Nicolau Th. M. 11.
Nicolau-Dobridor I. 425.
Nicolescu M. 11, 96, 97, 148, 176, 363.
Niculescu A. 363.
Niculescu V. A. 11, 50 216, 307.
Niculescu Cr. 11.
Niculescu Gh. 5, 11, 137, 146, 147, 195, 199, 231, 232, 233, 288, 309, 314, 341, 351, 353, 356, 359, 366, 372, 467.
Nikodym O. 96, 255, 362, 363.
Nikodym St. D-na 362, 363.
Noguès R. 335.
Novacu V. 363.
Novleanu Dan 454.
Nowlam S. F. 258.

Oldenburger R. 448.
Olteanu E. Şt. 105, 192, 200, 274, 276, 277, 280, 313, 314, 343, 347, 351, 352, 395, 432, 436, 461, 468, 472, 473, 474, 475.
Onicescu O. 11, 137, 260.
Oprescu Gh. 11, 75, 144, 389, 457.
Orănescu O. 5, 11, 183, 185, 191, 223, 225, 228, 280, 319.
Orăşanu D. C. 5, 11.
Orăşanu Gr. 11.
Ore O. 61.
Ottulescu E. 11.

Paliţa C. 274.
Pall G. 258, 301.
Panaite N. Th. 75, 103, 187, 276, 277, 304, 426, 454, 461.
Panaitescu Sc. 11, 254.
Pănoiu Em. 395.
Pantazi Al. 5, 11, 96, 304, 363.
Panţu Z. I. 104.
Pappus 61.
Paquet M. D-ra 217.
Paradiso J. L. 380.
Parepeanu C. I. 118, 156, 189, 231, 276, 277, 342, 347, 352, 355, 389, 395, 435, 461, 468, 470, 472.
Parker P. V. W. 61, 381, 448.
Pascal 251, 253, 334.
Paşcanu S. 11.
Patraulea N. N. 193, 194, 276, 277, 314, 349, 354, 386, 395, 397, 463, 468, 470, 473.
Patraulea N. R. 33, 118, 277, 470.
Patriciu G. T. 11.
Păun M. Gh. 144.
Pavel D. 216, 382.
Pavel-Onizaba N. 103, 369.
Pell 172.
Pennell O. W. 301.
Pepin 336.
Perrine D. C. 216.
Petrescu I. I. 276, 277, 314, 355, 395, 474.
Petrovici M. 255.
Peyovici Th. 255, 362, 363.
Philipide M. 12.
Picard E. 259.
Pick G. 176.
Picone 97.
Pineda P. 424.
Pitagora 136, 329.
Poisson 448.
Pomey 336.
Pompeiu D. 61, 216, 302, 361, 363, 385, 441, 443, 444.
Poncelet 61, 170, 171, 172.
Popa Gh. I. 189, 190, 276, 277, 360, 455, 457, 461.
Popescu C. 149.
Popescu N. C. 75, 76, 104, 189, 196, 320, 389, 429, 457, 459, 461.
Popescu P. E. 104.
Popescu Gh 12.
Popescu I. 12.
Popescu N. 118, 470.
Popescu D. N. 347.
Popescu N. P. 314.
Popescu C. V. 22, 120, 133, 144, 145, 150, 185, 188.
Popescu-Stăneşti I. M. 118, 156, 193, 194, 277, 280, 314, 317, 349, 437, 469, 470, 473, 478.
Popovici C. C. 190, 200, 362, 363, 429.
Popovici-Corodeanu N. 426.
Popovici T. 12, 92, 93, 96, 175, 294, 424, 446, 447.
Popp N. 12.
Popp Tr. 12.
Portocală M. 12.
Pothenot 216
Potopeanu Gh. 5, 12, 152, 153.
Powers E R. 175.
Poyenar P. 24.
Proca Al. 216.
Protopopescu Gr. 12.
Pruncu Ş. D-ra 144.
Ptolomeu 76.
Puta Tr. 33, 109, 277, 342, 463.
Putnam M. T. 61, 301.

Rabinovitch M. 96.
Racliş Rod. 5, 12, 179, 363.
Radu Fl. 118.
Radu E. M. 12.
Rainich Y. G. 175.
Râmniceanu I. C r. 103, 142 189, 389, 454, 455, 457
Rarincescu G. I. 98.
Raţiu V. M. 104.
Raynor E. G. 61.
Rebière 445.
Revici T. 12.
Rey Pastor J. 96.
Richardson G. D. R. 216
Rici G. 448.
Riemann 96, 259, 334.
Riesz 61.
Riquier 448.
Ritt F. J. 60.
Rivalis 216.
Rivier W. 96.
Roberts H. J. 175.
Robinson S. 61.
Roibanesco I. C. 96.
Rolle 216, 452.
Romeo V. D. 118.
Roşca G. 347, 396, 470.
Roşca Şt. G. 36, 118, 152, 154, 231, 233, 274, 275, 277, 310, 352, 394, 395, 397, 435, 468, 472, 474, 475.
Roşculeţ V. A. 426.
Rose T. 206.
Rosenblatt A. 255, 362, 363.
Roşu 276.
Roşu A. A. 22, 189, 229.
Roşu V. 12.
Rotberg D. 141.
Roy G. 96.
Russe A. 423.
Russel 61.
Rusu D. C. 276, 277, 341, 393, 435, 468.
Ruziewicz 255.

Sachelariade St. I. 276.
Saegiu N. 177.
Sager N. I 476.
Saks S. 448.
Sălăgeanu A. 12, 17.
Saligny A. 17, 97.
Saligny M. 12.
Salimon 374.
Sallin A. 302.
Saltykow M. 217.
Saltykow N. 255.
Sanielevici S. 447.
San Juan R. 424.
Săpunaru S. Gh. 12.
Sarian M. 5, 12.
Saulea N. Em. 138.

Savin C. I. 103, 105, 144, 187, 189, 238, 240, 275, 277, 308, 314, 319, 349, 352 357, 395, 397, 454, 472.
Savin C. M. D-ra 195.
Schoenberg J. I. 301.
Seely E. C. 61.
Selzer S. 176.
Şerban-Ulmeni D. 457.
Şerban V. D. 39.
Şerbănescu Gh. V. 13.
Şerbănescu N. V. Fl. 274, 432.
Sergescu B. 13.
Sergescu P. 5. 13. 62, 130, 132, 137, 143, 179, 185, 201, 217, 256, 362, 363, 385, 400, 424, 476.
Serret 164.
Servais Cl. 96, 137, 216.
Sfinţescu I. C. 13.
Shohat J. 61.
Shook A. C. 301.
Shover G. 61.
Siehl G 423.
Sierpinski W. 96, 175, 255, 362, 447.
Simonart F. 217.
Simson 177, 459.
Smântânescu A. 13.
Smith 336.
Smith E. D. 61, 334.
Smith A. P. 136.
Snyder V. 216, 334.
Sorin Şt. Ef. 355.
Soula J. 447.
Şova-Grigoreni C. I. 38, 118, 275, 277, 355, 395, 397, 432. 471, 472.
Spathy I. R. 144.
Sprinceană C. Gh. 103.
Srom W. C. 61.
Stamatescu I. 13.
Stan I. A. 75, 76, 80, 103, 109, 190, 276, 277, 349, 426, 432. 461.
Stan D. 13.
Starcker W. G. 61, 175.
Ştefănescu I. Cr. 277.
Ştefănescu Em. 47, 203.
Ştefănescu-Goangă A. 457.
Steiner 216, 295, 420, 421.
Sterneck Von 175.
Stewart 176.
Stieltjes 380, 424.
Stoica D. Al. 37, 471.
Stoilov S. 362.
Stouffer B. E. 448.
Stozek 255.
Struik J. D. 334.
Stuyvaert M. 445.
Sudan G. 179, 382.
Sullă A. P. 276.

Tămâianu P. 363.
Tamarkin D. J. 216, 301.
Tănăsescu A. 13, 383.
Tănăsescu G. 15.
Tănăsescu A. T. 13.
Taylor 46, 123, 447.
Tchakaloff L. 216, 362, 363.
Teodoreanu V. 13, 304, 383, 384.
Teodorescu C. C. 363, 383.
Teodorescu N. 62, 73, 96, 176, 217, 337, 363, 382.
Teodorescu N. N. 13.
Teodorescu Şt. 475.
Teodoriu L. 96, 217, 441
Teodoru D. R. 13.
Ţerna M. D-ra 355.
Thales 76.
Thébault V. 39, 44, 50, 79, 91, 119, 122, 123, 136, 159, 161, 162, 192, 199, 206, 207, 216, 239, 243, 256, 258, 279, 292, 318, 323, 335, 352, 359, 381, 399, 402, 438, 469.
Thierrin H. G. 13.
Timmerding H. E. 423.
Ţino N. O. 5, 13, 453, 454, 455, 457, 458, 459, 461, 478.
Ţiţeica G. 5, 13, 62, 97, 172, 173, 175, 176, 259, 260, 304, 361, 362, 363, 385, 424.
Ţiţeica G. D-ra 13.
Ţiucra P. M. 274, 276, 342.
Toporescu E. 382.
Truţescu Şt. D-na 118, 275, 277, 310, 312, 463.

Ulam S. 258.
Ulescu A. 13.
Umé B. D-ra 334, 381,
Urechia A. V. 304.

Vâlceanu G. 62.
Vâlceanu N. J. 103, 105, 142, 189, 428, 454.
Van Aubel 443.
Vandenberghe J. 258, 381.
Vandermonde 155, 156.
Vandiver 336.
Van Mieghem J. 217.
Vapopoulos Th. 96.
Vardala I. 13.
Varlam M. P. 36, 154, 156, 192, 310, 347, 393, 435, 467.
Vasilache I. 13.
Vasilescu Fl. 14.
Vasilescu Gr. 14.
Vasilescu G. I. 14.
Vasiliev I. 426.
Vasiliu C. I. 69, 74, 78, 94, 140, 156, 157, 158, 180, 183, 197, 198, 278, 306, 389, 422.
Vasiliu M. 14.
Vasilovici D. 304.
Vasu V. 30, 33, 76, 109, 115, 236, 274, 276, 277, 342, 432, 461. 463.
Velea M. 30, 76, 106, 128, 143, 185, 189, 227, 274, 275, 277, 342, 388, 389, 432, 452, 461.
Velescu N. I. 449.
Velicescu N. N. 103, 105, 142, 189, 276, 277, 308, 314, 347, 358, 389, 428, 435, 457, 461, 477.
Velicescu Gh. T. 189, 389, 457, 461.
Ver Eecke P. 216.
Vetter Q. Dr. 362. 363.
Vignaux C. J. 61, 176, 216, 381, 424.
Vinants I. 217.
Visarion I. C. V. 118, 152, 156, 349.
Vitali 175.
Voltera 258.
Vonica C. I. 105.
Vrânceanu G. 302, 447.
Vuibert H. 62, 97, 136, 176, 216, 258, 276, 302, 334, 424, 447.

Waerden van der L. B. 60.
Wall S. H. 61.
Walsh L. J 381.
Waring 61.
Weatherburn 216.
Webb H. J. 16.
Weierstrass 61, 448.
Weiss A. E. 96.

Weyl 448.
White S. H. 301.
Whitehead 61.
Whyburn T. G. 61, 175.
Whyburn M. W. 61, 301.
Wieferich 336.
Wilkosz W. 362, 363.
Williams R. A. 61.
Williamson J. 61.
Wilson B. E. 60.
Wilson-Glaisher 448.
Wilson A. W. 448.
Wolibner W. 447.
Wolffskehl P. 177, 336.
Wong C. B. 60, 301.
Young 61.
Zaharia O. I. 103, 104, 426, 427.
Zaharia O. N. 97, 103, 105, 141, 187, 189, 227, 424, 454.
Zamfirescu Gr. 14.
Zamfirescu G. I. 30, 33, 147, 153, 155, 193, 194, 236, 276, 277, 311, 334, 347, 354, 394, 397, 432, 463, 470, 478.
Zane D. N. 118, 156, 277, 347, 435, 474.
Zapan Gh. 14, 20, 159, 200, 240, 400, 415, 439.
Zapan Gr. 14, 119, 120, 199, 240, 254.
Zarda I. 274, 275, 341.
Zimmer L. M. 216.
Zipches E. 330.
Zlatcu St. C. 14.
Zygmund A. 362, 363.
Zygmund S. 255.

## K. UVRAGE CITATE

Pag.

*Gazeta Matematică* 5, 8, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 36, 47, 60, 84, 92, 94, 119, 128, 135, 148, 172, 173, 174, 175, 177, 179, 200, 201, 203, 204, 205, 222, 248, 256, 257, 259, 264, 276, 280, 283, 284, 289, 296, 307, 326, 330, 333, 337, 347, 353, 358, 364, 366, 367, 369, 374, 383, 384, 395, 398, 409, 411, 415, 418, 419, 420, 421, 425, 430, 441, 451, 477

*F. G. M.* Exercices de géométrie . . . . . 18, 276, 308

*Ibn-Ab-Bamma* Talkhis Amali Al Kissab . . . . . 22

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina . . . . 23, 61, 136, 176, 216, 258, 334, 381, 424, 447

Boletin Matematico . 23, 61, 97, 136, 176, 216, 258, 330, 334, 381, 447

Sphinx, Revue mensuelle de quéstions récréatives . . . . . 23

Revista matematică din Timişoara . . . 23, 97, 136, 176, 217, 258, 334, 335, 340, 341, 359, 369, 382, 424, 447

*P. Poyenar, F. Aaron şi G. Hill* Vocabulaire français-valaque . . . . . 24

*Frédéric Damé* Incercare de terminologie poporană română . 24

Culegerea de probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie . . . 29

*Manicatide şi Abramescu* Curs complimentar de Algebră . . . . . 30, 112

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles . . . . . 41

Education mathématique . . . . . 41

*Carmichael* Analyse indéterminée . . . . . 47

*H. Beghin et G. Julia* Exercices de Mécanique . . . . . 60

Bulletin of the American Mathematical Society 60, 61, 136, 175, 216, 258, 301, 334, 380, 423, 445, 448

Journal de mathématiques élémentaires . 62, 97, 136, 176, 216, 218, 222, 258, 302, 334, 381, 382, 424, 447

*Seminarul de matematici din Cluj* Activitatea didactică şi ştiinţifică pe anul şcolar 1929/1930 . . . . . 62

*P. Sergescu* Note din activitatea Societăţii matematice in anul 1921 . . . . . 62

Pag.

*P. Sergescu* Sur le module des zéros des dérivées des fonctions bornées . . . . . 62
Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des sciences. Congrès d'Alger, 1930 . . . . . 62
*P. Sergescu* Discours fait à la séance inaugurale du Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences à Alger, en 1930 . . . . . 62
Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliques de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II" Bucarest 88, 216, 302, 382, 441
Mathesis . . . 91, 96, 122, 136, 137, 161, 206, 216, 217, 258, 259, 321, 322, 334, 335, 381, 402, 423
Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine . . . 96, 175, 380
Mathematica . . . . . 96, 175, 255, 259, 362, 447
Boletin del Seminario matematico Argentino . . . . . 96, 424
Revista ştiinţifică „V. Adamachi" . . . . . 97, 382, 447
Natura . . . . . 97, 176
*M. Ghermanesco* Sur les fonctions n-métaharmoniques . . . . 97
Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris. 97, 259, 304, 382, 448
*Miron Nicolescu* Sur les fonctions harmoniques d'ordre *p*. . . 97
Bulletin de la Société mathématique de France . . . . . 97
*Miron Nicolescu* Sur une équation à dérivées partielles caractérisant les moyennes de M. Picone . . . . 97
Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei . . . . . 97, 383
*Miron Nicolescu* Sulle funzioni metaarmoniche in *n* variabili . 97
*Miron Nicolescu* Sur certaines transformations ponctuelles de l'espace à quatre dimensions . . . . . 97
Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi . . . . . 97, 302, 383
*Miron Nicolescu* Remarque sur l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants . . . . . 97
L'Enseignement mathématique . . . . . 97, 201
*Miron Nicolescu* Sur l'integration orientée des équations differentielles non analytiques . . . . . 97
Buletinul de Ştiinţe din Cluj . . . . . 97
*Petru Bogdan* Opera lui Anghel Saligny şi învăţământul tecnic în România . . . . . 97
*S. Iorceanu* Manualul Construcţiunei şi întreţ. drumurilor . 98
*Cesaro* Nouvelle Correspondance . . . . . 122
*E. N. Barisien* Bulletin de Mathématiques Elémentaires . . . 122
Revue de Mathématiques Spéciales . . . . . 128
Boletin Matematico Elemental . . . . 136, 176, 216, 302, 334, 381, 424, 447
*D. Germani* Sur la structure des formules et la synthèse des lois de similitude en physique . . . . . 136

Pag.

*Cl. Servais* Sur la géométrie du tetraédre . . . . . 137
Bulletin de l'Académie royale de Belgique . . . . . 137
*E. Heuchamps* Sur des suites très générales qui se développent conformément à la loi de formation des réduites d'une fraction continue . . . . . 137
*Cap. ing. G. Nicolesco* Sur une famille spéciale de tolérances appliquée aux moteurs d'aviation . . . . . 137
Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara . . . . . 137, 448
*Căp. ing. G. Niculescu* Studiu critic asupra Challenge-ului internaţional de turism din 1929 . . . . . 137
România aeriană . . . . . 137
Legiuire pentru adăogirea şi reformarea primirii tacsii de înfăţişare în judecată . . . . . 137
*N. Abramescu* Lecţiuni de geometrie pură Infinitezimală . . 141
*P. Sergescu* Sur le module des zéros du polynôme du troisième degré . . . . . 143
Education mathématique . . . . . 161, 206
Nouvelles Annales de Mathématiques . . . . . 161
*Serret* Traité d'Algèbre . . . . . 164
*G. Ţiţeica* O chestiune de teoria numerelor . . . . . 173
Buletinul Societăţii Politecnice . . . . . 176, 361
Revista de pedagogie . . . . . 176
*A. Haarbleicher* De l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonées. Nouvelle géométrie du triangle. 176
*N. Saegiu* Fermat'sche Satz. Allgemeine Beweisführung . 177
Revista universitară matematică . . . . . 179
*A. Lomnicki* Sur les méthodes qui servent à limiter supérieurement les modules des racines des éq. alg. 201
Activité de la Société de mathématique de Belgique . . . . . 217
*J. Leemans* Changement du triangle de référence en coordonées barycentriques . . . . . 217
*De Montessus de Ballore* Le génie de mathématiques . . . . . 217
Aritmetica matematicească . . . . . 217
Revista Aeronautică . . . . . 254
Revista Artileriei . . . . . 254
Revista Geniului . . . . . 254
*Căp. Vasile Emanuel* Măsurători pe teren . . . . . 254
*A. Devresse* Le problème de Pothénot résolu à l'aide de la règle seulement . . . . . 258
*Alfred Errera* Les mathématiques en Belgique de 1830 à 1930. 259
Livre d'or du Centenaire de l'Indépendance Belge . . . . . 259
*Radu Bădescu* Sur le troisième théorème de Fredholm relatif à une équation intégrale particulière . . . 259
*Radu Bădescu* Sull'equazione di Fredholm nel campo complesso. 259

| | | Pag. |
|---|---|---|
| Bolletino del l'Unione Matematica Italiana | | 259 |
| *Radu Bădescu* | Sur une équation fonctionelle | 259 |
| Bulletins de la classe de sciences de l'Académie royale de Belgique | | 259 |
| *Radu Bădescu* | Résolution d'unè équation fonctionelle et fonctions itératives généralisées | 259 |
| *G. Călugăreanu* | Asupra unor serii cu termeni complecşi | 259 |
| *G. Călugăreanu* | Sur un complément au théorème de E. Borel. | 259 |
| *G. Călugăreanu* | Sur la condition nécessaire et suffisante pour l'univalence d'une fonction dans un cercle. | 259 |
| *Emile Picard* | Quelques applications analitiques de la Théorie des courbes et des surfaces algébriques | 259 |
| Cahiers scientifiques | | 259 |
| *E. Cartan* | Leçons sur la Géométrie projective complexe | 259 |
| *C. Bourlet* | Leçons de Trigonometrie | 276 |
| Culegerea de probleme trigonometrice | | 276 |
| *N. Abramescu* | Trigonometria | 276 |
| *S. Haret* | Trigonometria | 276 |
| *H. Vuibert* | Rélations entre les éléments d'un triangle | 276 |
| Foaia Matematică | | 296, 304 |
| Bulletin of the National Research Council | | 301 |
| American Mathematical Society Catalogue of the library | | 301 |
| *D. Barbilian* | Untersuchungen über die Cliffordschen Ketten | 302 |
| *D. Barbilian* | Beitrag zu einem Satz des Herrn Pompeiu | 302 |
| *G. Vrânceanu* | Sur quelques points de la théorie des espaces non holonomes | 302 |
| *G. Vrânceanu* | Parallélisme et courbure dans une variété non holonomes | 302 |
| Atti del Congresso internazionale dei Matematici | | 302 |
| *G. Vrânceanu* | Memoriu de titluri şi lucrări | 302 |
| *N. Cioranesco* | Sur les fonctions harmoniques conjuguées | 302 |
| Bulletin des sciences mathématiques | | 302 |
| *N. Cioranesco* | Sur l'intégration des équations différentielles linéaires avec les conditions initiales linéaires les plus générales | 302 |
| *G. Demetrescu* | Dare de seamă asupra activităţii Observatorului astronomic din Buc. in cursul anului 1931 | 302 |
| *Alfred Henri* | Le calcul des differences finies et ses aplications | 302 |
| *Gheorghe Naneş* | Lecţiuni de astronomie pentru clasa VII sec. | 303 |
| *N. Abramesco* | Le mouvement d'une figure plane variable qui reste semblable à elle même | 303 |
| Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa | | 303 |
| *N. Abramesco* | Sur le facteur de convergence uniforme de M. Leja d'une série de polynomes | 304 |
| *N. Abramesco* | Sur la détermination des fonctions holomorphes dans des domaines données | 304 |

| | | Pag |
|---|---|---|
| *V. A. Urechia* | Opere complecte | 304 |
| *Vasile Teodoreanu* | Curs de algebră | 304 |
| *D. Vasilovici* | Culegere de probleme din Geometria analitică. | 304 |
| *El. Angelescu* | Cursu de algebră elementară | 304 |
| Revista Matematică | | 310 |
| *Mannheim* | Principes et développements de Géométrie cinématique | 324 |
| *L. Brande* | Les Coordonnées intrinsèques | 326 |
| Scientia | | 326 |
| *Diophante* | Aritmetica | 328 |
| Vlăstarul. Revista Liceului Spiru Haret | | 335 |
| *Gaston Julia* | Principes géométrique d'analyse. | 335 |
| *V. Thébault* | Contribution à la géométrie du triangle | 335 |
| *Ion Ionescu* | Istoricul învăţământului, Inginerii în România. | 335 |
| Volumul jubiliar al Şcoalei Politechnice „Regele Carol II“ | | 335 |
| *R. Noguès* | Théorème de Fermat. Son histoire | 335 |
| R. M. y. F. E. | | 340 |
| *Gh. Ţiţeica* | Desvoltarea ştiinţelor matematice în România | 361 |
| *G. Sudan* | Zur Jacobstalschen transfiniten Arithmetik | 382 |
| Mathematischen Annalen | | 382 |
| *G. Sudan* | Sur un théorème de Hessenberg | 382 |
| Fundamenta mathematicae. | | 382 |
| *M. Ghermanesco* | Sur les fonctions n-métaharmoniques | 382 |
| *M. Ghermanesco* | Sur les solutions fondamentales de l'équation n-métaharmonique | 382 |
| *M. Ghermanesco* | Sur les moyennes successives d'une fonction métaharmonique | 382 |
| *M. Ghermanesco* | Sur certains systèmes linéaires d'équations aux dérivés partielles du type elliptique | 382 |
| *M. Ghermanesco* | Sur les fonctions n-métaharmoniques | 383 |
| *M. Ghermanesco* | Sur un complexe quadratique de droites | 383 |
| *Spiridon Ghiţescu* | Problema lui Bayess | 383 |
| *C. C. Teodorescu* | Calculul probabilităţilor aplicat în industrie | 383 |
| Buletinul Societăţii de Matematici a Liceului „Tasse Dumitrescu“ din Mizil | | 383 |
| *Grigorie Makarie* | Metoda pentru calculul cu înlesnire al rădăcinilor patrate | 384 |
| *A. Demoulin* | Sur la géométrie anallagmatique des courbes non-sphériques | 423 |
| *G. Siehl* | Zentralaffine und Centraläquiforme Geometrie | 423 |
| Chaleur & Industrie | | 423 |
| Journal de Vuibert | | 423 |
| *G. W. Leibniz* | De geometria recondita. | 423 |
| *E. H. Timmerding* | Die Erziehung der Anschaung | 423 |
| *A. Russe* | Géométrie sublime | 423 |
| *A. Boulanger* | La mécanique des ressorts | 423 |

Pag.

Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure (V. D. I.) . . . . . 423
*P. Montel* Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes . . . . . 424
Publication du Séminaires mathématique de l'Université de Cluj . . . . 424
Anuarul Universităţii din Cluj pe anul 1930 — 1931 . . . . . 424
*Gaston Julia* Principes géométriques d'Analyse . . . . . 424
*F. J.* Compléments de Trigonometrie . . . . . 426
*D. Pompeiu* Remarque sur la note de M. Teodoriu . . . . 441
*D. V. Ionescu* Asupra unei teoreme a D-lui D. Pompeiu. . . 441
*D. V. Ionescu* Sur une remarque de M. D. Pompeiu. . . . . 441
*M. Stuyvaert* Algèbre à deux dimensions. . . . . 445
*L. Euler* Niedere und höhere Algebra . . . . . 445
*Ferrari* Algèbre logistique . . . . . 445
*A. Rebière* Mathématiques et mathématiciens . . . . . 445
*M. Ghermănescu* Sur l'intégrale de Poisson . . . . . 448
*M. Ghermănescu* Sur l'intégrale des fonctions de deux variables complexes . . . . . 448
*M. Ghermănescu* Sur un classe de fonctions monogènes . . . . 448
*M. Ghermănescu* Sur les fonction monogènes . . . . . 448
*M. Ghermănescu* Sur l'intégrale de Weyl . . . . . 448
*M. Ghermănescu* Sur une généralisation de l'équation de Laplace 448
Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège . . . . . 448
*M. Ghermănescu* Sur le problème de Riquier . . . . . 448
Culegerea de probleme I. Ţ. I. C. . . . . 461

*ERATĂ.* Problema rezolvată la pag. 303, Vol. XXVI are No. 2233 iar nu 2223; aceasta din urmă a fost publicată la pag. 224, Vol. XXV.

Mulţumim pe această cale D-lui Colonel Gh. Buicliu pentru preţioasele sfaturi şi observaţiuni comunicate la întocmirea tablei de materii.

C. H. N.

LA REDACȚIUNEA REVISTEI „GAZETA MATEMATICĂ“
SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL V-LEA
(MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)
DE
BOLETIN MATEMATICO
COSTUL UNUI ABONAMENT FIIND DE 300 LEI
ȘI PENTRU ANUL AL III-LEA
(MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)
DE
BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL
COSTUL ABONAMENTULUI FIIND DE 125 LEI,
PUBLICATE ÎN BUENOS AIRES; AMÂNDOUĂ 400 LEI

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

---

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

*Aurian L.* (1364); *Cârstoiu D. I.* (3936, 4014, 129, 40); *Chiriac I. C.* (4083, 97, 139); *Fabius Dorina* (4115); *Gheorghiu C. A.* (A, N); *Iacob Margareta* (4115); *Ionescu-Biss P. H.* (4033, 115, 29, 40); *Ionescu D. C.* (4083, 129); *Mihăileanu N. N.* (2993, 3989, 4009, 115, E, N, P); *Negrea A. M. L.* (3935, 4027, 140); *Olteanu E. Şt.* (3839, 928); *Parepeanu C. I.* (3935, 4088, 89, 94, 108, 15, 17, 22, 29, 38, 40, 44, 45, E, N); *Patraulea N.* (1364); *Popescu-Stăneşti I. M.* (4083, 97, 108, 29, 40, E); *Sager N. I.* (4114, 15, 40, 45, N, P); *Savin C. I. Subloc.* (4099, 117, E, P); *Stan A. Subloc.* (4095); *Varlam P.* (4078, 88, 89, 99, 129, 38, N); *Vissarion I. C. V.* (4083, P); *Zane D. N.* (4089, 97, 129).

---

*Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

---

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

---

**Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.**

# Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

## Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

**La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.**

### Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

**I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

**Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călugărei 23, Bucureşti 4.**